COMPENDIUM

DER

HÖHEREN ANALYSIS.

PAPIER
AUS DER MECHANISCHEN PAPIER-FABRIK
DER GEBRÜDER VIEWEG ZU WENDHAUSEN
BEI BRAUNSCHWEIG.

COMPENDIUM

DER

HÖHEREN ANALYSIS

VON

DR. OSKAR SCHLÖMILCH,
Professor an der Königl. polytechnischen Schule zu Dresden und Mitglied der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

MIT 64 IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

BRAUNSCHWEIG,
DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.
1853.

Vorrede.

Das Werk, welches ich hiermit dem mathematischen Publikum übergebe, ist das Produkt meiner bisherigen und zugleich die Grundlage meiner künftigen Vorlesungen an der hiesigen polytechnischen Schule. Wenn auch für eine Unterrichtsanstalt von praktischer Tendenz ausgearbeitet, so wird man ihm doch seine Bestimmung hoffentlich nicht anmerken; denn es ist ebensosehr der Wunsch des Königlichen Ministeriums des Innern, als meine eigene Ueberzeugung, dass der mathematische Unterricht auf einer höheren technischen Lehranstalt in streng wissenschaftlicher Form ertheilt werden soll, und dass er sich von unfruchtbaren philosophischen Redensarten, wie von einer möglichst eiligen praktischen Abrichtung gleich weit entfernt zu halten hat, ohne deswegen seine fortwährende Verbindung mit der Praxis zu opfern. Während ich so in Beziehung auf die Gründlichkeit der Darstellung vollkommen freie Hand behielt, blieben nur noch zwei aus der Bestimmung des Buches hervorgehende Bedingungen zu erfüllen; es musste nämlich das Maass der vorauszusetzenden Kenntnisse auf sein Minimum reduzirt, andererseits ein möglichst einfacher und natürlicher Gedankengang eingehalten werden. In wie weit mir das Erste geglückt ist, möge man daraus abnehmen, dass ich ausser der gewöhnlichsten Elementarmathematik nur die ersten Begriffe der analytischen Geometrie als bekannt voraussetze; ich habe selbst die bei der Differenziation der Potenz, der Exponenzialgrösse und des Logarithmus sonst übliche Anwendung des binomischen Satzes (für ganze positive Exponenten) vermieden und durch eine auf gewöhnlicher Division beruhende Darstellung ersetzt. Auch die analytische Geometrie hätte sich ausschliessen und mit den Anwendungen der Analysis zu einer höheren Geometrie verschmelzen lassen, es mag das sogar systematisch sein, für ein Lehrbuch aber ist es höchst unpraktisch, sich eines so vortrefflichen Mittels zur Erläuterung der analytischen Processe zu berauben. Ich habe daher keinen Anstand genommen, nach Erledigung gewisser Hauptcapitel der Differenzial- und Integralrechnung jedesmal einen geometrischen Excurs einzuweben, selbst der physikalische Begriff der Dichtigkeit schien mir nicht zu fremd, um den dreifachen Integralen dieselbe Anschaulichkeit wie den einfachen und Doppelintegralen zu verschaffen. — Was die zweite Forderung einer möglichst natürlichen Darstellung anbelangt, so war diese nach den angegebenen Prämissen sehr leicht zu erfüllen; die strengsten Methoden sind, richtig dargestellt, immer die natürlichsten und kürzesten. Den Beweis dafür mag das vorliegende Buch selber führen, welches unter allen Werken von gleichem Umfange den reichsten Inhalt bieten dürfte, obschon man nirgends eine lakonische Kürze des Ausdrucks finden wird.

Den obigen allgemeinen Andeutungen über die Gesichtspunkte, welche meiner Arbeit zu Grunde liegen, mögen einige mehr ins Detail gehende Bemerkungen folgen. Den Begriff des Differenzialquotienten habe ich nach Navier's Vorgange (*Resumé des leçons d'analyse*, *Paris* 1840, deutsch von Dr. Wittstein, Hannover 1848) auf „die Geschwindigkeit des Wachsthums einer Funktion“ zurückgeführt, nicht als ob ich meinte, dass damit für die Metaphysik des höheren Calcüls ein irgend bedeutsames Moment oder gar dessen Basis gefunden wäre, sondern weil diese Verknüpfung einen für Techniker naheliegenden Ausgangspunkt bildet und sich mit Leichtigkeit der historischen Entstehung der Differenzialrechnung anschmiegt. Genauer, als es sonst geschieht, ist dabei der Begriff der Grenze auseinandergesetzt worden (S. 9 und 10) um den leider hie und da noch immer auftauchenden schiefen Auffassungen des Differenziales vorzubeugen. In der Bezeichnungsweise folge ich **Jacobi** und benutze bei gewöhnlichen Differenzialen die gestreckten d, bei partiellen Differenzialen die geschwungenen ∂; dass **Ohm** und einige wenige ausländische Mathematiker mit ∂ den Differenzialquotienten und nicht ein partielles Differenzial bezeichnen, kann **Jacobi** gegenüber von keinem Gewicht sein; will man aber den Differenzialquotienten durch einen vorgesetzten Buchstaben andeuten, so empfiehlt sich die von **Cauchy** herrührende Anwendung des grossen D jedenfalls besser.

In der Entwickelung der unendlichen Reihen von **Taylor** und **Mac Laurin** (§. 31) habe ich die immer umständlichen Restbetrachtungen vermieden und gezeigt, in wie fern die Methode der unbestimmten Coefficienten wissenschaftlich berechtigt ist (Satz *D*. S. 128); hierdurch wurde einerseits die Strenge vollkommen gewahrt, andererseits die Bequemlichkeit, welche jene Methode vor den späteren Entwickelungsweisen von **Cauchy** und **Ampère** vortheilhaft auszeichnet, wieder gewonnen.

Daran schliessen sich in §. 36 einige Bemerkungen über das Unendlich-Kleine, hinreichend, um auch hier die Leichtigkeit wieder zu erlangen, welche die älteren Betrachtungsweisen darboten, und wodurch man ein für allemal der Mühe überhoben wird, sich ferner auf Grenzenuntersuchungen einzulassen, die namentlich bei mathematisch-physikalischen Problemen zu unerhörten Weitläufigkeiten führen müssten.

Für die Integralrechnung und deren Anwendungen ist bekanntlich die Auffassung des Integrales als eines summatorischen Ausdruckes von besonderer Wichtigkeit und Klarheit, sie wurde deshalb, wie bei allen besseren Schriftstellern der Neuzeit, in den Vordergrund gestellt und mit Sorgfalt erörtert; auch die Transformation doppelter und dreifacher Integrale durch Substitution neuer Variabelen (d. h. durch Aenderung des Coordinatensystems) ist auf dieses Prinzip zurückgeführt worden (§§. 94 und 97) und erlangt dadurch jedenfalls eine grössere Anschaulichkeit als auf dem gewöhnlichen rein analytischen Wege, wenn auch letzterer den Vorzug besitzt, auf mehr als dreifache Integrale anwendbar zu sein.

Die Capitel XVI. und XVII., die mancherlei Eigenes enthalten, sind so gestellt, dass sie beim ersten Unterrichte nöthigenfalls übergangen und später nachgeholt werden können. Ist mir irgendwo das Maasshalten schwer geworden, so war es hier und am meisten bei dem unendlich reichen Thema der elliptischen Funktionen. Um jedoch wenigstens einem anerkennungswerthen Prinzipe zu folgen, habe ich die Auflösung der Fundamentalaufgaben vollständig gegeben und im Uebrigen die Untersuchung bis dahin geführt, wo dem Leser die Nothwendigkeit des Eintritts einer neuen Behandlungsweise fühlbar wird, welche letztere dann weiter bei Jacobi zu suchen ist. Dieselbe Maxime leitete mich auch bei der Darstellung der Lehre von den partiellen Differenzialgleichungen, die begreiflicherweise hier nur in sehr beschränktem Maasse Platz finden konnte.

Von Beispielen habe ich immer soviele gegeben, als der betreffende Calcül Modifikationen zuliess, und man wird daher für jeden bemerkenswertheren Fall ein Paradigma aber keine überreiche den Platz verengende Auswahl von Uebungsbeispielen finden; für letztere verweise ich auf die Sammlung von Prof. Dr. Sohncke (Halle 1850).

Dresden, im November 1852.

Dr. O. Schlömilch.

Inhalt.

Literatur.

[1]) Ueber die Entstehungsgeschichte der Differenzialrechnung und ihrer Symbolik siehe „Die Entdeckung der Differenzialrechnung durch Leibniz, dargestellt von Dr. C. J. Gerhardt. Halle, bei H. W. Schmidt, 1848.

---

[1]) Eine weitere Ausführung der Lehren der §§. 16, 17, 18 und 19 nebst zahlreichen instruktiven Beispielen enthält die „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie (der Ebene) von L. J. Magnus.“ Berlin, 1833 (S. 323—488).

[2]) Tiefere Untersuchungen über räumliche Curven und krumme Flächen findet man in nachstehenden Werken:

Brandes, Lehrbuch der höheren Geometrie, Leipzig 1822—24.

Möbius, der barycentrische Calcül, Leipzig 1827, §§. 108 und 109.

Charles Dupin, Développements de Géometrie, Paris 1813, page 149.

Monge, Application de l'Analyse à la Géometrie. In der neuesten von Liouville besorgten Ausgabe dieses Werkes (Paris, 1850, chez Bachelier) steht auch die berühmte Abhandlung: Disquisitiones generales circa superficies curvas, auct. C. F. Gauss, aus dem 6ten Bande der Commentat. recent. Gotting. (1828).

---

[1]) Die erste (für den gegenwärtigen Zustand der Wissenschaft ungenügende) Ableitung der Potenzenreihen, gegründet auf einen Satz der Differenzenrechnung, ist von Taylor; Methodus incrementorum, Londini 1715, Propos. VII., Coroll. II. Die Mängel der Taylor'schen Entwickelung sind ergänzt von Caqué im Journal de Mathématiques von Liouville, Octobre 1845; letztere Darstellung findet man auch in des Verfassers „Theorie der Summen und Differenzen". Halle 1848, §. 6.

[2]) Eine sehr ausführliche und meisterhafte Untersuchung des binomischen Satzes, namentlich für complexe Exponenten, giebt Abel in Crelle's Journal, Bd. I., S. 311.

[3]) Vollständiger ist die obige Theorie abgehandelt in des Verfassers „Handbuch der algebraischen Analysis," 2te Auflage, Jena 1851, Cap. VII.

[4]) Ausführlicher und mit Rücksicht auf die von Gauss entdeckte Bedeutung der complexen Zahlen, in des Verfassers „Handbuch der algebraischen Analysis," §§. 50 — 68.

[5]) Vergl. „Theorie der independenten Darstellung der höheren Differenzialquotienten" von Reinh. Hoppe, Leipzig 1848; und mehrere Aufsätze in Grunert's Archiv der Mathematik (Bd. VIII., S. 357, Bd. XII., S. 297 und Bd. XVIII., S. 306).

Integralrechnung.

Cap. X. Fundamentalsätze der Integralrechnung.

Cap. XI. Integration rationaler algebraischer Differenziale.

Cap. XII. Integration irrationaler algebraischer Differenziale.

Cap. XIII. Integration transcendenter Differenziale.

Cap. XIV. Die Ausmessung der Linien, Flächen und Körper.

---

[1] Zahlreiche Beispiele zu §§. 64 und 65 finden sich in „Magnus, Aufgaben und Lehrsätze etc."

[2] Ueber die Methode von Gauss siehe Comment. societ. Gotting. Vol. III., (1816), und einen Aufsatz von Jacobi in Crelle's Journal, Bd. I., S. 301; Magnus giebt eine mehr elementare Darstellung derselben.

[3] Beispiele siehe bei „Magnus, Aufgaben und Lehrsätze etc."

---

[1]) Verschiedene Anwendungen der §§. 68 und 69 finden sich in der „Anleitung zur praktischen Stereometrie von Tob. Mayer,“ Göttingen 1820.

[2]) Grossen Reichthum an solchen Ableitungen enthalten die Aufsätze von Kummer in Crelle's Journal, Bd. XII., S. 144, Bd. XVII., S. 210 u. S. 288, Bd. XX., S. 1. Daselbst ist von den Eigenschaften der Gammafunktionen (siehe §. 84) vielfacher Gebrauch gemacht.

[3]) Die Untersuchung über die aus dem Taylor'schen Satze folgende summatorische Formel ist von Malmstén in Crelle's Journal, Bd. XXXV., S. 55, vollständig erledigt worden; ins Deutsche übertragen findet sie sich in des Verfassers „Theorie der Summen und Differenzen“ (§§. 10 — 15).

[4]) Nachdem die von Lagrange selbst und von Cauchy (mittelst des Imaginären) gegebenen Ableitungen als ungenügend erkannt worden waren, lieferte Lejeune Dirichlet den ersten strengen Beweis (Crelle's Journal, Bd. IV., S. 94, und Dove's Repertorium der Physik, Bd. I., S. 152). Mit dem letzteren auf demselben Prinzipe beruhend, jedoch einfacher, ist der vom Verfasser eingeschlagene Gedankengang; siehe „Analytische Studien,“ zweite Abtheilung, Leipzig 1848.

[5]) Vergl. Soldner: Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante, Munic 1809; ferner einen Aufsatz von Bessel im „Königsberger Archiv für Naturwissenschaft und Mathematik,“ Stück I., S. 7.

---

[1] Weitere Untersuchungen über die sogenannten Euler'schen Integrale Γ und B enthalten der zweite Band von Légendre's Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes (Paris 1826, chez Courcier), und die berühmte Abhandlung von Gauss in den Commentat. Gotting. rec. tom. II., 1812. Die Resultate dieser Arbeiten in anderer Weise dargestellt finden sich im ersten Bande von des Verfassers „Analytischen Studien."

[2] Die erste zusammenhängende Untersuchung der elliptischen Integrale verdankt man Légendre (traité des fonct. ellipt.); die Theorie der elliptischen Funktionen (die bedeutungsvollste neuere mathematische Schöpfung) wurde von Abel und Jacobi gleichzeitig in Angriff genommen und von dem Letzteren einem hohen Grade der Vollendung entgegengeführt. Die erste Jacobi'sche Bearbeitung führt den Titel: Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, Regiomonti 1829; eine zweite steht aus Jacobi's Nachlass zu erwarten. Zahlreiche Abhandlungen in Crelle's Journal (von Jacobi, Richelot, Sohncke, Luchterhandt, Hädenkamp, Rosenhain, Eisenstein, Meyer u. A.) verbreiten sich über einzelne Punkte, sowie über die mannigfaltigen Anwendungen der Jacobi'schen Theorie.

[3] Ueber die vortheilhafte Benutzung complexer Variabelen bei doppelten Integrationen vergl. Moigno: leçons de calcul différentiel et de calcul intégral (Paris 1844), tome II., 21me leçon.

[4] Weitere Ausführungen geben des Verfassers „Analytische Studien," 2ter Band.

[5] Die Transformationen vielfacher Integrale durch Substitution neuer Variabelen findet sich recht gut dargestellt in Moigno's leçons de calcul intégral, S. 205 — 301; die originelle Reduktionsmethode von Dirichlet (Abhandlungen der Berliner Akademie aus dem Jahre 1839, erschienen 1841) hat der Verfasser im ersten Bande seiner „Analyt. Studien" auseinandergesetzt und im zweiten Bande erweitert.

---

[1]) Ueber die Differenzialgleichung der elliptischen Funktionen sehe man Richelot's elegante Arbeit in Crelle's Journal, Bd. XXXXIV., 4tes Heft.

[2]) Eine Reihe von Beispielen der Integration verschiedener theils linearer, theils nichtlinearer Differenzialgleichungen giebt Moigno, page 652 etc. seiner leçons.

[3]) Die Integration durch bestimmte Integrale ist zuerst von Euler (Institutiones calculi integralis, Vol. II., Capp. X. et XI.) und Laplace (théorie analytique des probabilités, Chap. II.) ausgeführt worden; weitere Anwendungen desselben Prinzipes geben Lobatto in Crelle's Journal, Bd. XVII., S. 363, und Petzval: „Integration der linearen Differenzialgleichungen," Wien 1851; Letzterer hauptsächlich, um aus einer partikulären Auflösung das allgemeine Integral zu finden.

[4]) Man sehe hierüber Euler's institut. calculi integr. tom. III., wo sich viele Beispiele, aber nicht nach einer und derselben Methode behandelt, finden; die Zurückführung der partiellen Differenzialgleichungen auf gewöhnliche Differenzialgleichungen hat zuerst Lagrange gezeigt (Mém. de l'Acad. de Berlin, 1774, page 253; 1779, p. 152 und 1789, p. 174, endlich théorie des fonctions analytiques, Nro. 101). Derselbe Gedanke der Reduktion liegt auch den Untersuchungen von Pfaff in den Abhandlungen der Berliner Akademie von 1814 und 1815

(erschienen 1818) zu Grunde; weitere und tiefere Untersuchungen darüber geben mehrere Aufsätze von Jacobi in Crelle's Journal (Bd. II., S. 317 und 347, Bd. XVII., S. 97 und Bd. XXIII., S. 1). Ueber die geometrische Bedeutung partieller Differenzialgleichungen findet man schöne Betrachtungen in der Application de l'Analyse à la Géometrie von Monge.

Einleitung.

I. Begriff der Funktion.

In der gesammten höheren Analysis unterscheidet man zweierlei Arten von Zahlen: Constanten und Variabelen; die ersteren sind unveränderlich, d. h. sie behalten in jeder vorzunehmenden analytischen Betrachtung die ihnen einmal ertheilten Werthe, die Variabelen dagegen sind veränderlich und können jeden beliebigen speciellen Werth annehmen. Um diesen wesentlichen Unterschied auch in der Bezeichnung hervorzuheben, pflegt man die Constanten durch die ersten, die Variabelen dagegen durch die letzten Buchstaben des Alphabetes zu bezeichnen.

Was nun die Art und Weise betrifft, wie sich eine Variabele ändert, so sind hier zwei Fälle möglich. Hat nämlich die Variabele x einmal den Spezialwerth $x = a$ besessen und nachher den Werth $x = b$ angenommen, so kann man sich entweder vorstellen, dass der Uebergang von a nach b plötzlich und ohne Berücksichtigung der zwischen a und b einschaltbaren Werthe geschehen sei, oder man denkt sich, dass die Variabele x von a ausgehend alle Zwischenstufen von a bis b durchlaufen habe und zwar auf ähnliche Weise, wie ein geradlinig fortbewegter Körper über alle zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkte seiner Bewegung liegenden Stellen hinweggegangen ist; im ersteren Falle heisst der Uebergang ein sprungweiser oder discontinuirlicher, im zweiten ein stetiger oder continuirlicher. Welche Variabelen als stetig und welche als sprungweis veränderliche anzusehen sind, das bedarf in jedem Falle einer besonderen Untersuchung.

Sind zwei veränderliche Zahlen x und y durch eine Gleichung verbunden, wie z. B. in

$$y = 5x^2 + 3,$$

so entspricht jedem willkürlich angenommenen Werthe des x ein aus der Gleichung selbst folgender Werth des y, welcher eben deshalb nicht willkürlich ist; in diesem Falle heisst x die unabhängige und y die abhängige Variabele, und um anzudeuten, dass es eben x ist, wovon y abhängt, nennt man y eine Funktion von x, was man in Zeichen durch eine Gleichung von der Form

$$y = F(x), \text{ oder } y = f(x),\ y = \varphi(x) \text{ und dergl.}$$

auszudrücken pflegt; eine derartige Gleichung sagt also nichts weiter, als dass jedem willkürlichen Werthe des x ein bestimmter Werth des y zugehört, gleichgültig, wo der letztere hergekommen ist. In ähnlicher Weise würde eine Gleichung von der Form

$$z = \psi(x, y)$$

bedeuten, dass zwei unabhängige Veränderliche x und y vorhanden sind, von denen eine dritte Variabele z abhängt, wie z. B., wenn $z = ax + by^2$ wäre; in demselben Sinne, wie hier z als Funktion zweier unabhängigen Variabelen erscheint, kann man auch Funktionen von drei oder überhaupt beliebig vielen Variabelen bilden.

Für alle solche Funktionen gilt noch die Bemerkung, dass die unabhängigen Variabelen jederzeit als stetig veränderlich betrachtet werden; ob es auch die abhängige Variabele ist, entscheidet die Natur der Funktion, wie sich nachher (in IV.) zeigen wird.

II. Die einfachen Funktionen.

Die niedere Arithmetik und die Geometrie mit Einschluss der Trigonometrie bieten schon die Mittel zur Bildung von einigen Funktionen, welche wir vorzugsweise einfache Funktionen nennen. Sieht man in der Potenz a^b die Grundzahl a als Variabele und den Exponenten b als Constante an, so entsteht die Funktion x^b, welche in der Analysis den Namen Potenz ausschliesslich führt; umgekehrt liefert die Annahme einer constanten Basis und eines veränderlichen Exponenten die Funktion a^x, der man den Namen Exponenzialgrösse gegeben hat. Denkt man sich ferner die Logarithmen als Funktionen der Zahlen, so hat man noch die Funktion ${}^a\!\log x$, wobei das oben angesetzte a die Basis des logarithmischen Systemes bezeichnen soll.

Es ist ferner aus der Geometrie bekannt, dass sich jeder Bogen eines mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreises in Theilen des

Halbmessers, mithin in blossen Zahlen ausdrücken lässt, und man kann daher jede Zahl auch als Maass eines Kreisbogens ansehen; denkt man sich die goniometrischen Linien desselben construirt und ebenfalls in Theilen des Halbmessers angegeben, so entspricht in diesem Sinne jeder Zahl x ein Sinus, Cosinus etc.; so ist z. B.

$$\sin (1{,}570796\ ..) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos (1{,}047197\ ..) = \cos \frac{\pi}{3} = 0{,}5$$

und es entstehen so die goniometrischen Funktionen der Zahl x, nämlich $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$.

Man kann aber auch umgekehrt die Zahl x als das Maass einer trigonometrischen Linie betrachten und den zugehörigen Bogen aufsuchen. Sehen wir x als die Länge eines Sinus an, so entspricht demselben ein bestimmter Bogen des ersten Quadranten; dieser Bogen möge mit $\operatorname{Arcsin} x$ bezeichnet und positiv oder negativ genommen werden, je nachdem x positiv oder negativ ist. Nach dieser an keiner Vieldeutigkeit leidenden Bezeichnung ist z. B.

$$\operatorname{Arcsin} (+\tfrac{1}{2}) = +\frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{Arcsin} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Ebenso bedeutet $\operatorname{Arccos} x$ den kleinsten zu x, als Cosinus betrachtet, gehörigen Bogen; man hat zugleich:

$$\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x$$

und vermöge dieser sehr einfachen Beziehung zwischen $\operatorname{Arcsin} x$ und $\operatorname{Arccos} x$, die sich auch als Definition von $\operatorname{Arccos} x$ benutzen liesse, pflegt man nur in seltenen Fällen die letztere Funktion zu benutzen. — Analog dem Obigen bezeichnet $\operatorname{Arctan} x$ den Bogen des ersten Quadranten, dessen Tangente $= x$ ist, und zwar wird derselbe mit demselben Vorzeichen wie x genommen; für die entsprechende Funktion $\operatorname{Arccot} x$ hat man:

$$\operatorname{Arccot} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x.$$

Auf gleiche Weise kann man endlich noch die Funktionen $\operatorname{Arcsec} x$ und $\operatorname{Arccosec} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsec} x$ bilden, doch sind dieselben wenig in Gebrauch.

III. Die geometrische Darstellung der Funktionen.

Mit Hülfe der analytischen Geometrie ist es nicht schwer, sich ein Bild von jeder gegebenen Funktion zu verschaffen, wenn letztere eine oder höchstens zwei unabhängige Variabele enthält; man hat zu diesem Zwecke nur nöthig, die vorkommenden Variabelen als Coordinaten eines veränderlichen Punktes und die zwischen den Variabelen bestehende Gleichung als Gleichung einer Linie oder einer Fläche anzusehen. Bei zwei Variabelen x und y, welche durch eine Gleichung von der Form

$$y = f(x)$$

verbunden sind, betrachtet man die unabhängige Variabele x als Abscisse, die abhängige Variabele y als rechtwinklige Ordinate und die Gleichung selbst als Gleichung einer ebenen Linie, von der sich jetzt beliebig viele Punkte bestimmen lassen, indem man dem x willkürliche Werthe ertheilt und die zugehörigen Werthe des y berechnet und construirt. So würde z. B. $y = ax + b$ eine Gerade, $y = x^2$ eine Parabel repräsentiren.

Bei drei Variabelen, zwischen denen eine Gleichung von der Form

$$z = F(x, y)$$

stattfindet, nimmt man x, y und z als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im Raume an; zwei derselben, x und y, sind willkürlich und bestimmen einen beliebigen Punkt der Coordinatenebene xy; senkrecht über diesem liegt der Punkt xyz, dessen Entfernung z von der Ebene xy die abhängige Variabele z ist. So entsprechen allen Punkten xy der Coordinatenebene xy Punkte im Raume, die in ihrer Aufeinanderfolge eine Fläche bilden; die obige Gleichung ist dann die Gleichung dieser Fläche. Die geometrische Darstellung der Gleichung $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ z. B. giebt eine Ebene, die der Gleichung $z = x^2 + y^2$ ein Rotationsparaboloid u. s. w.

Sind vier oder mehr Variabele vorhanden, so dass eine Funktion von drei oder mehr unabhängigen Veränderlichen gebildet ist, so hört die Möglichkeit einer geometrischen Darstellung auf, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil der Raum nur drei Dimensionen besitzt.

IV. Die Continuität und Discontinuität der Funktionen.

Wie bereits erwähnt wurde, gelten die unabhängigen Variabelen jederzeit als stetig veränderlich, aber es bedarf noch einer Untersuchung, ob auch den abhängigen Variabelen dieselbe Eigenschaft der Continuität zukommt. Denken wir uns, um die Frage schärfer auszudrücken, dass x sich stetig von $x = a$ bis $x = b$ geändert habe und dass dem Werthe $x = a$ der Werth $y = \alpha$, ebenso dem Werthe $x = b$ der Werth $y = \beta$ entspreche, so würde eine stetige Aenderung des y vorhanden sein, wenn der Uebergang von $y = \alpha$ bis $y = \beta$ mit Durchlaufung aller zwischen α und β einschaltbaren Zwischenstufen geschehen wäre, eine discontinuirliche Aenderung dagegen, wenn es Zahlen zwischen α und β giebt, welche nicht als Zwischenwerthe der Variabelen y erscheinen. Dies ist leicht geometrisch zu versinnlichen; besteht die Curve HK aus einem ununterbrochenen Zuge (Fig. 1), und sind $AH = OC$ und $BK = OD$ die Ordinaten, welche den Abscissen OA und OB entsprechen, so erscheint jede zwischen OC und OD beliebig eingeschaltete Linie ON auch als Zwischenordinate MP der Curve, weil eine durch N gehende Parallele zu OX den ununterbrochenen Zug HK nothwendig in einem Punkte P schneiden muss. Bei einem unterbrochenen

Fig. 1.

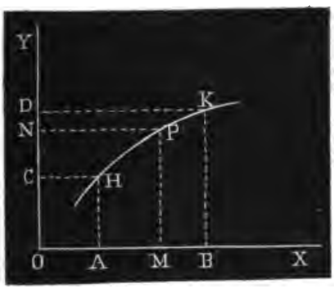
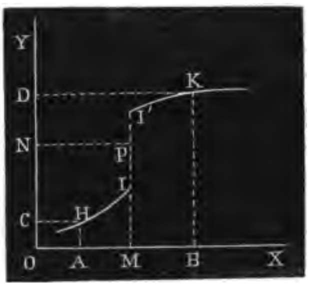


Fig. 2.



Zuge dagegen (Fig. 2) giebt es eine Menge zwischen OC und OD eingelegter Strecken, wie z. B. ON, welche nicht als Zwischenordinaten vorkommen, weil die Gerade $NP \parallel OX$ den Zug HK nicht trifft; hier findet eine Discontinuität statt und zwar an der Stelle $x = OM$, indem die Ordinate sprungweis von MI auf MI' übergeht. Man sieht zugleich, dass der speziellen Abscisse OM, die ξ heissen möge, plötzlich zwei Ordinaten zugehören, während ausserdem jeder Abscisse nur eine Ordinate entspricht; jene Ordinaten unterscheiden sich insofern, als die erste MI die bisherige Reihe der Ordinaten beschliesst, und die zweite MI' eine neue Reihe anfängt. Ist $y = f(x)$ die Gleichung der betrachteten Curve, so lässt sich jener Unterschied dadurch hervorheben, dass man MI mit $f(\xi - 0)$ und MI' mit $f(\xi + 0)$ bezeichnet. Man wird diese Bezeichnung sehr passend finden, wenn man berücksichtigt, dass jedes $x < \xi$ durch $x = \xi - \varepsilon$ und jedes $x > \xi$ durch $x = \xi + \delta$ dargestellt werden kann und dass mithin $\xi - 0$ und $f(\xi - 0)$ die Coordinaten des Endpunktes I, so wie $\xi + 0$ und $f(\xi + 0)$ die Coordinaten des Anfangspunktes I' bezeichnen müssen. Demgemäss kann man sagen: eine Funktion ändert sich an der Stelle $x = \xi$ continuirlich, wenn $f(\xi - 0) = f(\xi + 0)$, dagegen discontinuirlich, wenn $f(\xi - 0)$ von $f(\xi + 0)$ verschieden ist; oder nach einer genaueren Fassung:

die Funktion $f(x)$ bleibt an der Stelle $x = \xi$ continuirlich oder erleidet daselbst eine Unterbrechung der Stetigkeit, je nachdem die Differenz

$$f(\xi + \delta) - f(\xi - \varepsilon)$$

mit δ und ε gleichzeitig verschwindet oder nicht.

So ist z. B. die Funktion $y = \frac{1}{(1-x)^2}$ discontinuirlich an der Stelle $x = 1$; denn man hat

$$f(1+\delta) - f(1-\varepsilon) = \frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\varepsilon^2},$$

woraus für $\delta = 0$ und $\varepsilon = 0$ folgen würde $f(1+0) - f(1-0) = \infty - \infty$; die rechter Hand befindliche Differenz kann aber alles Mögliche bedeuten, weil δ und ε auf beliebige Weise in Null übergeführt werden können; setzt man z. B.

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+k\varepsilon^2}},$$

wo k eine beliebige positive Grösse bezeichnet, so wird

$$f\left(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+k\varepsilon^2}}\right) - f(1-\varepsilon) = k$$

und folglich für $\varepsilon = 0$

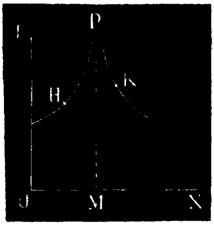
$$f(1+0) - f(1-0) = k,$$

woraus unmittelbar die Discontinuität der fraglichen Funktion folgt. Diese bestätigt sich auch geometrisch, denn die Curve, deren Gleichung $y = \frac{1}{(1-x)^2}$ ist, besteht aus zwei congruenten, abgesonder-

Dieser Ausdruck wird erhalten wenn man
$\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} = k$ setzt und daraus k

ten Zügen (Fig. 3), welche die in der Entfernung $OM = 1$ parallel zur Ordinatenachse gehende Gerade MP zur gemeinschaftlichen Asymptote haben; sollte nun ein stetiger Uebergang von einem Punkte H des ersten Zweiges nach einem Punkte K des anderen Zweiges bewerkstelligt werden, so wäre die zwischenliegende Gerade MP nothwendig zu durchkreuzen; einen solchen Durchschnitt bildet aber die Curve nicht. — Nach diesen Bemerkungen wird man sich auch leicht überzeugen, dass eine Funktion jedesmal eine Unterbrechung der Continuität erleidet, wenn sie für einen speziellen Werth von x, etwa $x = \xi$, unendlich wird, dagegen für $x < \xi$ und für $x > \xi$ endliche Werthe besitzt.

Fig. 3.



Diese Erörterungen lassen sich ohne Mühe auf Funktionen mehrerer Variabelen übertragen; bei Funktionen von zwei Variabelen insbesondere wird die Bemerkung von Nutzen sein, dass eine stetig gekrümmte Fläche mit jeder Vertikalebene eine stetig verlaufende Durchschnittslinie bilden muss.

V. Die Steigungsverhältnisse der Funktionen.

Schon die oberflächlichste Ansicht verschiedener Curven zeigt sehr mannigfaltige Arten der Ordinatenveränderung; während z. B. die Ordinaten der Parabel fortwährend zunehmen, die Curve also immer steigt, findet in der Sinuslinie ($y = \sin x$) ein Wechsel von Zu- und Abnahme statt; ja selbst bei Curven, welche sich in Beziehung auf Wachsthum oder Abnahme der Ordinaten ähneln, kann die Art und Weise, wie diese Veränderung geschieht, noch sehr verschieden sein. So z. B. steigen die beiden Parabeln $y = \sqrt{x}$ und $y = x^2$ gleichzeitig, man wird aber von der zweiten sagen, dass sie rascher als die erste steigt, auch findet noch insofern eine wesentliche Differenz statt, als die erste Parabel der Abscissenachse die hohle Seite, die zweite Parabel dagegen ihr die convexe Seite zukehrt. Um nun jenen noch unbestimmten Begriff der Geschwindigkeit des Wachsthums näher zu fixiren, betrachten wir vorerst die Gerade, deren Gleichung $y = ax + b$ sein möge. Von dieser ist unmittelbar klar, dass ihre Steigung immer dieselbe bleibt, und man wird das Maass dieser Steigung am einfachsten dadurch ausdrücken, dass man angiebt, um wieviel die Ordinate y wächst, wenn die Abscisse x um die Einheit zunimmt, wie dies schon bei den Angaben über die Steigungen von Strassen geschieht. Nehmen wir in Fig. 4 $OM = x$, $MP = y$, $MN = PR = 1$, so ist die neue Ordinate NQ um QR grösser, als die frühere, und das Verhältniss $\frac{QR}{PR}$ möge hier das Steigungsmaass oder kurz die Steigung heissen. Ihre Grösse bestimmt sich aus der Bemerkung, dass QR die lineare Tangente des Winkels $QPR = OST$, den wir τ nennen wollen, und dass andererseits vermöge bekannter Lehren der analytischen Geometrie $\tan \tau = a$ ist; somit ergiebt sich $a = \tan \tau$ als Steigung der Geraden $y = ax + b$, und es ist diese Steigung in der That überall dieselbe, d. h. unabhängig von x.

Fig. 4.

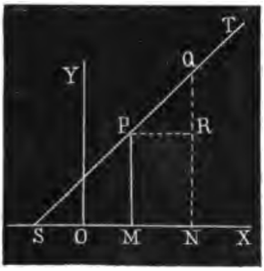
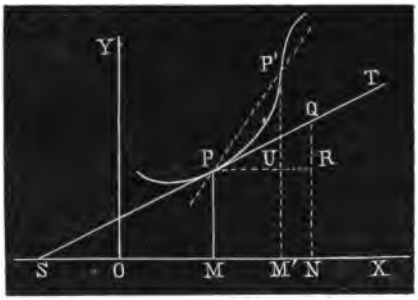


Fig. 5.



Denken wir uns ferner eine Curve dadurch entstanden, dass sich ein Punkt stetig fortbewegt und dabei unausgesetzt seine Richtung ändert, so darf man sagen, dass die augenblickliche Richtung desselben jederzeit durch die zugehörige Tangente an der Curve dargestellt wird. Es sei nun ST (Fig. 5) die Tangente der Curve im Punkte P und die vorige Construction auf diese Tangente angewandt, so ist QR offenbar die Zunahme der Ordinate MP, welche der Zunahme $MN = 1$ der Abscisse entsprechen würde, wenn die Curve von P aus in der Richtung ihrer Tangente verliefe, also in die gleichmässig steigende Gerade PT überginge. Nennen wir wiederum $\frac{QR}{PR}$ die Steigung der Curve, so ist dieselbe nunmehr nichts weiter, als die trigonometrische Tangente des Winkels τ zwischen der berührenden Geraden und der Abscissenachse, den wir kurz den Berührungswinkel nennen wollen. Die Aufgabe wäre also, den Werth jenes Verhältnisses oder $\tan \tau$ zu bestimmen, und sie ist einerlei mit dem vielfach behandelten Problem der Construction von Tangenten an gegebene Curven. In der That bestimmen auch die verschiedenen Lagen der Tangenten, ob eine Curve zu- oder abnimmt, ob sie langsamer oder rascher als eine andere Linie wächst und dergl., wovon man sich schon durch eine nach dem Augenmaasse entworfene Construction der Tangenten an verschiedene Punkte einer Curve überzeugen wird.

Zur Kenntniss von $\tan\tau$ führt die Bemerkung, dass eine Gerade, die zwei Punkte einer Curve verbindet, also eine Sekante, zur Tangente wird, sobald die beiden verbundenen Punkte zusammenrücken und in einander fallen; demgemäss verbinden wir die beiden beliebigen Punkte P und P' der Curve, bestimmen zunächst die Lage der Sekante PP' und hieraus die Lage der Tangente PT, indem wir P' mit P zusammenfallen oder die Strecke MM', welche δ heissen möge, in Null übergehen lassen. Ist $y = f(x)$ die Gleichung der Curve, so haben wir

$$\tan P'PU = \frac{P'U}{PU} = \frac{M'P' - MP}{MM'} = \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

und wenn $\delta = 0$ wird, so geht der Winkel $P'PU$ in $TPU = \tau$ über; wollte man aber auch rechter Hand ohne Weiteres $\delta = 0$ setzen, so würde das unbestimmte und nichtssagende Resultat $\frac{0}{0}$ zum Vorschein kommen; man thut daher besser, nur anzudeuten, dass schliesslich $\delta = 0$ werden soll, also zu schreiben

$$1)\qquad \tan\tau = \left[\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}\right]_{(\delta = 0)}$$

In jedem speziellen Falle bedarf es nun einer besonderen Ausführung der rechter Hand angedeuteten Operationen; für $f(x) = x^2$ z. B. wäre der eingeklammerte Quotient:

$$\frac{(x+\delta)^2 - x^2}{\delta} = 2x + \delta,$$

mithin $\tan\tau = 2x$; für $f(x) = \sqrt{x}$ ist jener Quotient:

$$\frac{\sqrt{x+\delta} - \sqrt{x}}{\delta} = \frac{(x+\delta) - x}{\delta\,[\sqrt{x+\delta} + \sqrt{x}\,]} = \frac{1}{\sqrt{x+\delta} + \sqrt{x}}$$

mithin $\tan\tau = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Aus diesen Beispielen ersieht man hinreichend den Gebrauch der Formel 1), welche zwar nicht geradezu ein fertiges Resultat angiebt, wohl aber den Weg zeigt, auf welchem ein solches gefunden wird.

Wir haben in dem Obigen stillschweigend vorausgesetzt, dass δ ganz beliebig, d. h. eine unabhängige Variabele sei, und es ist dann allerdings kein Zweifel, dass auch $\delta = 0$ gesetzt werden darf;

dies würde jedoch so unmittelbar nicht mehr gelten, wenn δ abhängig ist, wie es später häufig der Fall sein wird. Wäre z. B. $\delta = \frac{1}{m}$ oder $\delta = \sqrt[m]{2} - 1$, wo m eine beliebige Zahl bezeichnet, so kann man δ nicht schlechtweg zu Null machen, wohl aber der Null beliebig nahe bringen, indem man m ins Unendliche wachsen lässt. Um auch für diesen Fall zu sorgen, sagen wir, „δ habe die Null zur Grenze", und verstehen darunter, dass entweder δ die Null erreicht, ohne sie zu überschreiten, oder dass δ der Null so nahe kommen kann, als es nur verlangt wird; im ersten Falle ist die Grenze eine erreichbare, im zweiten Falle eine (durch Rechnung) unerreichbare, trotzdem aber ebenso gewiss vorhandene. In diesem Sinne bildet die Lage der Tangente PT die Grenze für die verschiedenen Lagen, welche die Sekante PP' bei abnehmendem δ bekommt, ebenso ist τ die Grenze des Winkels $P'PU$, endlich $\tan\tau$ die Grenze des Quotienten $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$. Benutzen wir die Sylbe *Lim* zur Bezeichnung einer Grenze, so lassen sich diese Bemerkungen durch die Gleichungen $Lim\,\delta = 0$, $\tau = Lim(\angle P'PU)$,

$$2)\qquad \tan\tau = Lim\,\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$$

darstellen; dieser genaueren, auf alle Fälle passenden Ausdrucksweise werden wir uns künftig immer bedienen.

DIFFERENZIALRECHNUNG.

Cap. I.

Grundbegriffe der Differenzialrechnung. Differenziation der einfachen Funktionen.

§. 1.

Differenzen und Differenziale.

Zufolge unserer einleitenden Betrachtungen ist es der Quotient

$$1)\qquad \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$$

dessen Grenzwerth eine wichtige Rolle bei den Fragen nach dem Wachsthum und der Abnahme der Funktionen spielt und der zugleich eine geometrische Bedeutung gewinnt, wenn die Gleichung $y=f(x)$ als Gleichung einer ebenen Curve betrachtet wird. Das häufige Vorkommen jenes Grenzwerthes macht nun zunächst eine möglichst kurze Bezeichnung desselben nöthig, und man ist daher übereingekommen, denselben mit $f'(x)$ zu bezeichnen, so dass also die Gleichung

$$2)\qquad f'(x)=Lim\,\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$$

die Definition des Symboles $f'(x)$ enthält. So ist z. B. für $f(x) = ax+b$, $f'(x)=a$, ferner für $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$, für $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ u. s. w., und man nennt hierbei $f'(x)$ die abgeleitete oder derivirte Funktion im Gegensatze zu der ursprünglichen Funktion $f(x)$.

Eine andere Symbolik ist aus der Bemerkung entstanden, dass die in Nro. 1) vorkommende Grösse δ, der Zuwachs des x, als der Unterschied zweier verschiedenen Werthe des x, nämlich des neuen Werthes $x+\delta$ und des früheren Werthes x, angesehen werden darf; bezeichnet man nun überhaupt jede beliebige Differenz mit Δ, so würde die Differenz zweier verschiedenen Werthe des x mit Δ_x oder Δx zu bezeichnen sein, wobei man sich nur zu hüten hat, Δx für ein Produkt anzusehen. Dem entsprechend würde Δy die Differenz der beiden verschiedenen Werthe des y sein, von denen der eine dem x, der andere dem $x + \Delta x$ entspricht; vermöge der Gleichung $y = f(x)$ ist dieses $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ und mithin

$$3)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Geht Δx in Null über und ebenso auch Δy, so wird hieraus

$$4)\qquad Lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

um jedoch die beständige Wiederholung der Sylbe *Lim* zu ersparen, schreibt man $\frac{dy}{dx}$ statt $Lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$, also

$$5)\qquad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

und hier bedeuten dy und dx Differenzen, auf welchen die Bedingung ruht, in Null überzugehen; derartige Differenzen heissen Differenziale und sind demnach nichts weiter als Differenzen, welche die Null zur Grenze haben. Die Gleichung 5) spricht die Gleichheit des Differenzialquotienten und der derivirten Funktion aus; eine Verschiedenheit besteht nur in der Schreibweise; rechts sind die in dem Ausdrucke

$$Lim \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta}$$

postulirten Rechnungsoperationen ausgeführt, links bloss angedeutet, ähnlich wie in $\sqrt{9} = 3$ und dergleichen.

Da nach dem Vorigen der Differenzialquotient die Grenze des Differenzenquotienten ist, so sind beide so lange verschieden, als die Differenzen endliche Werthe haben; nennen wir ϱ den Unterschied zwischen beiden Quotienten, nämlich

$$6)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx} = \varrho,$$

so folgt umgekehrt

$$\Delta y = \left(\frac{dy}{dx} + \varrho\right) \Delta x$$

oder wenn man die Gleichung 5) zu Hülfe nimmt

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \varrho \Delta x.$$

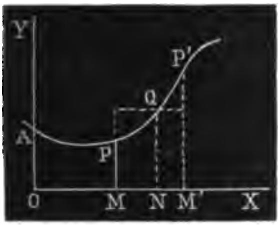
Lassen wir Δx und Δy wieder in Null übergehen, d. h. zu Differenzialen werden, so verschwindet ϱ, wie man aus Nro. 6) sogleich erkennt, und es bleibt

$$7) \qquad dy = f'(x)\,dx,$$

d. h. je kleiner die Aenderung dx von x ist, um so genauer ist die Aenderung dy von y gleich dem Produkte $f'(x)\,dx$, was man leicht geometrisch und ebenso an den gegebenen Beispielen prüfen kann. Die Differenzialgleichung 7) giebt übrigens, verglichen mit Nro. 5), zu erkennen, dass man mit den veränderlichen, der Grenze Null zueilenden Grössen dx und dy ebenso multiplicirt und dividirt, als wären sie bestimmte Zahlen, und hierin besteht ein nicht geringer Vortheil der obigen Bezeichnung.

An diese Erörterung über die Begriffe und Bezeichnungen der Differenzialrechnung schliesst sich naturgemäss die wirkliche Ausführung der angedeuteten Operationen, indem man an die Stelle von $f(x)$ die einfachen und zusammengesetzteren Funktionen treten lässt. Bevor wir dazu schreiten, wollen wir noch einen Blick auf die geometrische Bedeutung von $f'(x)$ werfen; diese ist nämlich verschieden, je nachdem man der ursprünglichen Funktion $f(x)$ den einen oder anderen Sinn unterlegt. Man hat in Beziehung hierauf eine dreifache Wahl; denken wir uns x immer als Abscisse, so kann $f(x)$ entweder eine Curvenordinate, also eine Linie wie x selbst, bedeuten oder eine Fläche oder endlich ein Volumen. Für den ersten Fall wissen wir bereits aus der Einleitung, dass $f'(x) = \tan\tau$ ist, und wir haben daher noch die beiden anderen Fälle zu erörtern.

Fig. 6.



Sei in Figur 6 $OM = x$, $MP = \varphi(x)$, die über der Abscisse x stehende Fläche $AOMP = f(x)$ und $MM' = \Delta x$, so ist

$f(x+\Delta x) - f(x) =$ Fläche $MM'P'P$.

Diese Fläche darf man sich als ein Rechteck denken, welches Δx zur Grundlinie und eine zwischen MP und $M'P'$ liegende Ordinate NQ zur Höhe hat, und man kann demnach $MM'P'P = NQ \,.\, \Delta x$ setzen; hieraus folgt

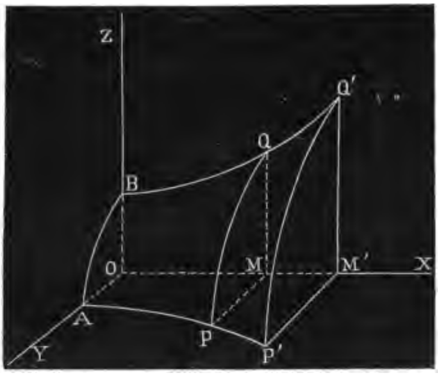
$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = NQ,$$

für $\Delta x = 0$ fallen die drei Ordinaten $M'P'$, NQ und MP in eine einzige, nämlich MP, zusammen, und es bleibt

$$f'(x) = MP = \varphi(x).$$

Die derivirte Funktion bedeutet hier also geometrisch die begrenzende Ordinate.

Fig. 7.



Denken wir uns in Fig. 7 OM als x, die Fläche MPQ als den zu x gehörenden Querschnitt, der $\psi(x)$ heissen möge, und das Volumen $AOBQMP$ als Funktion $f(x)$ von x, so ist für $MM' = \Delta x$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \text{Vol. } MPQQ'P'M'.$$

Diese Schicht lässt sich einem Cylinder vergleichen, der Δx zur Höhe (oder Dicke) und einen zwischen beiden Querschnitten MPQ und $M'P'Q'$ eingeschalteten Querschnitt zur Basis hat; nennen wir q diesen mittleren Querschnitt, so ist das Volumen $MPQQ'P'M' = q \,.\, \Delta x$; folglich

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = q.$$

Für $\Delta x = 0$ fallen die Querschnitte $M'P'Q'$, q und $MPQ = \psi(x)$ zusammen und es bleibt:

$$f'(x) = MPQ = \psi(x).$$

Man kann demnach folgende Sätze aussprechen:

Der Differenzialquotient eines Volumens ist sein letzter Querschnitt, der Differenzialquotient einer ebenen Fläche ihre letzte Ordinate und der Differenzialquotient einer Curvenordinate die trigonometrische Tangente des Berührungswinkels,

wobei die unabhängige Variabele immer als Abscisse angesehen wird.

§. 2.

Differenziation der Potenz.

Setzen wir den Exponenten der Potenz zunächst als ganze positive Zahl m voraus, so zieht die Gleichung

1) $$y = x^m,$$

die folgende nach sich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{(x + \Delta x) - x},$$

auf welche sich der bekannte Satz

$$\frac{a^m - b^m}{a - b}$$

$$= a^{m-1} + a^{m-2}\,b + a^{m-3}\,b^2 + \ldots + a\,b^{m-2} + b^{m-1}$$

für $a = x + \Delta x$ und $b = x$ unmittelbar anwenden lässt; man findet so

$$\frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x}$$

$$= (x + \Delta x)^{m-1} + (x + \Delta x)^{m-2}\,x + \ldots . + x^{m-1}$$

und, wenn man Δx in Null übergehen lässt,

$$2) \qquad Lim \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = m\,x^{m-1},$$

d. i. nach dem Begriffe des Differenzialquotienten

$$3) \quad \frac{dy}{dx} = m x^{m-1} \text{ oder } \frac{d\,(x^m)}{dx} = m x^{m-1}.$$

Ist zweitens der Exponent ein positiver Bruch $\frac{p}{q}$, so folgt aus

$$4) \qquad y = x^{\frac{p}{q}},$$

durch beiderseitige Potenzirung

$$y^q = x^p;$$

ferner, wenn sich x und y um Δx und Δy ändern,

$$(y + \Delta y)^q - y^q = (x + \Delta x)^p - x^p,$$

dividirt man beiderseits mit Δx, so lässt sich dies folgendermaassen darstellen:

$$\frac{(y + \Delta y)^q - y^q}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^p - x^p}{\Delta x}.$$

Der Grenzenübergang giebt hier, mit Rücksicht auf Nro. 2), weil p und q ganze positive Zahlen sind,

$$q y^{q-1} \cdot \frac{dy}{dx} = p x^{p-1}$$

und durch Reduktion auf $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}\,\frac{y^{q-1}}{x^{p-1}}.$$

Setzt man noch für y seinen Werth aus Nro. 4), so wird

$$5)\qquad \frac{d\left(x^{\frac{p}{q}}\right)}{dx}=\frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Die Formeln 3) und 5) lassen sich jetzt so zusammenfassen, dass man sagt, für jedes positive und rationale λ ist

$$6)\qquad \frac{d(x^\lambda)}{dx}=\lambda x^{\lambda-1}.$$

Nimmt man für λ der Reihe nach Brüche, die sich einer irrationalen positiven Zahl nähern (wie z. B. 1,7 dann 1,73 u. s. f. der Wurzel $\sqrt{3}$), so hört die obige Gleichung nie zu gelten auf und muss demnach für jedes irrationale λ richtig bleiben; ihre Gültigkeit erstreckt sich nun auf alle positiven λ.

Besitzt die Potenz einen negativen Exponenten, ist also

$$7)\qquad y=x^{-\lambda}=\frac{1}{x^\lambda},$$

so hat man nach kleiner Reduktion

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x^\lambda-(x+\Delta x)^\lambda}{(x+\Delta x)^\lambda\, x^\lambda\,.\,\Delta x}$$

$$=-\frac{(x+\Delta x)^\lambda-x^\lambda}{\Delta x}\cdot\frac{1}{(x+\Delta x)^\lambda\, x^\lambda}$$

und hier ist der erste Faktor rechter Hand nichts Anderes als der Differenzenquotient von x^λ, welcher für $\Delta x=0$ in den Differenzialquotienten $\lambda x^{\lambda-1}$ übergeht; dies giebt

$$\frac{dy}{dx}=-\lambda x^{\lambda-1}\cdot\frac{1}{x^\lambda\, x^\lambda}$$

oder vermöge der Bedeutung von y

$$\frac{d(x^{-\lambda})}{dx}=(-\lambda)\,x^{-\lambda-1}.$$

Vereinigt man diese Formel mit der unter 6) verzeichneten, so ist jetzt für jeden beliebigen Exponenten μ

$$8)\qquad \frac{d(x^\mu)}{dx}=\mu x^{\mu-1}\quad\text{und}\quad d(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}\,dx.$$

§. 3.

Differenziation des Logarithmus und der Exponenzialgrösse.

I. Der Differenzenquotient der Funktion ${}^a\!\log x$ ist

$$\frac{{}^a\!\log(x+\varDelta x)-{}^a\!\log x}{\varDelta x}=\frac{{}^a\!\log\left(1+\frac{\varDelta x}{x}\right)}{\varDelta x}.$$

Da es nur auf den Grenzwerth dieses Ausdruckes, nicht aber darauf ankommt, wie $\varDelta x$ in Null übergeführt wird, so steht es frei, sich $\varDelta x$ als aliquoten Theil von x zu denken, also etwa $\varDelta x=\frac{x}{\omega}$ zu setzen und die ganze positive Zahl ω in's Unendliche wachsen zu lassen. Der obige Differenzenquotient wird nun zunächst

$$1)\quad \omega\,\frac{{}^a\!\log\left(1+\frac{1}{\omega}\right)}{x}=\frac{1}{x}\cdot{}^a\!\log\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]$$

und es handelt sich jetzt noch um die Grenze, welcher der Ausdruck $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ bei unendlich wachsendem ω zueilt.

Nehmen wir an, dass in der identischen Gleichung

$$\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b}$$

$$=a^m+a^{m-1}\,b+a^{m-2}\,b^2+\ldots+ab^{m-1}+b^m$$

a die grössere der beiden Zahlen a und b sei, so kommt auf der rechten Seite offenbar zuviel heraus, wenn man überall a statt b setzt; dies giebt

$$\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b}<(m+1)\,a^m$$

oder durch Wegschaffung des Bruches und Transposition aller a enthaltenden Grössen

$$2)\qquad [a-(m+1)\,(a-b)]\,a^m<b^{m+1}.$$

Hieraus folgt für $a=1+\frac{1}{m}$, $b=1+\frac{1}{m+1}$, wodurch der Bedingung $a>b$ genügt ist,

$$3)\qquad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m<\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}.$$

Diese Ungleichung sagt, dass der Ausdruck $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ fortwährend wächst, wenn ω zunimmt. Ferner erhält man aus Nro. 2) für $a = 1 + \frac{1}{2n}$, $b = 1$, und $m = n$

$$\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} < 1 \text{ oder } \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} < 2$$

und durch Erhebung auf's Quadrat

$$\text{4)} \qquad \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4,$$

ferner ist jetzt nach Nro. 3) um so mehr

$$\text{5)} \qquad \left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1} < 4.$$

Die Beziehungen 4) und 5) geben zu erkennen, dass überhaupt immer $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ weniger als die Zahl 4 beträgt, dass folglich jene fortwährende Zunahme des Ausdruckes $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ nicht in's Unendliche gehen kann; es muss demnach ein endlicher Grenzwerth existiren, welchem sich $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ mehr und mehr nähert, und zwar ist derselbe grösser als $\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1} = 2$ und zugleich kleiner als 4. Bezeichnen wir ihn mit e, so dass also

$$\text{6)} \qquad Lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right] = e \qquad (\text{für } \omega = \infty)\ ^{*})$$

---

*) Ihrer Herleitung zufolge gilt die obige Gleichung nur für ganze positive unendlich werdende ω, man kann sie aber leicht auf jedes andere ω ausdehnen. Ist nämlich ω zwar eine positive aber nicht ganze Zahl, so giebt es doch immer zwei auf einander folgende ganze Zahlen m und $n = m + 1$, zwischen denen ω enthalten ist, man hat dann $1 + \frac{1}{m} > 1 + \frac{1}{\omega} > 1 + \frac{1}{n}$, mithin auch

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\omega} > \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\omega}.$$

Zugleich lässt sich ω unter der doppelten Form $m + \alpha$ und $n - \beta$ darstellen, wo α und β echte Brüche bezeichnen; die vorige Ungleichung wird dann die Definition dieser Zahl e ist, so erhalten wir aus Nro. 1) für den Differenzialquotienten des Logarithmus:

$$7) \qquad \frac{d\,({}^a log\, x)}{dx} = \frac{1}{x} \cdot {}^a log\, e.$$

Gewöhnlich giebt man dieser Formel eine andere Gestalt. Denkt man sich nämlich die Zahl e selbst als Basis eines Systemes von Logarithmen und bezeichnet letztere mit einem blossen l, so ist überhaupt $e^{lz} = z$, mithin auch

$$e^{la} = a$$

und wenn man beiderseits die Logarithmen der Basis a nimmt

$$la \cdot {}^a log\, e = {}^a log\, a = 1,$$

woraus umgekehrt

$$8) \qquad {}^a log\, e = \frac{1}{la}$$

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+\alpha} > \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-\beta},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{1 + \frac{\alpha}{m}} > \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega} > \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{1 - \frac{\beta}{n}}.$$

Wächst nun ω unendlich, so nehmen m und n gleichfalls in's Unendliche zu, die Ausdrücke $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ und $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nähern sich der gemeinschaftlichen Grenze e, ferner gehen $\frac{\alpha}{m}$ und $\frac{\beta}{n}$ in Null über, woraus folgt, dass nunmehr für nichtganze positive unendlich werdende ω gleichfalls

$$Lim\left[\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right] = e$$

sein muss. Wäre endlich ω eine negative unendlich werdende (ganze oder nichtganze) Zahl, so kann man $\omega = -(\varrho + 1)$ setzen, wo nun ϱ eine positive unendlich wachsende Zahl ist; man hat aber in diesem Falle

$$\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega} = \left(1 - \frac{1}{\varrho + 1}\right)^{-(\varrho+1)} = \left(1 + \frac{1}{\varrho}\right)^{\varrho}\left(1 + \frac{1}{\varrho}\right).$$

Der Grenzwerth des ersten Faktors ist hier e, der des zweiten die Einheit und man kommt somit auf die Gleichung

$$Lim\left[\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right] = e$$

zurück, welche demnach für ein auf völlig willkürliche Weise unendlich werdendes ω gilt.

folgt; man hat dann statt der Gleichung 7) die folgende

$$9)\qquad \frac{d\,({}^{a}log\; x)}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{la}.$$

Diese Formel wird am einfachsten für $a = e$, nämlich

$$10)\qquad \frac{d\,lx}{dx} = \frac{1}{x} \text{ und } d\,lx = \frac{1}{x}\,dx;$$

man nennt aus diesem Grunde e die Basis der natürlichen Logarithmen, die Logarithmen jeder anderen Grundzahl dagegen künstliche. Der constante Faktor $\frac{1}{la}$, welcher bei der Differenziation künstlicher Logarithmen vorkommt, heisst der Modulus der letzteren und wird gewöhnlich mit M_a bezeichnet.

II. Der Differenzenquotient der Exponenzialgrösse a^x ist

$$11)\qquad \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x\,\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Bei verschwindenden Δx geht $a^{\Delta x}$ in die Einheit und $a^{\Delta x} - 1$ in Null über; setzen wir daher

$$a^{\Delta x} - 1 = \frac{1}{\omega} \text{ mithin } \Delta x = {}^{a}log\left(1 + \frac{1}{\omega}\right),$$

so muss ω in's Unendliche wachsen, wenn Δx der Null näher und näher kommt. Der Differenzialquotient ergiebt sich demnach, wenn man die Grenze des Ausdrucks

$$a^x\,\frac{\frac{1}{\omega}}{{}^{a}log\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)} = a^x\,\frac{1}{{}^{a}log\left[\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right]}$$

für unendlich wachsende ω aufsucht; zufolge der Gleichungen 6) und 8) ist dieselbe

$$a^x \cdot \frac{1}{{}^{a}log\; e} = a^x\, la,$$

mithin haben wir für die Differenziation der Exponenzialgrösse die Formel

$$12)\qquad \frac{d\,(a^x)}{dx} = a^x\, la \text{ oder } d\,(a^x) = a^x\, la\, dx.$$

Am einfachsten wird dieselbe für $a = e$, in welchem Falle man e^x die natürliche Exponenzialgrösse nennt; hier ist

$$13)\qquad \frac{d(e^x)}{dx} = e^x \quad \text{oder} \quad d(e^x) = e^x\,dx,$$

also die derivirte Funktion gleich der ursprünglichen.

§. 4.

Differenziation der goniometrischen Funktionen.

I. Unter Anwendung der bekannten goniometrischen Formel $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)$ findet man augenblicklich, dass der Differenzenquotient des Sinus

$$\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = 2 \cos(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)\,\frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}$$

ist; bezeichnet man $\frac{1}{2}\Delta x$ kurz mit δ, wo nun δ mit Δx gleichzeitig verschwindet, so nimmt jener Quotient die Form an

$$1)\qquad \cos(x+\delta)\,\frac{\sin\delta}{\delta}$$

und es fragt sich, was daraus für $\delta = 0$ wird. Nun ist für einen spitzen Bogen δ immer $\tan\delta > \delta > \sin\delta$, folglich, wenn man überall mit $\sin\delta$ dividirt

$$\frac{1}{\cos\delta} > \frac{\delta}{\sin\delta} > 1$$

und umgekehrt

$$\cos\delta < \frac{\sin\delta}{\delta} < 1;$$

hieraus erkennt man auf der Stelle, dass der Quotient $\frac{\sin\delta}{\delta}$ die Einheit zur Grenze hat, wenn δ in Null übergeht. Dieser Bemerkung zufolge verwandelt sich der unter Nro. 1) verzeichnete Ausdruck (der Differenzenquotient von $\sin x$) in $\cos x \cdot 1$ und es ist daher

$$2)\qquad \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x \quad \text{oder} \quad d(\sin x) = \cos x\,dx.$$

II. Eine ganz gleiche Behandlung gestattet der Cosinus; sein Differenzenquotient ist nämlich

$$\frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -\,2 \sin(x + \tfrac{1}{2}\Delta x)\,\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}$$

$$= -\sin(x+\delta)\,\frac{\sin\delta}{\delta}$$

und hieraus folgt unmittelbar die Differenzialformel

$$3)\qquad \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x \quad \text{oder} \quad d(\cos x) = -\sin x\,dx.$$

III. Für die Sekante hat man zunächst

$$\frac{\sec(x+\Delta x)-\sec x}{\Delta x}=\frac{\cos x-\cos(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)\cos x\,.\,\Delta x}$$

$$=\frac{2\sin(x+\frac{1}{2}\Delta x)\,.\,\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\cos(x+\Delta x)\cos x\,.\,\Delta x}=\frac{\sin(x+\delta)}{\cos(x+2\delta)\cos x}\cdot\frac{\sin\delta}{\delta}$$

und mithin für $\delta=0$, wodurch der Differenzialquotient entsteht

4) $$\frac{d(\sec x)}{dx}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}\text{ oder }d(\sec x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$$

IV. Ganz ähnlich verhält sich die Sache mit der Cosekante; hier ist

$$\frac{\operatorname{cosec}(x+\Delta x)-\operatorname{cosec}x}{\Delta x}=\frac{\sin x-\sin(x+\Delta x)}{\sin(x+\Delta x)\sin x\,.\,\Delta x}$$

$$=\frac{-2\cos(x+\frac{1}{2}\Delta x)\,.\,\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\sin(x+\Delta x)\sin x\,.\,\Delta x}=-\frac{\cos(x+\delta)}{\sin(x+2\delta)\sin x}\cdot\frac{\sin\delta}{\delta}$$

mithin für den Differenzialquotienten

5) $$\frac{d(\operatorname{cosec}x)}{dx}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\text{ und }d(\operatorname{cosec}x)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx.$$

V. Wendet man die bekannte goniometrische Formel

$$\tan A-\tan B=\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}$$

auf den Differenzenquotienten von $\tan x$ an, so stellt sich derselbe unter die Form

$$\frac{\tan(x+\Delta x)-\tan x}{\Delta x}=\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cos x},$$

der Grenzwerth des ersten Faktors ist die Einheit, und zwar aus denselben Gründen, welche für $Lim\,\frac{\sin\delta}{\delta}=1$ angegeben wurden; man hat daher

6) $$\frac{d(\tan x)}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}\text{ und }d(\tan x)=\frac{1}{\cos^2 x}\,dx.$$

VI. Der Differenzenquotient von $\cot x$, giebt durch Benutzung der Formel

$$\cot A-\cot B=-\frac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B},$$

$$\frac{\cot(x+\Delta x)-\cot x}{\Delta x}=-\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\sin(x+\Delta x)\sin x}$$

und liefert das Resultat

7) $$\frac{d\,(\cot x)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ oder } d\,(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x}\,dx,$$
mit welchem sich die Reihe der für goniometrische Funktionen geltenden Differenzialformeln schliesst.

§. 5.
Differenziation der cyklometrischen Funktionen.

I. Zufolge der Definition von $Arcsin\,x$ zieht die Gleichung
$$y = Arcsin\,x$$
die umgekehrte Gleichung nach sich:
$$\sin y = x.$$
Ebenso würde aus der geänderten Gleichung
$$y + \varDelta y = Arcsin\,(x + \varDelta x)$$
die nachstehende folgen:
$$\sin\,(y + \varDelta y) = x + \varDelta x$$
und mittelst dieser Bemerkungen lässt sich der Differenzenquotient von $Arcsin\,x$ in der Form
$$\frac{Arcsin\,(x + \varDelta x) - Arcsin\,x}{\varDelta x} = \frac{\varDelta y}{\sin\,(y + \varDelta y) - \sin y} = \frac{1}{\dfrac{\sin\,(y + \varDelta y) - \sin y}{\varDelta y}}$$
darstellen; der rechter Hand vorkommende Nenner ist der Differenzenquotient von $\sin y$, welcher für $\varDelta y = 0$ in den Differenzialquotienten $\cos y$ übergeht; man hat daher
$$\frac{d\,(Arcsin\,x)}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$
und wegen $\sin y = x$ ist nun

1) $$\frac{d\,(Arcsin\,x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ oder } d\,(Arcsin\,x) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

II. Ein ähnliches Verfahren wäre zur Differenziation von $Arccos\,x$ anwendbar; beachtet man jedoch die Gleichung
$$Arccos\,x = \frac{\pi}{2} - Arcsin\,x,$$
so findet man auf der Stelle
$$\frac{Arccos\,(x + \varDelta x) - Arccos\,x}{\varDelta x} = -\frac{Arcsin\,(x + \varDelta x) - Arcsin\,x}{\varDelta x}$$
und es sind demnach die Differenzenquotienten von $Arccos\,x$ und $Arcsin\,x$ nur in den Vorzeichen verschieden; dasselbe muss nunmehr von dem Differenzialquotienten gelten; so findet man rascher

2) $$\frac{d\,(Arccos\,x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ oder } d\,(Arccos\,x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

III. Für die Funktion $Arctan\,x$ bemerken wir zunächst, dass immer die vier Gleichungen bestehen

$$y = Arctan\,x,\quad tan\,y = x$$
$$y + \Delta y = Arctan\,(x + \Delta x),\quad tan\,(y + \Delta y) = x + \Delta x$$

mittelst deren sich der Differenzenquotient von $Arctan\,x$ folgendermaassen gestaltet

$$\frac{Arctan\,(x+\Delta x) - Arctan\,x}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{tan\,(y+\Delta y) - tan\,y}$$
$$= \frac{1}{\dfrac{tan\,(y+\Delta y) - tan\,y}{\Delta y}}.$$

Der Nenner rechter Hand ist der Differenzenquotient von $tan\,y$ und geht für $\Delta y = 0$ in $\dfrac{1}{cos^2 y} = 1 + tan^2 y$ über, dies giebt

$$\frac{d\,(Arctan\,x)}{dx} = \frac{1}{1 + tan^2 y}$$

oder vermöge der Gleichung $tan\,y = x$,

3) $$\frac{d\,(Arctan\,x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \text{ und } d\,(Arctan\,x) = \frac{dx}{1+x^2}.$$

IV. Die Differenziation von $Arccot\,x$ lässt sich mittelst der Formel

$$Arccot\,x = \frac{\pi}{2} - Arctan\,x$$

auf die von $Arctan\,x$ zurückführen; man findet

4) $$\frac{d\,(Arccot\,x)}{dx} = -\frac{1}{1+x^2} \text{ und } d\,(Arccot\,x) = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

V. Nach demselben Verfahren, wie es in I. und III. angewendet wurde, hat man für $y = Arcsec\,x$, also $sec\,y = x$

$$\frac{Arcsec\,(x+\Delta x) - Arcsec\,x}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{sec\,(y+\Delta y) - sec\,y}$$
$$= \frac{1}{\dfrac{sec\,(y+\Delta y) - sec\,y}{\Delta y}},$$

mithin durch Uebergang zur Grenze für verschwindende Δx und Δy

$$\frac{d\,(Arcsec\,x)}{dx} = \frac{1}{\dfrac{sin\,y}{cos^2 y}} = \frac{1}{sec\,y\,\sqrt{sec^2 y - 1}},$$

d. i. wegen $sec\,y = x$

5) $$\frac{d\,(Arcsec\,x)}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \text{ und } (d\,Arcsec\,x) = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

VI. Zufolge der zwischen *Arcsec x* und *Arccosec x* stattfindenden Beziehung:

$$Arccosec\,x = \frac{\pi}{2} - Arssec\,x$$

ergiebt sich endlich noch:

6) $$\frac{d\,(Arccsc\,x)}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \text{ und } d(Arccsc\,x) = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Damit schliesst sich die Reihe der Differenzialformeln für die einfachen Funktionen. Bemerkenswerth ist hierbei, dass die Differenzialquotienten der Potenz, der Exponenzialgrösse und der goniometrischen Funktionen immer wieder Funktionen derselben Art sind; die Differenzialquotienten des Logarithmus und der cyklometrischen Funktionen dagegen sind algebraische Ausdrücke; hierin spricht sich schon eine gewisse Verwandtschaft der Funktionen aus, auf die wir später zurückkommen.

Cap. II.

Differenziation zusammengesetzter Funktionen von einer oder mehreren Variabelen.

§. 6.

Differenziation der Summen, Produkte und Quotienten.

I. Sind u und v Funktionen von x, so bildet der Ausdruck

$$1) \qquad y = Au + Bv$$

eine zusammengesetztere Funktion von x, welche unter Anderen auch die Summe $u+v$, so wie die Differenz $u-v$ als spezielle Fälle in sich enthält. Die Aenderung des x zieht die Aenderungen von u, v und y nach sich; man findet daher

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = A\frac{\varDelta u}{\varDelta x} + B\frac{\varDelta v}{\varDelta x}.$$

Je kleiner $\varDelta x$ ist, desto weniger unterscheiden sich die Differenzenquotienten $\frac{\varDelta u}{\varDelta x}$ und $\frac{\varDelta v}{\varDelta x}$ von den betreffenden Differenzialquotienten, und man kann daher

$$2) \qquad \frac{\varDelta u}{\varDelta x} = \frac{du}{dx} + \varrho_1, \quad \frac{\varDelta v}{\varDelta x} = \frac{dv}{dx} + \varrho_2$$

setzen, wo ϱ_1 und ϱ_2 ein paar Grössen bezeichnen, die mit $\varDelta x$ gleichzeitig verschwinden. Die vorhergehende Gleichung verwandelt sich jetzt in die folgende:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A\frac{du}{dx} + B\frac{dv}{dx}$$
$$+ A\varrho_1 + B\varrho_2$$

und diese liefert für $\Delta x = 0$ also auch $\varrho_1 = 0$ und $\varrho_2 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = A\frac{du}{dx} + B\frac{dv}{dx}$$

oder vermöge der Bedeutung von y

$$3)\qquad \frac{d\,(Au + Bv)}{dx} = A\frac{du}{dx} + B\frac{dv}{dx}.$$

Will man statt der Differenzialquotienten blosse Differenziale benutzen, so kann man schreiben:

$$4)\qquad d\,(Au + Bv) = A\,du + B\,dv.$$

Die obige Schlussweise erstreckt sich übrigens auf jede beliebige **endliche** Anzahl von Summanden, nicht aber auf eine unendliche Menge derselben, weil man in diesem Falle nicht behaupten darf, dass der Ausdruck $A\varrho_1 + B\varrho_2 + C\varrho_3 +$ *in inf.* die Null zur Grenze habe, wenn ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 etc. verschwinden.

II. Handelt es sich um die Differenziation eines Produktes,

$$5)\qquad y = uv,$$

so findet man sogleich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(u + \Delta u)\,(v + \Delta v) - uv}{\Delta x}$$
$$= u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\,\Delta x$$

und wenn man zur Grenze für verschwindende Δx übergeht:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Vermöge des Werthes von y kann man dafür schreiben:

$$6)\qquad \frac{d\,(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

oder auch

$$7)\qquad d\,(uv) = u\,dv + v\,du.$$

III. Ist endlich ein Quotient zu differenziren, etwa

$$8)\qquad y = \frac{v}{u},$$

so hat man zunächst:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{v+\Delta v}{u+\Delta u} - \frac{v}{u}\right) : \Delta x$$

$$= \frac{u\frac{\Delta v}{\Delta x} - v\frac{\Delta u}{\Delta x}}{(u+\Delta u)\, u}$$

und hier giebt der Uebergang zur Grenze für verschwindende Δx:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}}{u^2}$$

d. i. vermöge der ursprünglichen Bedeutung des y

$$9)\qquad \frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{dx} = \frac{u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}}{u^2}$$

oder auch nur:

$$10)\qquad d\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{u\,dv - v\,du}{u^2}.$$

IV. Die hier entwickelten Sätze können bereits zu mancher kleinen analytischen Entdeckung führen; differenzirt man z. B. beide Seiten der Gleichung:

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n$$
$$= \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$$

und zwar die linke Seite mittelst der in I., und die rechte nach der in III. entwickelten Regel, so findet sich

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}$$
$$= \frac{1 - (n+1)\,x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

und so lässt sich überhaupt aus jeder Summenformel eine neue derartige Formel durch Differenziation ableiten.

V. Eine anderweite und zwar nicht unwichtige Anwendung der bisherigen Regeln ist folgende. Wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet, so liefert die wirkliche Ausführung der durch $(1+x)^m$ angedeuteten m Multiplikationen ein Resultat von der Form

$$11)\quad (1+x)^m = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_m x^m.$$

Um die mit A bezeichneten Coeffizienten zu bestimmen, differenziren wir beiderseits; dies giebt:

$$\frac{d\,[(1+x)^m]}{dx} = 1A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \dots + mA_m x^{m-1}$$

und dabei ist die linke Seite der Grenzwerth von

$$\frac{(1+x+\Delta x)^m-(1+x)^m}{\Delta x}.$$

Den Lehren des §. 2 zufolge gilt aber für verschwindende δ und beliebige z immer der Satz:

$$Lim\frac{(z+\delta)^m-z^m}{\delta}=Lim\frac{(z+\delta)^m-z^m}{(z+\delta)-z}=mz^{m-1},$$

der sich für $z=1+x$ und $\delta=\Delta x$ hier anwenden lässt; man erhält so den Differenzialquotienten

$$m(1+x)^{m-1}=1A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots+mA_mx^{m-1}.$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit $1+x$ und die in Nr. 11) verzeichnete mit m, so sind die linken Seiten gleich, mithin müssen auch die rechten Seiten gleich sein; daher ist:

$$\begin{aligned}&1A_1+(2A_2+1A_1)x+(3A_3+2A_2)x^2+\ldots\\&=m+\quad mA_1x+\quad mA_2x^2+\ldots\end{aligned}$$

und hieraus findet sich der Reihe nach:

$$A_1=\frac{m}{1},\ A_2=A_1\frac{m-1}{2}=\frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2},$$

$$A_3=A_2\frac{m-2}{3}=\frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\,\frac{m-2}{3}\ \text{u. s. w.},$$

man gelangt so zu der Gleichung:

$$12)\quad (1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots,$$

welche den Namen des **binomischen Satzes** für ganze positive Exponenten führt. Nimmt man $x=\frac{b}{a}$ und multiplizirt beiderseits mit a^m, so folgt noch die Formel:

$$13)\quad (a+b)^m=a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^{m-2}b^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}b^3+\ldots,$$

mittelst deren jede zweitheilige Grösse auf beliebige Potenzen erhoben werden kann.

§. 7.

Differenziation der Funktionen von Funktionen.

I. Ist z eine Funktion von y, und dieses eine Funktion von x, finden also zwei Gleichungen von der Form

$$1)\qquad z=f(y),\ y=\varphi(x)$$

statt, so kann man die Differenziation von z auf zwei andere Differenziationen zurückführen. Die Aenderung des x zieht nämlich die Aenderungen des y und z nach sich, und es ist daher

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(y+\Delta y) - f(y)}{\Delta x};$$

statt dessen kann man setzen:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(y+\Delta y) - f(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

wobei man nicht übersehen möge, dass der rechts vorkommende Differenzenquotient von $f(y)$ ebenso gebildet ist, als wenn y unabhängige Variabele und demnach Δy eine willkürliche Zunahme des y wäre. Gehen wir nun in der obigen Gleichung, oder in der folgenden mit ihr identischen

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

zur Grenze über, so folgt auf der Stelle:

$$2) \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \text{ oder } dz = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\, dx.$$

Man erhält demnach den Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$, wenn man zuerst den Differenzialquotienten $\frac{dz}{dy}$ so bildet, als wäre y unabhängige Variabele, und ihn nachher mit $\frac{dy}{dx}$ multiplizirt; die Werthe der beiden letzteren Differenzialquotienten folgen jederzeit aus den in Nro. 1) aufgestellten Gleichungen.

Hätte man z. B. die zusammengesetzte Funktion

$$z = (a + b x^n)^p$$

zu differenziren, so schreibe man statt dieser einen Gleichung die beiden folgenden Gleichungen

$$z = y^p, \quad y = a + b x^n,$$

aus ihnen erhält man unter Benutzung der bisherigen Differenziationsregeln:

$$\frac{dz}{dy} = p y^{p-1}, \quad \frac{dy}{dx} = b n x^{n-1}$$

und mithin durch Multiplikation beider Gleichungen nach Nr. 2):

$$\frac{dz}{dx} = b n p\, y^{p-1}\, x^{n-1}.$$

Setzt man endlich noch statt y und z ihre Werthe, so ist nunmehr:

$$\frac{d\,[(a+b\,x^n)^p]}{dx} = b\,n\,p\,(a+b\,x^n)^{p-1}\,x^{n-1}.$$

Man wird bei mehrfacher Uebung in diesem Verfahren bald finden, dass es nicht nöthig ist, die Grössen y und z in Rechnung zu bringen, da sie später doch wieder daraus verschwinden; man kann vielmehr diese Substitutionen im Gedächtnisse behalten und dadurch eine wesentliche Abkürzung herbeiführen. So würde man z. B. in dem obigen Falle sagen: analog der $d(y^p) = p\,y^{p-1}\,dy$ ist

$$\begin{aligned} d\,[(a+b\,x^n)^p] &= p\,(a+b\,x^n)^{p-1}\,d\,(a+b\,x^n) \\ &= p\,(a+b\,x^n)^{p-1}\,b\,d(x^n) \\ &= p\,(a+b\,x^n)^{p-1}\,b\,n\,x^{n-1}\,dx, \end{aligned}$$

was mit dem früheren Resultate gleich lautet.

Ein zweites Beispiel möge die Differenziation von x^x sein; stellt man diesen Ausdruck als Exponenzialgrösse dar, so ist

$$x^x = (e^{lx})^x = e^{x\,lx},$$

$l\,y = x\,l\,x$

$d(ly) = \frac{dy}{y} = d(x\,lx) = (1+lx)\,dx$

$dy = x^x(1+lx)\,dx$

mithin vermöge der Regel $d(e^y) = e^y\,dy$

$$\begin{aligned} d\,(x^x) &= e^{x\,lx}\,d\,(x\,lx) \\ &= e^{x\,lx}\,(x\,dlx + lx\,dx) \\ &= e^{x\,lx}\left(x\,\frac{dx}{x} + l\,x\,dx\right) \\ &= x^x\,(1 + lx)\,dx. \end{aligned}$$

Auf demselben Wege gelangt man zu der folgenden kleinen Formelsammlung, welche uns später von Wichtigkeit sein wird:

$$3)\qquad d\left[\frac{1}{b}\,l(a+bx)\right] = \frac{dx}{a+bx}$$

$$4)\qquad d\left[-\frac{1}{b\,(a+bx)}\right] = \frac{dx}{(a+bx)^2}$$

$$5)\qquad d\left[\frac{1}{\alpha\beta}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{\beta x}{\alpha}\right] = \frac{dx}{\alpha^2+\beta^2x^2}$$

$$6)\qquad d\left[\frac{1}{2\alpha\beta}\,l\,\frac{\alpha+\beta x}{\alpha-\beta x}\right] = \frac{dx}{\alpha^2-\beta^2x^2}$$

$$7)\qquad d\left[\frac{1}{2b}\,l\,(a+bx^2)\right] = \frac{x\,dx}{a+bx^2}$$

$$8)\qquad d\left[\frac{1}{\beta}\,l\,(\beta x+\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2})\right] = \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}$$

$$9)\qquad d\left[\frac{1}{\beta}\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{\beta x}{\alpha}\right] = \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}}$$

$$10)\quad d\left[\frac{\sqrt{a+bx^2}}{b}\right] = \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx^2}}$$

$$11)\quad d\left[\frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}}\right] = \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}^{\,3}}$$

$$12)\quad d\left[-\frac{1}{b\sqrt{a+bx^2}}\right] = \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^{\,3}}$$

$$13)\quad d\,[x\,lx - x] = lx\,dx$$

$$14)\quad d\,[-\,l\cos x] = \tan x\,dx$$

$$15)\quad d\,[l\sin x] = \cot x\,dx$$

$$16)\quad d\left[\frac{1}{2\alpha\beta}\,l\left(\frac{\alpha+\beta\tan x}{\alpha-\beta\tan x}\right)\right] = \frac{dx}{\alpha^2\cos^2 x - \beta^2\sin^2 x}$$

$$17)\quad d\left[\frac{1}{\alpha\beta}\,Arctan\,\frac{\beta\tan x}{\alpha}\right] = \frac{dx}{\alpha^2\cos^2 x + \beta^2\sin^2 x}.$$

II. So wie in der vorigen Betrachtung z als Funktion einer Funktion, oder, was dasselbe ist, als Funktion einer abhängigen Variabele y erschien, so kann man auch Funktionen mehrerer abhängigen Variabelen bilden. Es sei z. B.

$$18)\qquad z = f(u, v),$$

wo u und v von x abhängen mögen, etwa

$$19)\qquad u = \varphi(x) \text{ und } v = \psi(x),$$

so ist z zunächst eine Funktion von u und v, im Grunde jedoch eine Funktion von x. Um hier die Differenziation auszuführen, bemerke man vorerst, dass der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u,\ v+\Delta v) - f(u, v)}{\Delta x}$$

auch in folgender Form dargestellt werden kann:

$$20)\quad \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u,\ v) - f(u, v)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{f(u+\Delta u,\ v+\Delta v) - f(u+\Delta u,\ v)}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Der erste Theil der rechten Seite ist ganz in derselben Weise gebildet, als wenn v eine Constante wäre, und sein Grenzwerth wird demnach

$$\frac{d\,f(u, v)}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dx},$$

wobei sich die erste Differenziation nur auf u bezieht, als wäre v constant. Der zweite Theil der Gleichung 20) ist so gebildet, als wäre $u + \Delta u$ eine Constante, und demnach wäre sein Grenzwerth:

$$\frac{d\,f(u+\Delta u,\ v)}{dv}\cdot\frac{dv}{dx};$$

da jedoch Δu mit Δx gleichzeitig verschwindet, so ist der richtige Grenzwerth:

$$\frac{d\,f(u, v)}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{dz}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Nach diesen Bemerkungen erhält man aus der Gleichung 20) die Differenzialformel:

$$21) \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{d\,f(u, v)}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{d\,f(u, v)}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Die beiden Differenzialquotienten von $f(u, v)$, deren einer nur u und deren anderer nur v als Variabele ansieht, nennt man partielle Differenzialquotienten und bezeichnet sie, um besserer Unterscheidung willen, entweder durch Klammereinschluss, also mit

$$\left(\frac{d\,f(u, v)}{du}\right) \text{ und } \left(\frac{d\,f(u, v)}{dv}\right)$$

oder kürzer, nach neuerer Weise, durch

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \text{ und } \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}.$$

Man wird jetzt die Formel 21) in nachstehender Form schreiben, wobei für z sein Werth gesetzt ist:

$$22) \qquad \frac{d\,f(u, v)}{dx} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}^{\times} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Hiernach ist z. B.:

$$\frac{dl\,(au^2 + bv^2)}{dx} = \frac{2au}{au^2 + bv^2}^{+} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{2bv}{au^2 + bv^2} \cdot \frac{dv}{dx}, \times$$

wie man leicht findet, indem man die in I. entwickelte Regel für $y = au^2 + bv^2$ benutzt.

Die soeben durchgeführten Betrachtungen lassen sich auf Funktionen mehrerer abhängigen Variabelen ausdehnen; so erhält man, wenn u, v, w Funktionen von x sind:

$$\frac{d\,f(u, v, w)}{dx}$$

$$= \frac{\partial f(u, v, w)}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f(u, v, w)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial f(u, v, w)}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx};$$

ähnliche Formeln gelten bei mehreren abhängigen Variabelen.

§. 8.

Differenziation unentwickelter Funktionen.

Wenn zwischen zwei Variabelen x und y eine Gleichung von der Form:

$$1) \qquad f(x, y) = 0$$

+ v. is regarded as constant. $f(u) = l.\,au^2$ 3 * $f(v) = l.\,bv^2$

$\partial f(u, v) = d\,l(au^2 + d)$ where $d =$ [illegible]

$= \frac{1}{au^2+d} \cdot d(au^2+d) = \frac{1}{au^2+d}\, 2au\,du$

[illegible]

besteht, so sind nicht beide Variabele willkürlich, denn man würde durch Auflösung der Gleichung in Beziehung auf y als Unbekannte ein Resultat von der Form:

$$2) \qquad y = \varphi(x)$$

erhalten, wo nun x die unabhängige, y die abhängige Variabele ist. Lässt sich diese Reduktion auf y ausführen, so kann man auch

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$$

nach den vorigen Regeln entwickeln; dies geht jedoch nicht mehr, wenn die Gleichung 1) unauflösbar, also eine unentwickelte Funktion von x ist. Man hilft sich dann auf folgende Weise: Aus der Gleichung 1) folgt zunächst, weil sie für alle x und die daraus folgenden y bestehen soll, dass auch

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$$

sein muss, und demgemäss finden die Gleichungen

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta x} = 0$$

und

$$\frac{d\, f(x, y)}{dx} = 0$$

statt. Vermöge der Gleichung 22) des vorigen Paragraphen ist dies so viel wie

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

und hieraus ergiebt sich auf der Stelle:

$$3) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}}.$$

Um also den Differenzialquotienten der unbekannten Funktion $y = \varphi(x)$ zu finden, braucht man nur die partiellen Differenzialquotienten der Bedingungsfunktion $f(x, y)$ durch einander zu dividiren. Die so für $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ gewonnene Formel enthält zwar noch y, welches man im Allgemeinen nicht angeben, dessen Werth jedoch gefunden werden kann, sobald x einen speziellen Zahlwerth bekommt; denn es wird dann die Gleichung $f(x, y)$ zu einer numerischen Gleichung mit einer Unbekannten (y), und eine solche Gleichung kann mindestens durch Probiren immer aufgelöst werden.

The result is the same, whether the f. be first differen- [illegible] the value of y in x (or numerically) [illegible] x — or, if the value of y be first disengaged [illegible] be taken. But the latter is not always possible.

Wäre z. B. die gegebene Bedingungsgleichung:

$$4)\qquad f(x, y) = y^5 x^3 - 2y^4 x^2 + 3y - 6x = 0,$$

die in Beziehung auf y nicht lösbar ist, so folgt:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3y^5 x^2 - 4y^4 x - 6$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 5y^4 x^3 - 8y^3 x^2 + 3$$

und mithin ist

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) = -\frac{3y^5x^2 - 4y^4x - 6}{5y^4x^3 - 8y^3x^2 + 3}.$$

Für $x = 1$ z. B. geht die obige Bedingungsgleichung in die numerische Gleichung über:

$$y^5 - 2y^4 + 3y - 6 = 0,$$

deren einzige reelle Wurzel $y = 2$ ist; dem Werthe $x = 1$ entspricht also $\varphi(1) = 2$ und

$$\varphi'(1) = -\frac{3 \cdot 2^5 - 4 \cdot 2^4 - 6}{5 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 + 3} = -\frac{26}{19}.$$

Ebenso würde man für jeden anderen numerischen Werth von x die zugehörigen Zahlwerthe von $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ aufsuchen können.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Gleichung:

$$4y^3 - 3y + \sin x = 0.$$

Hier ist

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \cos x, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 12y^2 - 3,$$

und hieraus findet man sogleich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3(1 - 4y^2)}.$$

Der vorliegende Fall gestattet noch eine Probe. Die Wurzel der obigen Gleichung ist nämlich $y = \sin \frac{1}{3} x$, wie man mittelst der goniometrischen Formel:

$$4 \sin^3 A - 3 \sin A + \sin 3A = 0$$

leicht finden wird. Es müsste also

$$\frac{\cos x}{3(1 - 4\sin^2 \frac{1}{3} x)} = \frac{d(\sin \frac{1}{3} x)}{dx}$$

sein, und dies bestätigt sich, wenn man die bekannte Formel:

$$\cos 3A = \cos A\,(1 - 4 \sin^2 A)$$

für $A = \frac{1}{3} x$ anwendet und andererseits $\sin \frac{1}{3} x$ auf gewöhnliche Weise differenzirt.

§. 9.

Differenziation der Funktionen von mehreren unabhängigen Variabelen.

Enthält eine Funktion mehrere unabhängige Variabele x, y, z etc., ist also

$$1) \qquad u = f(x, y, z, \ldots),$$

so kann man entweder die eine oder die andere Variabele für sich allein ändern, oder eine gleichzeitige Aenderung mehrerer Variabelen vornehmen. So erhält man z. B. durch Aenderung des x allein:

$$\frac{du}{dx} = Lim \frac{f(x + \Delta x, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)}{\Delta x},$$

und hierbei gelten $y, z, \ldots$ als Constanten; es ist also der vorstehende Differenzialquotient ein partieller und muss demgemäss mit $\left(\frac{du}{dx}\right)$ oder $\frac{\partial u}{\partial x}$ bezeichnet werden. Eine solche partielle Differenziation hat nun weiter keine Schwierigkeit, und es bedarf daher nur noch der Untersuchung des zweiten Falles einer **gleichzeitigen** Aenderung mehrerer Variabelen.

Lassen wir zunächst x und y sich ändern, so geht die Gleichung 1), welche wir in diesem Falle kurz durch

$$2) \qquad u = f(x, y)$$

darstellen wollen, in die folgende über:

$$u + \Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y),$$

und aus ihr findet sich, wie leicht zu übersehen ist,

$$3) \qquad \Delta u = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \Delta x$$
$$+ \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \Delta y.$$

Gehen Δx und Δy in Null über, so gelten offenbar die Gleichungen:

$$Lim \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$Lim \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial f(x + \Delta x, y)}{\partial y}$$

und weil Δx und Δy gleichzeitig verschwinden, so ist der vorstehende Ausdruck auch

$$= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Die Differenzengleichung 3) verwandelt sich jetzt in die folgende Differenzialgleichung:

$$4)\qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

oder

$$5)\qquad d\,f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dy,$$

welche sagt, dass das **totale** Differenzial einer Funktion die Summe von den partiellen Differenzialen derselben ist. Diese Regel lässt sich sehr leicht auf Funktionen mehrerer Variabelen ausdehnen; ändern sich z. B. x, y, z gleichzeitig, so gilt die Gleichung:

$$6)\qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz,$$

und ähnlich bei mehreren Variabelen.

Als Anwendung hiervon diene Folgendes. Wenn zwischen den drei Variabelen x, y, z die Bedingungsgleichung:

$$7)\qquad F(x, y, z) = 0 \text{ oder kurz } F = 0$$

besteht, so würde durch Reduktion auf z ein Resultat von der Form

$$z = \psi\,(x, y)$$

zum Vorschein kommen, und es hätte dann keine Schwierigkeit, die partiellen Differenzialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ direkt zu entwickeln. Will man oder muss man jene Reduktion auf z vermeiden, so ist zunächst die Gleichung 6) zu benutzen; sie giebt:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz,$$

und dies würde ohne Weiteres richtig sein, wenn x, y, z sämmtlich unabhängige Variabele wären; es ist aber im Gegentheil z eine Funktion von x und y, also

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

Substituirt man dies in die obige Gleichung und dividirt nachher mit dx, so folgt:

$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}.$$

Da dx und dy die Differenziale der beiden unabhängigen Variabelen x und y, also selbst von einander unabhängig sind, so kann $\frac{dy}{dx}$ jede beliebige Grösse q bezeichnen, indem es freisteht, $dy = q\,dx$ zu setzen; dann ist es aber zum Bestehen der obigen Gleichung erforderlich, dass die einzelnen, in Parenthesen stehenden Ausdrücke für sich Null sind; dies giebt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}.$$

Man könnte dies auch unmittelbar aus den Lehren des vorigen Paragraphen erhalten, und zwar bedarf es nur der einfachen Bemerkung, dass bei der Entwickelung von $\frac{\partial z}{\partial x}$ das in $F(x, y, z) = 0$ vorkommende y als Constante anzusehen, also nicht weiter zu beachten ist, und dass es ebenso bei $\frac{\partial z}{\partial y}$ nicht auf x ankommt; in jedem Falle hätte man es dann, wie im vorigen Paragraphen, nur mit zwei Variabelen (x und z oder y und z) zu thun gehabt.

Cap. III.

Mehrfache Differenziationen.

§. 10.

Fundamentalbegriffe und Formeln.

Das Verfahren, welches zur Entwickelung der Differenz

1) $$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

einer Funktion $y = f(x)$ diente, ist auf diese Differenz selbst wieder anwendbar; indem man nämlich $x + \Delta x$ an die Stelle von x treten lässt und nachher den ungeänderten Ausdruck abzieht, hat man

$$\Delta(\Delta y) = f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x) - [f(x + \Delta x) - f(x)],$$

und man schreibt dafür gewöhnlich:

2) $$\Delta^2 y = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x),$$

wobei der in Δ^2 vorkommende Exponent kein Potenzexponent, sondern nur der Anzeiger einer zweimaligen Differenzenbildung sein soll. Auf gleiche Weise ergiebt sich durch Wiederholung des Verfahrens:

3) $$\Delta^3 y = f(x + 3\Delta x) - 3f(x + 2\Delta x) + 3f(x + \Delta x) - f(x),$$

und es ist leicht genug, in dieser Weise weiter zu gehen.

Was von den Differenzen gilt, lässt sich gleichförmig auf die Differenzenquotienten anwenden; man hat dann, von dem ersten Differenzenquotienten

4) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ausgehend, für den zweiten Differenzenquotienten den Ausdruck:

$$\frac{\dfrac{f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} - \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2},$$

d. i. vermöge der Gleichung 2), und wenn man kurz Δx^2 statt $(\Delta x)^2$ schreibt:

$$5)\qquad \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2};$$

dann auf gleiche Weise

$$6)\qquad \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \frac{f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x^3}$$

u. s. w.

Lässt man Δx in Null übergehen, so erhält man die Gleichungen:

$$7)\qquad \frac{dy}{dx} = Lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$8)\qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = Lim \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2}$$

$$9)\qquad \frac{d^3 y}{dx^3} = Lim \frac{f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x^3}$$

u. s. w.,

welche die Definitionen der linker Hand stehenden Symbole enthalten. Dieser ursprünglichen Erklärung der successiven Differenzialquotienten kann man übrigens leicht eine sekundäre Definition substituiren, welche sich durch grössere Einfachheit empfiehlt. Da nämlich der zweite Differenzenquotient nichts weiter als der Differenzenquotient des ersten Differenzenquotienten ist, so muss auch der zweite Differenzialquotient entstehen, wenn man von dem ersten Differenzialquotienten wieder den Differenzialquotienten nimmt, und ein Gleiches gilt von den weiteren Differenzialquotienten; man wird also die auf einander folgenden Differenzialquotienten nicht nach den obigen Formeln unmittelbar, sondern einen aus den anderen durch fortgesetzte Differenziation bilden. Das Schema hierzu, nebst der üblichen Bezeichnung, ist dann:

$$10)\qquad \begin{cases} y = f(x) \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d\,f(x)}{dx} = f'(x) \\ \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d\,f'(x)}{dx} = f''(x) \\ \dfrac{d^3 y}{dx^3} = \dfrac{d\,f''(x)}{dx} = f'''(x) \end{cases}$$

u. s. w.

So hat man z. B. für $y = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ u. s. f.}$$

Auch in diesen successiven Differenziationen kann, wenigstens bis zu einem gewissen Grade, eine geometrische Bedeutung liegen; denken wir uns z. B. y als die über der Abscisse x stehende Fläche einer Curve, so ist $\frac{dy}{dx}$ die am Ende von x stehende Ordinate und $\frac{d^2y}{dx^2}$ die trigonometrische Tangente des Berührungswinkels; in dem oben angegebenen Beispiele würden diese Beziehungen einer Parabel entsprechen.

§. 11.

Höhere Differenzialquotienten der einfachsten Funktionen.

I. Durch fortgesetzte Anwendung der für die Potenz geltenden Differenziationsregel findet man ohne Mühe:

$$\frac{d\,(x^\mu)}{dx} = \mu x^{\mu-1}$$

$$\frac{d^2(x^\mu)}{dx^2} = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}$$

$$\frac{d^3(x^\mu)}{dx^3} = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}$$

und überhaupt, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet:

$$1)\qquad \frac{d^n(x^\mu)}{dx^n} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{n-1})x^{\mu-n}.$$

Für $\mu = -1$ und $\mu = -\frac{1}{2}$ ergeben sich hieraus die häufig vorkommenden Formeln:

$$2)\qquad \frac{d^n\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} = \frac{(-1)^n\,1\,.\,2\,.\,3\ldots n}{x^{n+1}}$$

$$3)\qquad \frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{dx^n} = \frac{(-1)^n\,1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2^n\,x^n\sqrt{x}}.$$

Auf ganz gleiche Weise kann man die mehrfache Differenziation des allgemeineren Ausdrucks $(a+bx)^\mu$ ausführen; man erhält:

$$4)\qquad \frac{d^n(a+bx)^\mu}{dx^n} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\overline{n-1})b^n(a+bx)^{\mu-n}.$$

Ist μ eine ganze positive Zahl, so wird der μte Differenzialquotient constant, alle folgenden mithin gleich Null.

II. Für die Funktion ${}^a\!log\, x$ ist bekanntlich

$$\frac{d\,({}^a\!log\, x)}{dx} = M_a \frac{1}{x}$$

und hieraus findet man leicht der Reihe nach:

$$\frac{d^2\,({}^a\!log\, x)}{dx^2} = M_a \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}, \quad \frac{d^3\,({}^a\!log\, x)}{dx^3} = M_a \frac{d^2\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^2} \text{ etc.}$$

also überhaupt:

$$\frac{d^n\,({}^a\!log\, x)}{dx^n} = M_a \frac{d^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^{n-1}}$$

d. i. nach Formel 2), wenn man $n-1$ für n schreibt:

$$5) \quad \frac{d^n\,({}^a\!log\, x)}{dx^n} = (-1)^{n-1} M_a \frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}{x^n}.$$

Auf gleiche Weise entwickelt man die allgemeinere Formel:

$$6) \quad \frac{d^n\,[{}^a\!log\,(a+bx)]}{dx^n} = (-1)^{n-1} M_a \frac{1\,.\,2\ldots(n-1)\,b^n}{(a+bx)^n}.$$

III. Sehr einfach gestaltet sich die successive Differenziation der Exponenzialgrösse; man findet sogleich

$$\frac{d\,(a^x)}{dx} = a^x\,la, \quad \frac{d^2\,(a^x)}{dx^2} = a^x\,(la)^2, \quad \frac{d^3\,(a^x)}{dx^3} = a^x\,(la)^3, \ldots$$

und hat demnach die allgemeine Formel:

$$7) \quad \frac{d^n\,(a^x)}{dx^n} = a^x\,(la)^n$$

oder für $la = \beta$, wo nun $a = e^\beta$ ist:

$$8) \quad \frac{d^n\,(e^{\beta x})}{dx^n} = \beta^n\,e^{\beta x}.$$

IV. Für den Sinus gelten folgende unmittelbar verständliche Gleichungen:

$$\frac{d\,(sin\,x)}{dx} = +\cos x = sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\frac{d^2\,(sin\,x)}{dx^2} = -\,sin\,x = sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right)$$

$$\frac{d^3\,(sin\,x)}{dx^3} = -\cos x = sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

$$\frac{d^4\,(sin\,x)}{dx^4} = +\,sin\,x = sin\left(\frac{4\pi}{2} + x\right)$$

u. s. w.

aus denen sofort die allgemeine Formel fliesst:

9) $$\frac{d^n(\sin x)}{dx^n} = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right).$$

Dasselbe gilt fast wörtlich vom Cosinus; man erhält

10) $$\frac{d^n(\cos x)}{dx^n} = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right).$$

Weniger einfach gestalten sich die höheren Differenzialquotienten der Funktionen $\sec x$, $\tan x$, $\operatorname{cosec} x$, $\cot x$, $\operatorname{Arcsin} x$ und $\operatorname{Arctan} x$; bevor wir etwas Näheres darüber angeben können, müssen wir zunächst die Differenzialquotienten zusammengesetzter Funktionen untersuchen.

§. 12.

Die höheren Differenzialquotienten zusammengesetzter Funktionen.

I. Sind u und v Funktionen von x, deren höhere Differenzialquotienten unmittelbar entwickelt werden können, so lässt sich auch die successive Differenziation von

1) $$y = Au + Bv$$

ausführen; man findet nämlich der Reihe nach

$$\frac{dy}{dx} = A\,\frac{du}{dx} + B\,\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx} = A\,\frac{d^2u}{dx^2} + B\,\frac{d^2v}{dx^2}$$

. . . .

und im Allgemeinen für jedes ganze positive n

$$\frac{d^ny}{dx^n} = A\,\frac{d^nu}{dx^n} + B\,\frac{d^nv}{dx^n},$$

wofür man vermöge des Werthes von y auch schreiben kann:

2) $$\frac{d^n(Au + Bv)}{dx^n} = A\,\frac{d^nu}{dx^n} + B\,\frac{d^nv}{dx^n}.$$

Nach dieser Regel ist z. B. der Ausdruck $1 : (1 - x^2)$ leicht zu differenziren, indem man beachtet, dass

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right\}$$

ist; man findet dann unter Rücksicht auf die Formel 4) des vorigen Paragraphen

$$3)\qquad \frac{d^n\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}{dx^n}=\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots n\left\{\frac{1}{(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right\}.$$

II. Handelt es sich um die Differenziation des Produktes $y = uv$, so erhält man successiv

$$\frac{dy}{dx}=u\,\frac{dv}{dx}+v\,\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=u\,\frac{d^2v}{dx^2}+2\,\frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}\,v$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=u\,\frac{d^3v}{dx^3}+3\,\frac{du}{dx}\,\frac{d^2v}{dx^2}+3\,\frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{dv}{dx}+\frac{d^3u}{dx^3}\,v.$$

Diese Gleichungen lassen erkennen, dass die allgemeine Formel für den $n$ten Differenzialquotienten folgende Gestalt besitzen muss

$$4)\qquad \frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d^n(uv)}{dx^n}$$

$$=A_0u\,\frac{d^nv}{dx^n}+A_1\,\frac{du}{dx}\,\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}+A_2\,\frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}}+\cdots$$

$$\cdots+A_{n-1}\,\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\,\frac{dv}{dx}+A_n\,\frac{d^nu}{dx^n}\,v,$$

in welcher $A_0, A_1, \ldots A_n$ gewisse noch unbekannte Coeffizienten bedeuten, welche nicht von der Natur der Funktionen u und v, sondern von der Anzahl der ausgeführten Differenziationen, d. h. von n, abhängen. Setzt man daher für u und v irgend ein paar solcher Funktionen, dass man sämmtliche auf beiden Seiten in Nro. 4) angedeuteten Differenziationen ausführen kann, so erhält man eine Bedingungsgleichung für jene Coeffizienten; eine derartige Substitution ist

$$u=e^{\alpha x},\quad v=e^x\quad \text{also}\quad uv=e^{(1+\alpha)x},$$

woraus für ganze positive k und n folgt

$$\frac{d^ku}{dx^k}=\alpha^k\,e^{\alpha x},\quad \frac{d^kv}{dx^k}=e^x,\quad \frac{d^n(uv)}{dx^n}=(1+\alpha)^n\,e^{(1+\alpha)x}.$$

Benutzt man diese Werthe der Differenzialquotienten und lässt am Ende den beiderseits gemeinschaftlichen Faktor $e^x\,e^{\alpha x}=e^{(1+\alpha)x}$ weg, so bleibt

$$(1+\alpha)^n$$

$$=A_0+A_1\,\alpha+A_2\,\alpha^2+\ldots+A_{n-1}\,\alpha^{n-1}+A_n\,\alpha^n$$

und hieraus folgt, dass

$$A_0 = 1,\ A_1 = \frac{n}{1},\ A_2 = \frac{n(n-1)}{1.2}, \ldots.$$

sein muss, mit einem Worte, dass die Coeffizienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ die sogenannten Binomialcoeffizienten des Exponenten n sind. Bezeichnen wir diese kurz mit $n_0, n_1, n_2, \ldots$ wonach im Allgemeinen

5) $$n_k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\overline{k-1})}{1.2.3\ldots.k}$$

ist, so haben wir jetzt zur Differenziation der Produkte die Formel:

6) $$\frac{d^n(uv)}{dx^n}$$
$$= n_0 u \frac{d^n v}{dx^n} + n_1 \frac{du}{dx}\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + n_2 \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \ldots.$$

Um z. B. hiernach den Ausdruck $\frac{lx}{x}$ zu differenziren, gebe man ihm die Form

$$lx \cdot \frac{1}{x}$$

wo nun die obige Regel anwendbar ist; man erhält nach gehöriger Reduktion:

7) $$\frac{d^n\left(\frac{lx}{x}\right)}{dx^n} = \frac{(-1)^n 1.2\ldots n}{x^{n+1}}\left[lx - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right].$$

III. Nicht immer lässt sich für den $n$ten Differenzialquotienten einer Funktion eine fertige Formel angeben, da die Ausdrücke, welche durch successive Differenziation entstehen, oft so verwickelt werden, dass man ihr Bildungsgesetz nicht mehr übersehen kann. In solchen Fällen ist es vortheilhaft, auf die Bildung einer Relation zwischen dem $n$ten Differenzialquotienten und seinen Vorgängern, also einer Gleichung zwischen $f^{(n)}(x)$, $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n-2)}(x)$ etc., auszugehen, mittelst deren man im Stande ist, jeden Differenzialquotienten zu finden, wenn die Differenzialquotienten von niedrigeren Ordnungen bekannt sind. Wir wollen dieses Verfahren an einigen Beispielen zeigen.

A. Ist $f(x) = \sec x$, so gilt die Gleichung

$$\cos x \,.\, f(x) = 1$$

und der $n$te Differenzialquotient derselben ist nach Nro. 6):

$$\left.\begin{array}{l} n_0 \cos x \,.\, f^{(n)}(x) - n_2 \cos x \,.\, f^{(n-2)}(x) + n_4 \cos x \,.\, f^{(n-4)}(x) - \ldots \\ - n_1 \sin x \,.\, f^{(n-1)}(x) + n_3 \sin x \,.\, f^{(n-3)}(x) - n_5 \sin x \,.\, f^{(n-5)}(x) + \ldots \end{array}\right\} = 0$$

und hieraus findet man sogleich

$$8)\quad f^{(n)}(x) = [n_1 f^{(n-1)}(x) - n_3 f^{(n-3)}(x) + \ldots] \tan x$$
$$+ n_2 f^{(n-2)}(x) - n_4 f^{(n-4)}(x) + n_6 f^{(n-6)}(x) - \ldots$$

Benutzt man diese Gleichung, indem man der Reihe nach $n = 2$, 3, 4, etc. setzt und $f'(x) = \sec x \,.\, \tan x$, $f^{(0)}(x) = \sec x$ als bekannt ansieht, so erhält man successiv $f''(x)$, $f'''(x)$ etc.

B. Dasselbe Verfahren passt auf die Tangente, aus $f(x) = \tan x$ folgt nämlich

$$\cos x \,.\, f(x) = \sin x$$

und nach der obigen Methode:

$$9)\quad f^{(n)}(x) = \frac{\sin(\frac{1}{2}n\pi + x)}{\cos x} + [n_1 f^{(n-1)}(x) - n_3 f^{(n-3)}(x) + ..] \tan x$$
$$+ n_2 f^{(n-2)}(x) - n_4 f^{(n-4)}(x) + \ldots.$$

Auf gleiche Weise lassen sich die Differenzialquotienten der Cosekante und Cotangente entwickeln.

C. Bezeichnen wir $\mathrm{Arctan}\, x$ mit $\varphi(x)$, so ist

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \text{ oder } (1 + x^2)\,\varphi'(x) = 1.$$

Durch $n$malige Differenziation dieser Gleichung ergiebt sich:

$$n_0 (1 + x^2)\,\varphi^{(n+1)}(x) + n_1 \,.\, 2x\,\varphi^{(n)}(x) + n_2 \,.\, 2 \,.\, 1\,\varphi^{(n-1)}(x) = 0$$

und durch Reduktion auf $\varphi^{(n+1)}(x)$, wenn man zugleich statt n_0, n_1, n_2 ihre Werthe setzt:

$$10)\qquad \varphi^{(n+1)}(x) = -\frac{2nx\,\varphi^{(n)}(x) + n(n-1)\,\varphi^{(n-1)}(x)}{1 + x^2};$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ergeben sich hieraus der Reihe nach die Werthe von $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$ etc.

D. Um eine ähnliche Formel für $\mathrm{Arcsin}\, x$ zu bekommen, sei $\mathrm{Arcsin}\, x = \psi(x)$; es ist dann

$$\psi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ und } \psi''(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}^{\,3}}.$$

Der letzten Gleichung kann man die Form geben:

$$(1 - x^2)\,\psi''(x) - x\,\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$$

d. i.

$$(1 - x^2)\,\psi''(x) - x\,\psi'(x) = 0$$

und aus dieser folgt durch $n$malige Differenziation

$$\left.\begin{aligned} n_0 (1 - x^2)\,\psi^{(n+2)}(x) - n_1 \,.\, 2x\psi^{(n+1)}(x) - n_2 \,.\, 2 \,.\, 1\,\psi^{(n)}(x) \\ - n_0 \,.\, x\,\psi^{(n+1)}(x) - n_1 \,.\, 1\,\psi^{(n)}(x) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Indem man das Gleichartige vereinigt und auf $\psi^{(n+2)}(x)$ reduzirt, findet man

$$11)\qquad \psi^{(n+2)}(x) = \frac{(2n+1)\,x\,\psi^{(n+1)}(x) + n^2\,\psi^{(n)}(x)}{1-x^2}.$$

Von $\psi'(x)$ und $\psi''(x)$ ausgehend, gelangt man durch die Suppositionen $n = 1, 2, 3$ etc. zur Kenntniss von $\psi'''(x)$, $\psi^{\mathrm{IV}}(x)$ etc.

E. Sehr ähnlich ist die Behandlung der allgemeineren Funktion

$$\varphi(x) = \sin(\mu \operatorname{Arcsin} x).$$

Durch einmalige Differenziation erhält man

$$\varphi'(x) = \frac{\mu \cos(\mu \operatorname{Arcsin} x)}{\sqrt{1-x^2}} \text{ oder } \sqrt{1-x^2}\,\varphi'(x) = \mu \cos(\mu \operatorname{Arcsin} x)$$

und durch eine zweite Differenziation

$$\sqrt{1-x^2}\,\varphi''(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\varphi'(x) = -\frac{\mu^2 \sin(\mu \operatorname{Arcsin} x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

d. i. nach Wegschaffung der Brüche und vermöge der ursprünglichen Bezeichnung für $\sin(\mu \operatorname{Arcsin} x)$

$$(1-x^2)\,\varphi''(x) - x\,\varphi'(x) = -\mu^2\,\varphi(x).$$

Durch $n$malige Differenziation und nachherige Reduktion auf $\varphi^{(n+2)}(x)$ leitet man hieraus die Formel ab:

$$12)\qquad \varphi^{(n+2)}(x) = \frac{(2n+1)\,x\,\varphi^{(n+1)}(x) + (n^2-\mu^2)\,\varphi^{(n)}(x)}{1-x^2}.$$

F. Dasselbe Verfahren ist beinahe wörtlich auf die Funktion

$$\psi(x) = \cos(\mu \operatorname{Arcsin} x)$$

anwendbar und man findet mittelst desselben die Formel

$$13)\qquad \psi^{(n+2)}(x) = \frac{(2n+1)\,x\,\psi^{(n+1)}(x) + (n^2-\mu^2)\,\psi^{(n)}(x)}{1-x^2},$$

welche von der unter Nro. 12) verzeichneten nur in so fern abweicht, als $\psi(x)$ von $\varphi(x)$ verschieden ist.

§. 13.

Successive Differenziation der Funktionen mehrerer unabhängiger Variabelen.

Wenn man eine Funktion mehrerer unabhängiger Variabelen wiederholt differenzirt, so kann dies entweder partiell in Beziehung auf diese oder jene Variabele, oder total in Beziehung auf alle Variabele zugleich geschehen.

I. Wird die Funktion $f(x, y)$ zunächst partiell in Beziehung auf x und der so entstandene Differenzialquotient partiell in Beziehung auf y differenzirt, so entsteht der zweite Differenzialquotient

$$\frac{\partial \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}}{\partial y},$$

welchen man kürzer mit $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y . \partial x}$ bezeichnet, indem man zugleich durch die Stellung der ∂y und ∂x die Reihenfolge der Differenziationen (von der Rechten nach der Linken) zu erkennen giebt. Auf gleiche Weise würde $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y}$ das Resultat einer zweimaligen partiellen Differenziation in Beziehung auf y und x bedeuten. Den eigentlichen Sinn solcher Differenziationen findet man leicht, wenn man auf die Definition des Differenzialquotienten zurückgeht; es ist nämlich, $f(x, y)$ kurz z bezeichnet,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = Lim \frac{f(x + \varDelta x, y) - f(x, y)}{\varDelta x}$$

und es folgt daraus, dass man setzen darf

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f(x + \varDelta x, y) - f(x, y)}{\varDelta x} + \varrho,$$

wo ϱ eine mit $\varDelta x$ gleichzeitig verschwindende Grösse bezeichnet. Weiter hat man

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial \left[\dfrac{f(x + \varDelta x, y) - f(x, y)}{\varDelta x}\right]}{\partial y} + \frac{\partial \varrho}{\partial y},$$

d. i. nach dem Begriffe des Differenzialquotienten:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} - \frac{\partial \varrho}{\partial y}$$

$$= Lim \frac{f(x + \varDelta x, y + \varDelta y) - f(x, y + \varDelta y) - [f(x + \varDelta x, y) - f(x, y)]}{\varDelta y\, \varDelta x}.$$

Lässt man $\varDelta x$ mit $\varDelta y$ gleichzeitig Null werden, so verschwindet ϱ und es bleibt

1) $$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\, \partial x}$$

$$= Lim\, Lim \frac{f(x + \varDelta x, y + \varDelta x) - f(x, y + \varDelta y) - f(x + \varDelta x, y) + f(x, y)}{\varDelta y\, \varDelta x}$$

als unmittelbare Erklärung des nach x und y genommenen Differenzialquotienten. Aus denselben Gründen würde die Gleichung

2) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y}$$

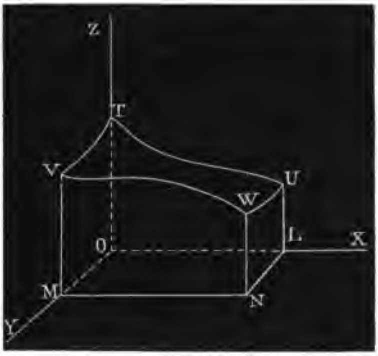
$$= Lim\, Lim \frac{f(x + \varDelta x, y + \varDelta y) - f(x + \varDelta x, y) - f(x, y + \varDelta y) + f(x, y)}{\varDelta x\, \varDelta y}$$

die umgekehrte Anordnung jener zwei Differenziationen aussprechen; die rechten Seiten der beiden Gleichungen 1) und 2) sind aber dieselben und man hat daher den bemerkenswerthen Satz:

3)
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\ \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y},$$

welcher sagt, dass es für das Endresultat gleichgültig ist, in welcher Ordnung die zwei partiellen Differenziationen in Beziehung auf x und y ausgeführt werden. — Man kann diesem Theoreme eine sehr anschauliche Seite abgewinnen, wenn man sich z als das Volumen denkt, welches unterhalb von einem beliebigen Rechtecke aus den Seiten $OL = x$ und $OM = y$ (Fig. 8), seitwärts von den vier

Fig. 8.



auf OL, LN, NM, MO errichteten Vertikalebenen, und oberhalb durch irgend eine Fläche begrenzt wird; es ist dann in der That z eine Funktion von x und y, und man hat nach §. 1.:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \text{Fläche } LNWU$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\ \partial x} = \frac{\partial (LNWU)}{\partial y} = NW$$

andererseits:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \text{Fläche } MNWV$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y} = \frac{\partial (MNWV)}{\partial x} = NW,$$

was mit der Gleichung 3) übereinstimmt.

Sind irgend wieviel Differenziationen in Beziehung auf irgend wieviele Variabele auszuführen, so lassen sich nach dem Vorigen immer je zwei Differenziationen vertauschen; auf diese Weise kann man jede beliebige Anordnung der Differenziationen herbeiführen, ohne dass das Resultat eine Aenderung erleidet.

II. Mittelst des Vorigen lassen sich die höheren totalen Differenziale einer Funktion leicht entwickeln; man hat nämlich zunächst bei zwei Variabelen

$$4)\qquad dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

und unter Anwendung desselben Satzes

$$d^2z = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx\right)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx\right)}{\partial y}\,dy$$
$$+ \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)}{\partial y}\,dy,$$

dies ist soviel als

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\,dy\,dx$$
$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung 3)

$$5)\qquad d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2.$$

Durch Wiederholung desselben Verfahrens findet sich

$$6)\qquad d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\,dx^2\,dy$$
$$+ 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\,dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\,dy^3$$

und wenn man beachtet, dass die hier vorkommenden Zahlencoefficienten durch dieselbe successive Addition wie in §. 12., I. entstehen, so erkennt man als allgemeines Gesetz:

$$7)\qquad d^nz = n_0\,\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\,dx^n + n_1\,\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\,\partial y}\,dx^{n-1}\,dy$$
$$+ n_2\,\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\,\partial y^2}\,dx^{n-2}\,dy^2 + \dots$$

Kürzer schreibt man dafür

$$8)\qquad d^n z = \left(\frac{1}{\partial x}\,dx + \frac{1}{\partial y}\,dy\right)^n \partial^n z.$$

Bei drei Variabelen, wenn also u eine Funktion von x, y und z wäre, erhält man auf gleiche Weise:

$$9)\qquad d^n u = \left(\frac{1}{\partial x}\,dx + \frac{1}{\partial y}\,dy + \frac{1}{\partial z}\,dz\right)^n \partial^n u$$

und man übersieht auf der Stelle, wie sich die Sache bei mehreren Variabelen gestaltet.

§. 14.

Höhere Differenzialquotienten unentwickelter Funktionen.

Aus den Betrachtungen des §. 8. wissen wir, dass eine Gleichung von der Form

$$1)\qquad f(x, y) = 0 \text{ oder } f = 0$$

durch Differenziation die folgende giebt:

$$2)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0,$$

wobei x die unabhängige Variabele bedeutet und y als unentwickelte Funktion von x angesehen wird. Um nun die Differenzialgleichung zweiter Ordnung zu erhalten, bezeichnen wir die linke Seite der Gleichung 2) für den Augenblick mit $f_1(x, y)$ oder noch kürzer mit f_1; es ist dann unter Anwendung derselben Regel

$$3)\qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0,$$

andererseits hat man aber vermöge der Bedeutung von f_1

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Hierbei ist zu bemerken, dass y nur von x abhängt, dass also auch $\frac{dy}{dx}$ nur x enthält, mithin eine Funktion von x allein [nach der früheren Bezeichnung $\varphi'(x)$] und constant in Beziehung auf y ist; man hat daher

$$\frac{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\partial y} = 0$$

und wenn man die drei letzten Gleichungen in Nro. 3) einführt, so ergiebt sich die gesuchte Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$4)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\;\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

Nach demselben Verfahren kann die Differenzialgleichung dritter Ordnung aufgestellt werden; sie ist, wenn f_2 die linke Seite der vorigen Gleichung bezeichnet:

$$5)\qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0.$$

Bei wirklicher Entwickelung der angedeuteten partiellen Differenzialquotienten findet sich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &+ 2\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2}\\ &+ \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2}\\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} &+ 2\,\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\\ &+ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2}.\end{aligned}$$

Durch Substitution in Nro. 5) giebt dies bei Vereinigung aller gleichartigen Grössen:

$$\begin{aligned}6)\qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &+ 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\\ &+ 3\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2}\\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^3 y}{dx^3} = 0.\end{aligned}$$

Man übersieht leicht, wie sich mittelst dieses Verfahrens, was freilich immer längere Rechnungen erfordert, die höheren Differenzialgleichungen der gegebenen Gleichung entwickeln lassen; aus ihnen lassen sich dann auch die Differenzialquotienten der Funktion y von x herleiten; denn es folgt jetzt aus Nro. 2):

$$7)\qquad \frac{dy}{dx} = -\,\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}},$$

wie schon bekannt ist; ferner aus Nro. 4):

$$8)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

und hier kann man den vorhergefundenen Werth von $\frac{dy}{dx}$ einsetzen; die Gleichung 6) führt dann weiter zur Kenntniss von $\frac{d^3y}{dx^3}$ u. s. f.

Auch bei Funktionen mehrer Variabelen bleibt das Verfahren ganz dasselbe, man unterlässt es jedoch, allgemeine Formeln aufzustellen, weil diese sehr verwickelt werden würden, und zieht es dagegen vor, in jedem gegebenen speziellen Falle die nöthige spezielle Rechnung auszuführen.

§. 15.

Vertauschung der unabhängigen Variabelen.

Bezeichnet x die unabhängige Variabele, in Beziehung auf welche ein oder mehrmal differenzirt wird, so ist nach den Prinzipien der Differenzialrechnung dx ein dem x willkürlich ertheilter und auf irgend eine Weise in Null übergehender Zuwachs, und es ist mithin dx unabhängig von x; anders verhält es sich mit dem Differenziale dy der abhängigen Variabelen y, denn für $y = f(x)$ ist $dy = f'(x) . dx$ und hier bildet dy eine Funktion von x, weil es aus zwei Faktoren besteht, deren erster x enthält. Nach dieser Bemerkung folgt bei zweiter Differenziation, indem dx als constanter Faktor gilt, $d^2y = df'(x) . dx = f''(x)\,dx . dx = f''(x)\,dx^2$ übereinstimmend mit den früheren, und ebenso würden für die ferneren Differenziationen dx^2, dx^3 etc. als Constanten anzusehen sein. Es kann nun im Verlaufe einer analytischen Untersuchung nöthig werden, dem x den Charakter der unabhängigen Veränderlichkeit abzunehmen und ihn auf eine andere, entweder bereits vorhandene oder erst neu einzuführende, Variabele zu übertragen; so z. B. könnte es bei der Untersuchung einer Curve, deren Abscissen x und deren Ordinaten y heissen, erforderlich sein, nicht die Abscisse, sondern die Ordinate als unabhängige Variabele anzusehen, oder man könnte in den Fall kommen, die Coordinaten einer durch stetige Bewegung entstandenen Curve als Funktionen der Zeit betrachten zu müssen, welche während der Bewegung verfliesst, wie dies namentlich in der Mechanik häufig geschieht. Schärfer aufgefasst wäre jetzt die Frage, was man an die Stelle der Differenzialquotienten

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots\ldots$$

zu setzen habe, wenn x nicht mehr als unabhängige Variabele, sondern als Funktion einer anderweiten unabhängigen Veränderlichen t angesehen wird, wodurch nun auch y in letzter Instanz eine Funktion von t geworden ist.

Beachtet man, dass y von x und x von t abhängt, also y eine zusammengesetzte Funktion bildet, so hat man nach den Lehren des §. 7., I.:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

und man erhält hieraus

1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Indem man beiderseits in Beziehung auf die unabhängige Variabele t differenzirt, wo nun dt constant ist, dx und dy dagegen von t abhängen, findet man links

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

und rechter Hand nach der Regel für die Differenziation der Quotienten

$$\frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

Stellt man beide Ausdrücke in eine Gleichung, so ergiebt sich durch Reduktion auf $\frac{d^2y}{dx^2}$

2) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Durch Wiederholung der Differenziation in Beziehung auf t findet man auf gleiche Weise

3)
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^3x}{dt^3}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}$$

Wie man auf diese Weise weitergehen kann, ist unmittelbar klar; allgemeine Formeln würden wegen der grossen Complication der Ausdrücke von keinem Nutzen sein.

Nehmen wir beispielsweise $t = y$, womit gesagt ist, dass nunmehr y als unabhängige Variabele gelten oder die Gleichung $y = f(x)$ umgekehrt werden soll $[x = F(y)]$, so ist

4)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

5)
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$$

6)
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2 - \frac{dx}{dy}\cdot\frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}$$

u. s. w.

Dasselbe Verfahren passt auch auf den Fall, wenn mehrere unabhängige Variabelen vorhanden sind, nur werden die Formeln noch etwas verwickelter. Man zieht es daher vor, die Rechnung erst in den gerade vorkommenden speziellen Fällen auszuführen, wie man es später sehen wird.

Cap. IV.

Untersuchungen über krumme Linien und Flächen.

§. 16.

Der Lauf ebener Curven.

I. Die erste Frage bei der Betrachtung ebener krummer Linien wird immer die nach dem Steigen und Fallen derselben sein, weil man gerade hieraus die Gestalt der Curve schon mit einiger Sicherheit abnehmen kann. Soll nun die Curve steigen, so muss die nächste Ordinate grösser als die vorhergehende sein; beim Heruntersteigen findet offenbar das Umgekehrte statt. Betrachten wir also x und $y=f(x)$, $x+\varDelta x$ und $y+\varDelta y=f(x+\varDelta x)$ als Coordinaten zweier Nachbarpunkte, so steigt oder fällt die Curve, je nachdem die Differenz

$$\varDelta y=f(x+\varDelta x)-f(x)$$

positiv oder negativ ist, wofür man wegen des als positiv vorausgesetzten $\varDelta x$ auch sagen kann, je nachdem der Differenzenquotient

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}.$$

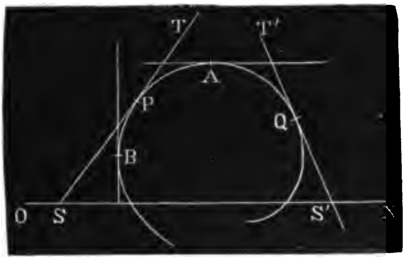
positiv oder negativ ist. Nun bildet aber der Differenzialquotient die Grenze des Differenzenquotienten und wenn diese Grenze positiv ausfällt, so muss auch der Differenzenquotient zuletzt positiv gewesen sein; ebenso würde ein negativer Differenzialquotient nur durch einen Differenzenquotienten entstehen können, der am Ende (d. h. für hinlänglich kleine $\varDelta x$) negativ war; nach diesen Bemerkungen erhellt unmittelbar die Richtigkeit des Satzes:

> Die Funktion $f(x)$ und ebenso die durch $y=f(x)$ charakterisirte Curve steigt oder fällt, je nachdem der Differenzialquotient $f'(x)$ positiv oder negativ ist.

Man wird dies geometrisch sogleich bestätigt finden, wenn man sich an die Gleichung $\tan\tau=f'(x)$ erinnert; für ein positives $f'(x)$

ist τ positiv, die Berührungsgerade ST liegt links in Fig. 9 und die Curve steigt; bei negativem $f'(x)$ wird τ negativ $= -OS'T'$ oder stumpf $= XS'T'$, die Berührende $S'T'$ fällt rechts, also entgegengesetzt, und die Curve fällt. Giebt man dem x einen solchen speziellen Werth, dass $f'(x) = 0$ wird, so liegt die Tangente der Abscissenachse parallel wie im Punkte A, und wird endlich $f'(x) = \infty$, so ist $\tau = 90^0$ und die Tangente läuft parallel zur Ordinatenachse wie im Punkte B.

Fig. 9.



II. Eine zweite Frage ist die nach der Convexität oder Concavität der Curven. Kehrt der Bogen PP'' (Fig. 10) der Abscissenachse die convexe Seite zu, so heisst dies nichts Anderes, als dass er zwischen seiner Sehne und der Abscissenachse liegt, dagegen ist

Fig. 10.

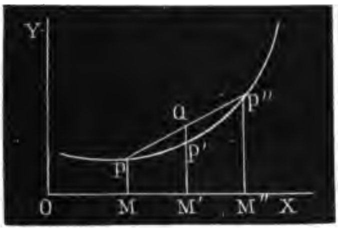
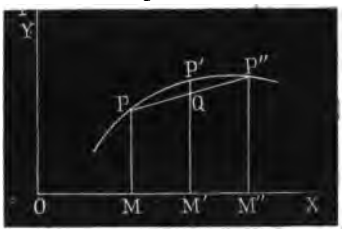


Fig. 11.



der Bogen concav (Fig. 11), wenn umgekehrt die Sehne zwischen dem Bogen und der Abscissenachse durchgeht. Schalten wir auf der Mitte der Sehne den Punkt Q ein, construiren die Coordinaten der Punkte P, Q, P'' und suchen noch die zu OM' gehörende Curvenordinate $M'P'$, so ist im Falle der convexen Krümmung

$$M'Q > M'P' \text{ oder } M'Q - M'P' \text{ positiv}$$

und bei concaver Krümmung

$$M'Q < M'P' \text{ oder } M'Q - M'P' \text{ negativ.}$$

Für $OM = x$, $MM' = \varDelta x$ und mit Rücksicht darauf, dass $M'Q$ das arithmetische Mittel zwischen MP und $M''P''$ ist, lautet dieses Kennzeichen, die Curve kehrt der Abscissenachse die convexe oder concave Seite zu, je nachdem der Ausdruck

$$\frac{f(x+2\varDelta x)+f(x)}{2} - f(x+\varDelta x) = \tfrac{1}{2}[f(x+2\varDelta x) - 2f(x+\varDelta x) + f(x)]$$

positiv oder negativ ist. Da es nur auf den eingeklammerten Ausdruck ankommt und andererseits $(\varDelta x)^2$ jederzeit positiv ist, so kann man sich auch des Quotienten

$$\frac{f(x+2\varDelta x)-2f(x+\varDelta x)+f(x)}{\varDelta x^2}$$

bedienen, um die obige Entscheidung in ganz derselben Weise zu geben. Ist nun für verschwindende $\varDelta x$

$$Lim\,\frac{f(x+2\varDelta x)-2f(x+\varDelta x)+f(x)}{\varDelta x^2}$$

positiv, so muss der ganze Ausdruck zuletzt positiv gewesen sein, und auf gleiche Weise kann dieser Grenzwerth nur negativ werden, wenn der Quotient zuletzt negativ war. Nach Formel 8) in §. 10. bedeutet der fragliche Grenzwerth den Differenzialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)$ und es findet daher eine convexe Krümmung statt, wenn $f''(x)$ positiv ist, eine concave, sobald $f''(x)$ negativ ausfällt. Diese Bemerkungen lassen sich auch auf den Fall übertragen, wo die Curve unterhalb der Abscissenachse liegt, also die Ordinaten MP, $M'P'$, $M'Q$ und $M''P''$ negativ sind, und zwar wird man sehr leicht finden, dass hier umgekehrt ein negatives Zeichen des $f''(x)$ der Convexität, ein positives der Concavität entspricht. Mit dem Vorigen vereinigt sich dies zu folgendem Satze:

> Die Curve, deren Gleichung $y=f(x)$ ist, kehrt der Abscissenachse die convexe oder concave Seite zu, je nachdem $f(x)$ und $f''(x)$ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.

Verschwindet $f''(x)$ für einen speziellen Werth von x, ohne dass zugleich $f(x)=0$ wird, so findet in dem betreffenden Punkte der Curve ein Uebergang von der einen Krümmungsart zur anderen statt; derartige Punkte heissen Inflexionspunkte.

Wie man mittelst der hier entwickelten Sätze den Lauf einer Curve verfolgen kann, wollen wir kurz an einem Beispiele zeigen. Es sei $y^2-x^4+x^5=0$ oder

1) $$y=x^2\sqrt{1-x}$$

die Gleichung einer Curve fünften Grades, so findet man

2) $$\frac{dy}{dx}=\frac{4x-5x^2}{2\sqrt{1-x}}=\frac{x(4-5x)}{2\sqrt{1-x}}$$

3) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{8-24x+15x^2}{4\sqrt{1-x}}$$

und schliesst hieraus Folgendes. Da in Nro. 1) das Wurzelzeichen ebensowohl positiv als negativ genommen werden darf, so entsprechen jeder Abscisse zwei gleich grosse entgegengesetzte Ordinaten; die Curve besteht demnach aus zwei congruenten Theilen von entgegengesetzter Lage. Betrachten wir deshalb nur den einen Theil, welcher dem positiv genommenen Wurzelzeichen entspricht. Da x^2 immer positiv ist, so bleibt das Produkt $x^2\sqrt{1-x}$ nach der eben gemachten Voraussetzung immer positiv und es liegt also der eine in Rede stehende Theil auf der einen Seite, etwa oberhalb, der Abscissenachse. Er ist reell, so lange $1-x$ positiv ausfällt, mithin von $x=-\infty$ bis $x=+1$, und hat mit der Abscissenachse zwei Punkte gemein, denn für $x=0$ und $x=+1$ wird jedesmal $y=0$. Ferner ergiebt sich aus Nro. 2), dass $f'(x)$ negativ ist von $x=-\infty$ bis $x=0$, positiv von $x=0$ bis $x=\frac{4}{5}$ und negativ von $x=\frac{4}{5}$ bis $x=1$; die Curve geht also aus dem Unendlichen bis zum Anfangspunkte der Coordinaten herab, wird hier von der Abscissenachse berührt, steigt von $x=0$ bis $x=\frac{4}{5}$, hat im Punkte $(x=\frac{4}{5}, y=\frac{16}{25}\sqrt{\frac{1}{5}})$ eine horizontale Tangente, und fällt von $x=\frac{4}{5}$ bis $x=1$; im letzteren Punkte ist die Tangente vertikal. Aus Nr. 3) erkennt man, dass $f''(x)$ positiv bleibt von $x=-\infty$ bis dahin, wo zum ersten Male $8-24x+15x^2=0$ wird, d. h. bis

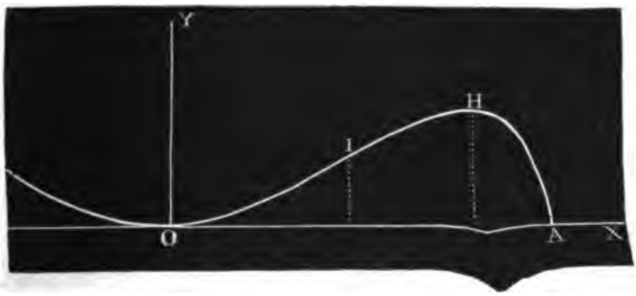
$$x=\frac{12-2\sqrt{6}}{15}=0{,}4735\ldots;$$

von da ab ist $f''(x)$ negativ bis wiederum $8-24x+15x^2=0$ wird, d. h. bis

$$x=\frac{12+2\sqrt{6}}{15}=1{,}126\ldots;$$

im letzteren Falle wird aber y imaginär und braucht nicht beachtet zu werden; die Curve ist demnach convex von $x=-\infty$ bis $x=0{,}4735\ldots$ und im Uebrigen (d. h. von $x=0{,}4735\ldots$ bis $x=1$) concav. Nach diesen Bemerkungen hat man bereits eine klare Vorstellung von dem Laufe der Curve; Fig. 12 giebt ein Bild

Fig. 12.



von dem besprochenen einen Theile derselben; der andere Zweig liegt unterhalb der Abscissenachse und ist dem ersten congruent.

§. 17.

Bogendifferenzial, Tangenten, Asymptoten und Normalen ebener Curven.

I. Die schon mehrmals benutzte Gleichung

$$1)\qquad \tan\tau = \frac{dy}{dx},$$

welche gilt, sobald x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer ebenen Curve bezeichnen, bildet die Grundlage für alle Construktionen, welche mit dem Probleme des Tangentenzeichens in irgend einem Zusammenhange stehen. Zuvörderst bemerken wir, dass aus der Gleichung 1) die folgenden entspringen

$$2)\qquad \cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},\quad \sin\tau = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

denen man auch die folgenden Formen geben kann:

$$3)\qquad \cos\tau = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}},\quad \sin\tau = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Hier besitzt der Nenner eine geometrische Bedeutung. Je kleiner nämlich dx und dy sind, desto eher ist es erlaubt, den Bogen einer Curve mit seiner Sehne zu verwechseln, also das aus dx, dy und dem zugehörigen Bogen, welcher ds heissen möge, gebildete Dreieck als geradliniges Dreieck anzusehen; dass diese Vorstellung in der That richtig ist, beweist die daraus folgende Gleichung

$\tan\tau = \frac{dy}{dx}$, welche mit der Gleichung 1) übereinstimmt. Dann kann man aber weiter schliessen, dass

$$4)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2$$

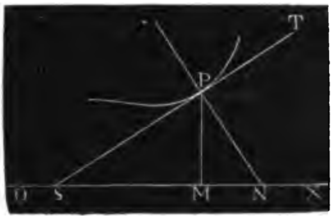
sein müsse, wo nun ds das Bogendifferenzial bezeichnet, und es ist daher auch

$$5)\qquad \cos\tau = \frac{dx}{ds},\quad \sin\tau = \frac{dy}{ds},$$

wovon wir öfter Gebrauch machen werden.

II. Um eine Tangente an den Punkt xy zu legen, kann man entweder den Winkel τ aus der Gleichung 1) bestimmen und sein Complement MPS (Fig. 13) an MP antragen, oder eine von den Linien MS und PS construiren. Die erste heisst die **Tangente**, letztere die **Subtangente**, und man findet leicht

Fig. 13.



$$6)\qquad Tang. = \frac{y}{\sin\tau} = y\,\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{dy}{dx}} = y\,\frac{ds}{dy},$$

$$7)\qquad Sbtg. = y\cot\tau = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = y\,\frac{dx}{dy}.$$

Heissen ξ und η die Coordinaten irgend eines Punktes der Tangente, so ist

$$\eta - y = (\xi - x)\tan\tau,$$

wie man leicht bei wirklicher Construktion der Differenzen $\xi - x$ und $\eta - y$ bemerkt, und man hat daher

$$8)\qquad \eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x)$$

als **Gleichung der Tangente**. Man könnte statt derselben auch schreiben

$$9)\qquad \eta = f'(x)\,.\,\xi + f(x) - xf'(x),$$

indem man $f(x)$ und $f'(x)$ für y und $\frac{dy}{dx}$ setzt.

III. Wenn die in Rede stehende Curve in's Unendliche geht und sich für unendlich wachsende x die Ausdrücke

$$f'(x) \text{ und } f(x) - xf'(x)$$

bestimmten Grenzen nähern, so giebt es eine bestimmte Grenzlage der Tangenten, welcher sie näher und näher kommen, je weiter der Punkt xy fortrückt. Diese feste Gerade ist eine **Asymptote** der Curve und ihre Gleichung ergiebt sich unmittelbar aus der Gleichung der Tangente; setzen wir nämlich bei unendlich wachsenden x

$$10)\qquad Lim\,f'(x) = A,\quad Lim\,[f(x) - xf'(x)] = B,$$

so ist die **Gleichung der Asymptote**:

$$11)\qquad \eta = A\xi + B.$$

So hat man z. B. für die Hyperbel, deren Gleichung

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = f(x)$$

sein möge,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}};$$

hieraus ergiebt sich für die Subtangente:

$$MS = y \frac{a\sqrt{x^2 - a^2}}{bx} = \frac{a^2 y^2}{b^2 x},$$

ferner als Gleichung der Tangente

$$\eta = \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \xi + \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= \frac{b}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} \xi - \frac{ab}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

woraus für unendlich wachsende x die Gleichung der Asymptote:

$$\eta = \frac{b}{a} \xi$$

hervorgeht, wie schon aus der analytischen Geometrie bekannt ist.

IV. Errichtet man im Punkte P eine Senkrechte PN auf der Tangente, so entsteht die Normale der Curve; MN heisst die Subnormale (Fig. 13). Aus der Bemerkung, dass $\angle MPN = \angle MST = \tau$ ist, findet man leicht:

$$12) \qquad Norm. = \frac{y}{\cos\tau} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y \frac{ds}{dx}$$

$$13) \qquad Sbnm. = y \tan\tau = y \frac{dy}{dx};$$

ferner, wenn ξ und η die Coordinaten irgend eines Punktes der Normale bedeuten,

$$\eta - y = (x - \xi) \cot\tau$$

oder

$$14) \qquad \eta - y = -\frac{dx}{dy} (\xi - x)$$

als Gleichung der Normale.

V. Um den Gebrauch der obigen Formeln zu zeigen, geben wir einige Beispiele für die Construktion von Tangenten und Normalen.

α. Die Kegelschnitte. Rechnet man die Coordinaten x

und y von dem Endpunkte der grossen Achse eines Kegelschnittes an, so ist bekanntlich

15) $$y^2 = 2px + qx^2$$

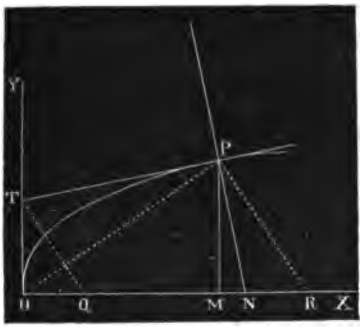
die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, und bedeutet darin p den Halbparameter (die Ordinate im Brennpunkte). Man findet hieraus

16) $$y\frac{dy}{dx} = p + qx \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \frac{p+qx}{y},$$

mithin für die Gleichung der Tangente

$$\eta - y = \frac{p+qx}{y}(\xi - x).$$

Fig. 14.



Setzen wir $\xi = 0$ und schreiben η_0 für η, so ist η_0 das Stück OT (Fig. 14), welches die Tangente von der Ordinatenachse abschneidet, und nach dem Vorigen hat man

$$\eta_0 = y - \frac{p+qx}{y}x$$
$$= \frac{y^2 - px - qx^2}{y}$$

oder, vermöge des Werthes von y^2,

$$\eta_0 = \frac{px}{y};$$

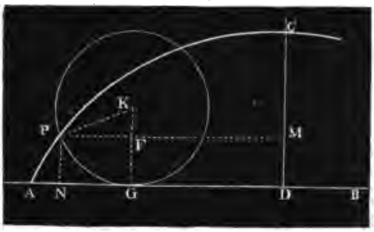
dies giebt folgende Construktion der Tangente: man nehme $OQ = p$, fälle von Q auf OP eine Senkrechte, welche die Ordinatenachse in T schneidet und verbinde endlich T mit P durch eine Gerade. Was ferner die Normale anbelangt, so bemerke man, dass die Gleichung 16) auch in der Form

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} - p$$

dargestellt werden kann, wo die linke Seite die Subnormale bedeutet; man hat dann folgende Construktion der Normale (Fig. 14): auf OP errichte man in P eine Senkrechte, welche der Abscissenachse in R begegnet, nehme dann $RN = p$, so ist NP die Normale.

β. Die Cycloide ist bekanntlich der Weg, den irgend ein Punkt eines Kreises beschreibt, wenn letzterer, ohne zu gleiten, auf einer Geraden fortgewälzt wird, sich also die Peripherie des Kreises auf der Geraden abwickelt. Ist AB die gegebene Gerade (Fig. 15), A der Anfangspunkt der Bewegung, $GK = r$, $\angle GKP$ in Theilen des Halbmessers ausgedrückt $= t$,

Fig. 15.



$$AN = u,$$
$$NP = v,$$

so hat man

$$u = AG - GN$$
$$= Arc\, GP - FP$$
$$= rt - r \sin t$$
$$v = NP = GK - FK = r - r \cos t.$$

Für $t = \pi$, also nach einer halben Umwälzung wird $u = AD = r\pi$ und $v = CD = 2r$. Nehmen wir C als Anfangspunkt neuer Coordinaten, nämlich $CM = x$ und $MP = y$, so ist $x = 2r - v$, $y = r\pi - u$ oder

17) $$x = r(1 + \cos t), \quad y = r(\pi - t + \sin t).$$

Hieraus folgt, indem man t, den sogenannten Wälzungswinkel, als unabhängige Variable ansieht:

$$\frac{dx}{dt} = -r \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = -r(1 - \cos t),$$

ferner durch Division

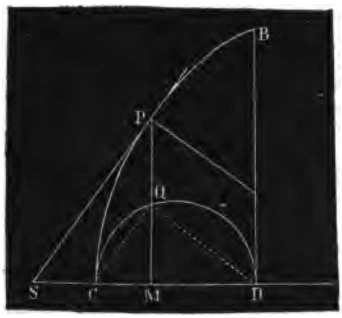
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos t}{\sin t} = \frac{1 - \cos t}{\sqrt{1 - \cos^2 t}} = \sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}}.$$

Andererseits folgt aus Nro. 17): $1 + \cos t = \frac{x}{r}$, $1 - \cos t = \frac{2r - x}{r}$

und mithin ist jetzt:

18) $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r - x}{x}} = \frac{\sqrt{2rx - x^2}}{x}.$$

Fig. 16.



Dies hat einen sehr einfachen geometrischen Sinn. Denkt man sich nämlich über $CD = 2r$ (Fig. 16) den Kreis CQD construirt und die zu $CM = x$ gehörende Ordinate desselben aufgesucht, so ist dieselbe

$$MQ = \sqrt{2rx - x^2}$$

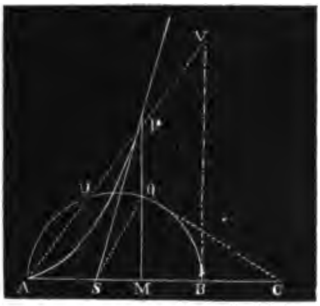
und es folgt jetzt aus Nro. 18), dass

$$\tan \tau = \frac{MQ}{CM} = \tan MCQ$$

oder $\angle \tau = \angle MCQ$, d. h. die Tangente parallel CQ und ebenso die Normale parallel DQ ist.

γ. Die Cissoide entsteht auf folgende Weise. Ueber der Geraden $AB = 2r$ als Durchmesser (Fig. 17) ist ein Kreis beschrieben und im Punkte B eine Senkrechte auf AB errichtet; zieht man von A aus beliebige Gerade, welche den Kreis in U, die Senkrechte in V schneiden und nimmt immer $VP = AU$, so erhält man beliebig viele Punkte P der Cissoide. Für $AM = x$, $MP = y$ findet man nach dieser Angabe

Fig. 17.



19) $$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$$

als Gleichung der Curve; die Differenziation giebt

20) $$y\frac{dy}{dx} = \frac{(3r - x)\,x^2}{(2r - x)^2}.$$

Dividirt man die erste Gleichung durch die zweite, so wird

$$y\frac{dx}{dy} = \frac{(2r - x)\,x}{3r - x} = \frac{2rx - x^2}{3r - x}.$$

Die linke Seite ist die Subtangente, rechts bedeutet $2rx - x^2$ das Quadrat der zur Abscisse $AM = x$ gehörenden Kreisordinate MQ, und vermöge dieser Bemerkung hat man folgende Tangentenconstruktion: man nehme $BC = r$, ziehe CQ und darauf eine Senkrechte, welche, von Q ausgehend, die Abscissenachse in S schneidet, die Gerade SP ist dann die Tangente. Für die Construktion der Normale giebt es nichts Kürzeres, als erst die Tangente und auf diese eine Senkrechte zu legen.

§. 18.

Krümmungskreis, Evolute.

I. Die Gleichung der Normale am Punkte xy einer Curve lässt sich für $y = f(x)$ und $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ sehr leicht auf folgende Form bringen:

1) $$f'(x)\,.\,\eta + \xi = x + f(x)\,f'(x),$$

für einen zweiten Punkt der Curve, dessen Coordinaten $x+\delta$ und $y_1 = f(x+\delta)$ sein mögen, würde auf ganz gleiche Weise sein:

$$2)\qquad f'(x+\delta)\,.\,\eta+\xi = x+\delta+f(x+\delta)\,f'(x+\delta).$$

Die beiden Normalen, deren Gleichungen hier aufgestellt sind, werden sich im Allgemeinen schneiden und zwar findet man die Coordinaten des Durchschnittes dadurch, dass man in 1) und 2) ξ und η als Unbekannte ansieht und auf algebraische Weise bestimmt. Man erhält so:

$$\eta = \frac{\delta + f(x+\delta)\,f'(x+\delta) - f(x)\,f'(x)}{f'(x+\delta) - f'(x)},$$

oder, indem man beiderseits $y = f(x)$ abzieht:

$$\eta - y = \frac{\delta + f(x+\delta)\,f'(x+\delta) - f(x)\,f'(x+\delta)}{f'(x+\delta) - f'(x)}$$

und aus Nro. 1):

$$\xi - x = \frac{\delta + f(x+\delta)\,f'(x+\delta) - f(x)\,f'(x+\delta)}{f'(x+\delta) - f'(x)}\,f'(x).$$

Dividirt man in beiden Gleichungen Zähler und Nenner durch δ, so ist auch

$$3)\qquad \xi - x = -\frac{1 + \dfrac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}\,f'(x+\delta)}{\dfrac{f'(x+\delta)-f'(x)}{\delta}}\,f'(x),$$

$$4)\qquad \eta - y = +\frac{1 + \dfrac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}\,f'(x+\delta)}{\dfrac{f'(x+\delta)-f'(x)}{\delta}}.$$

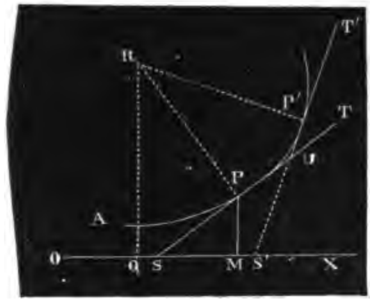
und hieraus ergiebt sich für $\delta = 0$, d. h. wenn die beiden Punkte, durch welche Normalen gelegt waren, in einander fallen:

$$5)\qquad \xi - x = -\frac{1+f'(x)f'(x)}{f''(x)}\,f'(x) = -\frac{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\,\frac{dy}{dx},$$

$$6)\qquad \eta - y = +\frac{1+f'(x)\,f'(x)}{f''(x)} = +\frac{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}.$$

Der Durchschnitt zweier benachbarter Normalen rückt also nicht ins Unendliche fort, wenn die Normalen zusammenfallen, sondern nur bis zu einem bestimmten Punkte, dessen Coordinaten ξ und η aus den Gleichungen 5) und 6) entnommen werden können. Die ses für den ersten Augenblick überraschende Resultat erklärt sich auch geometrisch leicht. Denken wir uns in Fig. 18 die Normalen an den Punkten P und P' bis zu ihrem Durchschnitte R verlängert, so sind die Längen von PR und $P'R$ um so weniger verschieden, je näher P und P' aneinander liegen. Nehmen wir daher näherungsweise $P'R = PR$, so lässt sich R als Mittelpunkt eines Kreises ansehen, der die Punkte P und P' und in diesen zugleich die Tangenten PT und $P'T'$ mit der Curve gemein hat, der sich also unter allen sonstigen durch P und P' möglichen Kreisen jedenfalls der Curve am genauesten anschliesst, oder wie man zu sagen pflegt, mit der Curve fast gleiche Krümmung besitzt. Diese nur näherungsweise richtigen Behauptungen erhalten volle Gültigkeit, wenn P' und P zusammenfallen; der nunmehr durch die Gleichungen 5) und 6) bestimmte Punkt $\xi\eta$ heisst dann der **Krümmungsmittelpunkt**, und das zwischen den Punkten xy und $\xi\eta$ enthaltene Stück der Normale der **Krümmungshalbmesser**; nennen wir ϱ diese Linie, so ist

Fig. 18.



$$\varrho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$$

und nach dem Vorigen findet sich

$$7)\qquad \varrho = \frac{\sqrt{1+[f'(x)]^2}^{\,3}}{f''(x)} = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{ds^3}{dx\,.\,d^2y}.$$

Der aus $\xi\eta$ mit ϱ beschriebene Kreis, der **Krümmungskreis**, ist nun die Curve, welche durchaus gleichförmig dieselbe Krümmung besitzt, welche der Curve $y = f(x)$ im Punkte xy zukommt. Man kann übrigens vermöge dieser Vorstellungsweise auch direkt zu der Formel 7) gelangen; ist nämlich τ wie gewöhnlich der Winkel MST (Fig. 18), und der Bogen $AP = s$, so ändern sich τ und s um $\varDelta\tau$ und $\varDelta s$, wenn x um $\varDelta x$ zunimmt; diese Aenderungen sind in der Figur sichtbar, nämlich

$$\varDelta s = Arc\; PP'$$

$$\varDelta\tau = \angle XS'T' - \angle XST = \angle T'UT = \angle P'RP.$$

Ferner hat man unter der Voraussetzung, dass PP' ein mit dem Halbmesser $PR = \varrho$ beschriebener Kreisbogen ist:

$$\varDelta s = \varrho \,.\, \varDelta \tau \text{ oder } \varrho = \frac{\varDelta s}{\varDelta \tau},$$

folglich genau bei verschwindenden $\varDelta x$, $\varDelta s$, $\varDelta \tau$

8) $$\varrho = \frac{ds}{d\tau}.$$

Vermöge der Gleichung $\tan \tau = \frac{dy}{dx}$ oder umgekehrt $\tau = Arctan \frac{dy}{dx}$ ist aber

$$d\tau = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\frac{d^2 y}{dx}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

und diese Substitution macht die Formel 8) identisch mit der unter Nro. 7) gefundenen.

Nimmt man das in unseren Formeln vorkommende Wurzelzeichen immer positiv, so hängt das Vorzeichen des ϱ von dem Vorzeichen des Nenners $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ab; dies heisst geometrisch, der Krümmungshalbmesser kann zwei verschiedene einander entgegengesetzte Lagen haben und, wenn die eine Lage dem Falle der Convexität entspricht, so gehört die entgegengesetzte Lage zum Falle der Concavität, wie man auch in der Figur bestätigt finden wird.

Für die geometrische Construktion des Krümmungshalbmessers ist die Bemerkung von Vortheil, dass man die Gleichung 7) durch die folgende ersetzen kann:

9) $$\varrho = \frac{N^3}{y^3} : \frac{d^2 y}{dx^2},$$

worin N die Länge der Normale bezeichnet; letztere ergiebt sich bei der Construktion von selbst, sobald man die Lage der Tangente oder die Subnormale bestimmt hat. So findet man z. B. durch zweimalige Differenziation der Kegelschnittsgleichung

$$y = \sqrt{2px + qx^2}$$

für den zweiten Differenzialquotienten den Werth

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3},$$

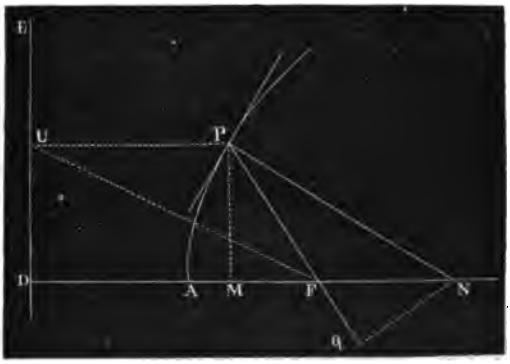
mithin für den Krümmungshalbmesser die sehr einfache Formel:

10) $$\varrho = -\frac{N^3}{p^2} = -N\left(\frac{N}{p}\right)^2,$$

welche sich mittelst folgender Betrachtung construiren lässt. In

Fig. 19 sei DE die Direktrix eines Kegelschnittes, F sein Brenn-

Fig. 19.



punkt, $AF = f$, $AM = x$, $FP = r$, so stehen bekanntlich die Entfernungen FP und FU in einem constanten Verhältniss, welches ε heissen möge, und es ist daher gleichzeitig

$$\frac{r}{PU} = \varepsilon, \quad \frac{f}{AD} = \varepsilon.$$

Berücksichtigt man, dass in der ersten Gleichung $PU = AD + x$ ist, und eliminirt AD aus beiden Gleichungen, so findet man

$$r = f + \varepsilon x.$$

Vermöge der Gleichung $y^2 = r^2 - (f - x)^2$ erhält man hieraus

$$y^2 = 2(1 + \varepsilon) f \,.\, x + (\varepsilon^2 - 1)\, x^2$$

und durch Vergleichung mit der gewöhnlichen Form der Kegelschnittsgleichung

$$p = (1 + \varepsilon) f, \quad q = \varepsilon^2 - 1.$$

Für die Subnormale $MN = p + qx$ ergiebt sich nun

$$MN = (1 + \varepsilon) f + (\varepsilon^2 - 1)\, x,$$

und wenn man $MF = f - x$ hiervon abzieht, so bleibt

$$FN = \varepsilon f + \varepsilon^2 x = \varepsilon r,$$

woraus u. A. die Gleichheit der Winkel FUP und FPN, also eine neue Construktion der Normale NP folgt. Zieht man NQ senkrecht auf PF, so erhält man zwei Dreiecke, FNQ und FPM, aus deren Aehnlichkeit die Beziehung

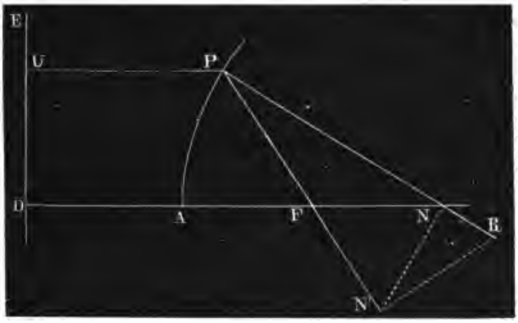
$$FQ = \frac{FN}{FP} \cdot FM = \varepsilon (f - x)$$

entspringt, welche erkennen lässt, dass $PQ = FQ + r = \varepsilon(f - x) + f + \varepsilon x = (1 + \varepsilon) f = p$, und mithin

$$\sec NPF = \frac{NP}{PQ} = \frac{N}{p}$$

sein muss, wo N die Normale bezeichnet. Nachdem man hierdurch die geometrische Bedeutung des in der Formel 10) vorkommenden Quotienten $\frac{N}{p}$ gefunden hat, ist es leicht, den Krümmungshalbmesser geometrisch darzustellen, und zwar besteht die Construktion sehr einfach darin, dass man in N (Fig. 20) auf der Normale eine

Fig. 20.



Senkrechte errichtet, welche den verlängerten Vector PF in N' schneidet, und nachher wieder in N' eine Gerade senkrecht auf PN' zieht, bis sie der Normalen in R begegnet; R ist dann der Krümmungsmittelpunkt und PR der Krümmungshalbmesser.

Ein anderes sehr einfaches Beispiel bildet die Cycloide; man wird leicht finden, dass ihr Krümmungshalbmesser das Doppelte der Normale ausmacht.

II. Die Formeln zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes enthalten in letzter Instanz nur drei Veränderliche, nämlich x, ξ und η, da man, wenigstens bei entwickelten Gleichungen von der Form $y = f(x)$, sowohl y als die Differenzialquotienten von y durch x ausdrücken kann. Denkt man sich aus diesen zwei Gleichungen zwischen x, ξ und η die erste Variabele eliminirt, so bleibt nur eine Gleichung zwischen ξ und η übrig; eine solche Beziehung zwischen den Coordinaten irgend eines Krümmungsmittelpunktes ist nichts Anderes, als die Gleichung der Curve, welche die verschiedenen Krümmungsmittelpunkte in ihrer Aufeinanderfolge bilden. Diesen geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte nennt man die Evolute der gegebenen Curve. So findet man z. B. für die Parabel mittelst der angegebenen Elimination

$$11)\qquad \eta^2 = \frac{8}{27}\frac{(\xi - p)^3}{p}$$

als Gleichung der Parabelevolute, welche eine Linie dritten Grades bildet. Für die Cycloide gilt der bemerkenswerthe Satz, dass ihre Evolute wiederum eine, mit ihr congruente, Cycloide ist, die jedoch eine andere Lage hat. — Die Benennung Evolute kommt übrigens daher, dass man sich die ursprüngliche Curve durch Abwickelung eines um die Evolute gelegten Fadens entstanden denken kann.

§. 19.

Formeln für Polarcoordinaten.

Giebt man die Gleichung einer krummen Linie nicht in rechtwinkligen, sondern in Polarcoordinaten an, so ist meistentheils der Winkel zwischen dem Radiusvector und der Abscissenachse die unabhängige Variabele, und jener Leitstrahl die abhängige Variabele. Für $OM = x$, $MP = y$, $OP = r$, $\angle MOP = u$ gelten zunächst die Gleichungen:

$$1)\qquad x = r\cos u,\quad y = r\sin u,$$

welche zum Uebergange von dem ersten zum zweiten Coordinatensystem dienen; löst man die an die Stelle von $y = f(x)$ tretende Gleichung $r \sin u = f(r\cos u)$ nach r auf, so erhält man ein Resultat von der Form:

$$2)\qquad r = \varphi(u),$$

woraus sich auch die Differenzialquotienten

$$\frac{dr}{du},\ \frac{d^2r}{du^2},\ \dots$$

ableiten lassen. Es fragt sich nun, welche neue Formeln an die Stelle der früheren treten, wenn man die vorstehenden Differenzialquotienten statt der früheren einführen will.

Die Formeln 1) geben zunächst durch Differenziation in Beziehung auf die neue unabhängige Variabele u:

$$3)\qquad \frac{dx}{du} = \frac{dr}{du}\cos u - r\sin u$$

$$4)\qquad \frac{dy}{du} = \frac{dr}{du}\sin u + r\cos u;$$

folglich durch Division unter Berücksichtigung der Formel $\frac{dy}{dx} = \tan\tau$:

$$\tan\tau = \frac{\frac{dr}{du}\sin u + r\cos u}{\frac{dr}{du}\cos u - r\sin u} = \frac{\frac{dr}{du}\tan u + r}{\frac{dr}{du} - r\tan u}.$$

Die Reduktion auf $\frac{dr}{du}$ giebt weiter:

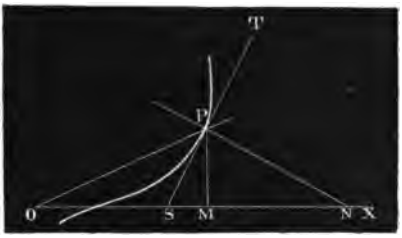
$$\frac{dr}{du} = r\frac{1+\tan\tau\tan u}{\tan\tau - \tan u} = r\frac{1}{\tan(\tau - u)},$$

d. i.

5) $$\cot(\tau - u) = \frac{1}{r}\frac{dr}{du}.$$

Durch diese Formel, die man auch durch eine sehr einfache geometrische Betrachtung finden kann, wird das Problem des Tangentenziehens unmittelbar gelöst, denn es ist $\tau - u$ der Winkel, welchen die Tangente mit dem Radiusvector bildet ($\angle OPS$ in Fig. 21).

Fig. 21.



Nennen wir ω den Winkel PNX, welchen die Normale mit der Achse der x einschliesst, so ist $\omega = \frac{1}{2}\pi + \tau$ oder $\tau - u = \omega - u - \frac{1}{2}\pi$, und es folgt jetzt aus 5):

6) $$\tan(\omega - u) = -\frac{1}{r}\frac{dr}{du},$$

womit sich der Winkel $\omega - u$ zwischen Normale und Radiusvector bestimmt.

II. Die Formel für das Bogendifferenzial

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

verwandelt sich mittelst der Werthe von dx und dy aus Nro. 3) und 4) in die folgende:

7) $$ds^2 = dr^2 + (r\,du)^2$$

oder

8) $$ds = du\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{du}\right)^2},$$

was man durch eine geometrische Betrachtung leicht prüfen kann.

III. Um auch den Krümmungshalbmesser in Polarcoordinaten auszudrücken, bemerken wir zunächst, dass man mittelst der Formel

$$\sin^2 A = \frac{1}{1+\cot^2 A}$$

aus der Gleichung 5) die folgende ableiten kann:

$$\sin^2(\tau - u) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{du}\right)^2}.$$

Differenzirt man dagegen die Gleichung 5), indem man r und τ als Funktionen der unabhängigen Variabelen u betrachtet, so wird

$$-\frac{\frac{d\tau}{du}-1}{\sin^2(\tau-u)} = -\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{du}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{d^2 r}{du^2}.$$

Diese Gleichung multipliziren wir mit der vorhergehenden und reduziren auf $\frac{d\tau}{du}$; dies giebt:

$$\frac{d\tau}{du} = \frac{1+2\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{du}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{d^2 r}{du^2}}{1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{du}\right)^2}.$$

Wenn man mit dieser Gleichung in die folgende

$$\frac{ds}{du} = r\sqrt{1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{du}\right)^2}$$

dividirt, so erscheint linker Hand $\frac{ds}{d\tau}$, d. h. der Krümmungshalbmesser, nämlich:

$$9)\qquad \varrho = \frac{r\left[1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{du}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{1+2\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{du}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{d^2r}{du^2}} = \frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{du}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\left(\frac{dr}{du}\right)^2 - r\frac{d^2r}{du^2}}.$$

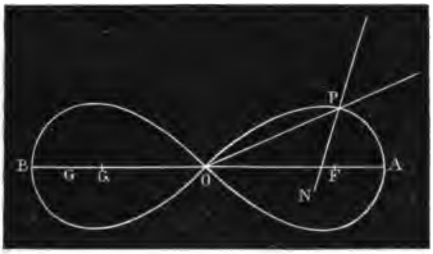
Von besonderem Vortheil sind die hier entwickelten Formeln in den Fällen, wo die Polargleichung einer Curve einfacher, als die Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten ist. Sucht man z. B. den geometrischen Ort aller Punkte P, deren Abstände von zwei festen Punkten F und G (Fig. 22) mit einander multiplizirt eine Rechtecksfläche geben, die constant und zwar gleich dem Quadrate über $\frac{1}{2} FG$ ist, so findet man für $OF = OG = c$, $OM = x$, $MP = y$:

$$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(c+x)^2 + y^2} = c^2,$$

oder nach gehöriger Reduktion

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$$

Fig. 22.



als Gleichung dieses geometrischen Ortes; derselbe ist eine Curve vierten Grades, welche den Namen **Lemniscate** führt. In Polarcoordinaten wird die Gleichung dieser Linie:

$$r^2 = 2c^2 \cos 2u,$$

oder wenn wir $c\sqrt{2}$ kurz mit a bezeichnen:

$$r = a\sqrt{\cos 2u}.$$

Man erhält hieraus:

$$\frac{dr}{du} = -a \frac{\sin 2u}{\sqrt{\cos 2u}}$$

und mithin nach den Formeln 5) und 6):

$$\cot(\tau - u) = -\tan 2u, \quad \tan(\omega - u) = \tan 2u,$$

woraus hervorgeht, dass der Winkel zwischen Normale und Leitstrahl das Doppelte von dem Winkel zwischen Leitstrahl und Abscissenachse ausmacht.

Andere bemerkenswerthe Beispiele bieten die **Spiralen** dar, namentlich die Archimedeische Spirale $r = au$, die parabolische $r = \sqrt{2au}$, die hyperbolische $r = \frac{a}{u}$, und die logarithmische Spirale, für welche $r = e^{au}$ ist.

§. 20.

Die Tangenten und Normalebenen an doppelt gekrümmten Linien.

I. Eine Curve von doppelter Krümmung hat bekanntlich zwei Gleichungen, weil man sie als den Durchschnitt zweier Flächen betrachten kann; sind die Gleichungen der letzteren gegeben, etwa in der Gestalt:

1) $$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0,$$

so kann man aus ihnen einmal z und einmal y eliminiren, und man erhält dann zwei neue Gleichungen von der Form:

2) $$y = \varphi(x) \text{ und } z = \psi(x),$$

welche nichts Anderes als die Gleichungen der beiden Projektionen unserer Curve auf die xy und xz Ebene sind. Es mögen nun zwei Punkte P und P' der Curve betrachtet werden, deren Coordinaten x, y, z und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ heissen sollen. Die Länge der Sehne PP' ist dann

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

und wenn wir α, β, γ die Winkel nennen, welche diese Gerade mit den drei Coordinatenachsen einschliesst, so ist

$$\cos\alpha = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = \frac{\frac{\Delta z}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}.$$

Für verschwindende Δx rücken die Punkte P und P' zusammen, die Sekante wird zur Tangente und aus den vorigen Gleichungen werden die folgenden:

3) $$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \end{cases}$$

wo nunmehr α, β, γ die Winkel bedeuten, welche die Tangente im Punkte xyz mit den drei Coordinatenachsen einschliesst.

Der in diesen Formeln vorkommende gemeinschaftliche Nenner hat einen geometrischen Sinn. Bezeichnen wir nämlich den Bogen PP' mit Δs und die gleichnamige Sehne mit $\Delta \sigma$, so findet folgende Gleichung statt:

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{\Delta \sigma} \cdot \frac{\Delta \sigma}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{\Delta \sigma} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}$$

und für $\Delta x = 0$, wobei $\frac{\Delta s}{\Delta \sigma}$ die Einheit zur Grenze erhält, wird hieraus:

$$4)\qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

oder

$$5)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Durch Substitution von Nro. 4) in Nro. 3) hat man jetzt:

$$6)\qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Um die Gleichungen der Tangente im Punkte xyz zu finden, betrachten wir einen beliebigen Punkt der Tangente, nennen ξ, η, ζ seine Coordinaten und r seine Entfernung vom Punkte x, y, z; es finden dann folgende drei Gleichungen statt:

$$\xi - x = r\cos\alpha, \quad \eta - y = r\cos\beta, \quad \zeta - z = r\cos\gamma,$$

aus denen man leicht die nachstehenden zwei bildet:

$$\eta - y = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(\xi - x), \quad \zeta - z = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(\xi - x).$$

Setzt man in diesen für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ihre Werthe, so hat man unmittelbar die Gleichungen der Tangente, nämlich:

$$7)\qquad \eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x), \quad \zeta - z = \frac{dz}{dx}(\xi - x).$$

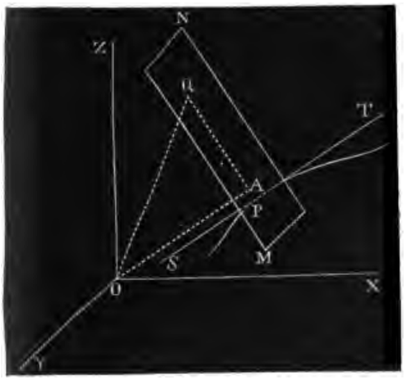
Man erkennt aus ihnen, dass die Projektionen der Tangente die Projektionen der Curve berühren, was sich voraussehen liess.

II. Eine Ebene, senkrecht auf die Tangente durch den Berührungspunkt der letzteren gelegt, heisst eine Normalebene der doppelt gekrümmten Curve; ihre Gleichung findet sich auf folgendem Wege. Die Coordinaten eines beliebigen Punktes Q (Fig. 23) der Normalebene mögen ξ, η, ζ sein, u, v und w mögen die Winkel bezeichnen, welche der Radiusvector OQ mit den drei Coordinatenachsen bildet; es ist dann zunächst:

$$8)\qquad \xi = OQ \,.\, \cos u, \quad \eta = OQ \,.\, \cos v, \quad \zeta = OQ \,.\, \cos w.$$

Sei ferner OA die Senkrechte vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Normalebene, so ist OA parallel der Tangente PT und bildet folglich mit den Achsen dieselben Winkel α, β, γ wie PT. Nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie hat man nun:

Fig. 23.



$$\cos AOQ = \cos\alpha \,.\, \cos u + \cos\beta \,.\, \cos v + \cos\gamma \,.\, \cos w,$$

folglich durch Multiplikation mit OQ unter Rücksicht auf die Gleichungen 8):

$$OQ \,.\, \cos AOQ = \cos\alpha \,.\, \xi + \cos\beta \,.\, \eta + \cos\gamma \,.\, \zeta.$$

Das linker Hand stehende Produkt ist nichts Anderes, als die Entfernung OA, welche p heissen möge; man hat daher als Gleichung der Ebene MN:

$$p = \cos\alpha \,.\, \xi + \cos\beta \,.\, \eta + \cos\gamma \,.\, \zeta.$$

Diese Gleichung muss auch für den Punkt P gelten, durch welchen die Normalebene gelegt ist; subtrahirt man die so entstehende Gleichung

$$p = \cos\alpha \,.\, x + \cos\beta \,.\, y + \cos\gamma \,.\, z$$

von der obigen, so bleibt:

$$0 = \cos\alpha \,.\, (\xi - x) + \cos\beta \,.\, (\eta - y) + \cos\gamma \,.\, (\zeta - z),$$

oder nach Division mit $\cos\alpha$ und vermöge der Werthe von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$:

$$9) \qquad \xi - x + \frac{dy}{dx}(\eta - y) + \frac{dz}{dx}(\zeta - z) = 0,$$

und dies ist die Gleichung der Normalebene in ihrer brauchbarsten Gestalt.

Die in unseren Formeln vorkommenden Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ kann man aus den Gleichungen 2) unmittelbar erhalten, wenn die Gleichungen der Curve in dieser Form gegeben sind; kennt man aber nur die beiden Flächen, als deren Durchschnitt die Linie angesehen wird, und lässt sich die im Anfange dieses Paragraphen angedeutete Elimination nicht ausführen, so muss man die Gleichungen 1) zur Entwickelung von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ benutzen. Die Differenziation derselben giebt unter der Rücksicht, dass in ihnen eine unabhängige Variabele x und zwei abhängige Variabele y und z vorkommen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0.$$

Hieraus findet sich durch Elimination:

$$10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial z}} \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}} \end{aligned} \right.$$

und dies ist jetzt in unseren Formeln zu substituiren.

§. 21.

Die Krümmungsverhältnisse räumlicher Curven.

So wie wir in §. 18. den Grenzpunkt aufsuchten, in welchen der Durchschnitt zweier benachbarten Normalen einer ebenen Curve überging, wenn die Normalen in einander fielen, so können wir bei doppelt gekrümmten Curven die Grenzlinie bestimmen, in welche der Durchschnitt zweier benachbarten Normalebenen beim Zusammenfallen dieser Ebenen fortrückt. Zu diesem Zwecke mögen x, y, z die Coordinaten des Punktes P und $x' = x + \Delta x$, $y' = y + \Delta y$, $z' = z + \Delta z$ die eines zweiten Punktes P' sein; die Gleichungen der durch P und P' gelegten Normalebenen sind dann nach Nro. 9) des vorigen Paragraphen:

$$1) \qquad (\xi - x)\, dx + (\eta - y)\, dy + (\zeta - z)\, dz = 0,$$
$$(\xi - x')\, dx' + (\eta - y')\, dy' + (\zeta - z')\, dz' = 0.$$

In Beziehung auf x, y, z ist die erste Gleichung unter der allgemeinen Form $F(x, y, z) = 0$, die zweite unter der entsprechenden Form $F(x', y', z') = 0$ oder $F(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) = 0$ enthalten; beachtet man aber, dass immer die Gleichung

$$F(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) = F(x, y, z) + \Delta F(x, y, z)$$

statt findet, wo rechter Hand Δ die totale Differenz bezeichnet und berücksichtigt man ferner, dass $F(x, y, z) = 0$ ist, so kann man die Gleichung der zweiten Normalebene durch

2) $$\Delta\,[(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz] = 0$$

darstellen. Um ferner auszudrücken, dass später die zweite Normalebene mit der ersten zusammenfallen soll, schreiben wir d statt Δ und haben so durch Ausführung der totalen Differenziation

$$\begin{aligned}(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z \\ - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0,\end{aligned}$$

oder kürzer

3) $$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z = ds^2.$$

Die Gleichungen des Durchschnittes beider Normalebenen würden sich jetzt dadurch finden, dass man einmal $\zeta - z$, das andere Mal $\eta - y$ aus den Gleichungen 1) und 2) eliminirte, da es uns aber nur auf die Grenzlinie dieses Durchschnittes ankommt, so benutzen wir die Gleichung 3) statt der Gleichung 2), in welcher durch den Gebrauch des Differenziales statt der Differenz der vorzunehmende Uebergang zur Grenze bereits ausgesprochen ist. Unter Benutzung der Abkürzungen

4) $$X = dy\,d^2z - dz\,d^2y, \quad Y = dz\,d^2x - dx\,d^2z, \quad Z = dx\,d^2y - dy\,d^2x$$

finden sich nun mittelst der angedeuteten Elimination

5) $$\left\{\begin{aligned}\eta - y &= \frac{Y}{X}(\xi - x) - \frac{ds^2\,dz}{X}\\ \zeta - z &= \frac{Z}{X}(\xi - x) + \frac{ds^2\,dy}{X}\end{aligned}\right.$$

als Gleichungen der Grenzlinie für den Durchschnitt zweier benachbarten Normalebenen. Nennen wir u, v, w die Winkel, welche diese Gerade mit den Coordinatenachsen bildet, so ist nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie:

6) $$\frac{\cos u}{X} = \frac{\cos v}{Y} = \frac{\cos w}{Z} = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Auf die oben bestimmte Grenzlinie fällen wir vom Punkte P aus eine Senkrechte, deren Fusspunkt die Coordinaten ξ, η, ζ besitzen und deren Länge ϱ sein möge. Der Fusspunkt $\xi\,\eta\,\zeta$ heisst dann der **Krümmungsmittelpunkt** und ϱ der **Krümmungshalbmesser** der Curve doppelter Krümmung. Nennen wir λ, μ, ν die Winkel, welche ϱ mit den Coordinatenachsen bildet, so ist erstlich

7) $$\xi - x = \varrho\cos\lambda, \quad \eta - y = \varrho\cos\mu, \quad \zeta - z = \varrho\cos\nu,$$

ferner, weil die Grenzlinie und der Krümmungshalbmesser mit einander einen rechten Winkel bilden:

$$\cos u \cos\lambda + \cos v \cos\mu + \cos w \cos\nu = 0.$$

Setzt man für $\cos u$, $\cos v$, $\cos w$ ihre Werthe aus Nro. 6), und für $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ ihre Werthe aus Nro. 7), so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in die folgende:

8) $$X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\zeta - z) = 0.$$

Die Coordinaten ξ, η, ζ des Krümmungsmittelpunktes bestimmen sich aus der doppelten Bemerkung, dass sie einerseits in der Grenzlinie 5), andererseits in der Senkrechten darauf liegen müssen, was durch die Gleichung 8) ausgedrückt ist. Aus den Gleichungen 5) und 7) findet sich nun:

9) $$\left\{\begin{aligned} \xi - x &= \frac{Y\,dz - Z\,dy}{X^2 + Y^2 + Z^2}\,ds^2 \\ \eta - y &= \frac{Z\,dx - X\,dz}{X^2 + Y^2 + Z^2}\,ds^2 \\ \zeta - z &= \frac{X\,dy - Y\,dx}{X^2 + Y^2 + Z^2}\,ds^2. \end{aligned}\right.$$

Für den Krümmungshalbmesser hat man unmittelbar

$$\varrho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2,$$

folglich nach Einsatz der vorigen Werthe:

10) $$\varrho = \frac{\sqrt{(Ydz - Zdy)^2 + (Zdx - Xdz)^2 + (Xdy - Ydx)^2}}{X^2 + Y^2 + Z^2}\,ds^2.$$

Eine bemerkenswerthe Umformung dieses Ausdruckes ist folgende. Man hat bei gewöhnlicher Ausrechnung:

$$\begin{aligned} Ydz - Zdy &= (dx^2 + dy^2 + dz^2)\,d^2x - dx\,(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z) \\ &= ds^2\,d^2x - dx\,d^2s\,ds = ds^3\,d\left(\frac{dx}{ds}\right), \end{aligned}$$

auf gleiche Weise:

$$Zdx - Xdz = ds^3\,d\left(\frac{dy}{ds}\right)$$

$$Xdy - Ydx = ds^3\,d\left(\frac{dz}{ds}\right),$$

woraus man vermöge der Werthe von ds^2 und $ds\,d^2s$ leicht die folgende Gleichung herleitet:

$$\begin{aligned} &(Ydz - Zdy)^2 + (Zdx - Xdz)^2 + (Xdy - Ydx)^2 \\ &= [(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2]\,ds^4. \end{aligned}$$

Andererseits ist es ebenfalls nicht schwer, sich von der Richtigkeit der Gleichung

$$X^2+Y^2+Z^2=[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2]\,ds^2$$

zu überzeugen; man gelangt so zu der Formel:

$$11)\qquad \varrho=\frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}},$$

die sich auch in der folgenden Gestalt darstellen lässt:

$$12)\qquad \varrho=\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}\right]^2+\left[\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}\right]^2+\left[\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}\right]^2}},$$

wie man durch Entwickelung der angedeuteten Differenziation finden wird.

Die Gleichungen 9) kann man jetzt durch die folgenden ersetzen:

$$13)\quad \xi-x=\varrho^2\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds},\quad \eta-y=\varrho^2\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds},\quad \zeta-z=\varrho^2\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}.$$

Es verdient übrigens bemerkt zu werden, dass man die Formel 12) direkt auf einem ähnlichen Wege, wie er nach der Formel 7) in §. 18. eingeschlagen wurde, erhalten kann. Bildet nämlich die Tangente im Punkte P mit den drei Coordinatenachsen die Winkel α, β, γ, ebenso die Tangente in P' die Winkel α', β', γ', so kann man setzen:

$$\cos\alpha'=\cos\alpha+\Delta\cos\alpha,\quad \cos\beta'=\cos\beta+\Delta\cos\beta,\quad \cos\gamma'=\cos\gamma+\Delta\cos\gamma,$$

womit weiter nichts gesagt ist, als dass eine Aenderung der Winkel α, β, γ eine Aenderung ihrer Cosinus nach sich zieht; man hat nun gleichzeitig:

$$14)\qquad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

$$15)\qquad (\cos\alpha+\Delta\cos\alpha)^2+(\cos\beta+\Delta\cos\beta)^2+(\cos\gamma+\Delta\cos\gamma)^2=1;$$

ferner, wenn $\Delta\tau$ den Winkel bezeichnet, welchen die Tangenten in P und P' mit einander einschliessen:

$$\cos\Delta\tau=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'$$
$$=\cos\alpha(\cos\alpha+\Delta\cos\alpha)+\cos\beta(\cos\beta+\Delta\cos\beta)+\cos\gamma(\cos\gamma+\Delta\cos\gamma).$$

Subtrahirt man das Doppelte dieser Gleichung von der Summe der Gleichungen 14) und 15), so bleibt:

$$2(1-\cos\Delta\tau)=(\Delta\cos\alpha)^2+(\Delta\cos\beta)^2+(\Delta\cos\gamma)^2,$$

woraus man findet:

$$16)\qquad 2\,\sin\tfrac{1}{2}\Delta\tau = \sqrt{(\Delta\cos\alpha)^2+(\Delta\cos\beta)^2+(\Delta\cos\gamma)^2}.$$

Bezeichnen wir ferner mit Δs den Bogen PP', so ist identisch

$$\frac{\Delta s}{\Delta\tau} = \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\tau}{\frac{1}{2}\Delta\tau}\cdot\frac{\Delta s}{2\sin\frac{1}{2}\Delta\tau},$$

und vermöge der Gleichung 16):

$$\frac{\Delta s}{\Delta\tau} = \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\tau}{\frac{1}{2}\Delta\tau}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Delta\cos\alpha}{\Delta s}\right)^2+\left(\frac{\Delta\cos\beta}{\Delta s}\right)^2+\left(\frac{\Delta\cos\gamma}{\Delta s}\right)^2}}.$$

Gehen wir in dieser Gleichung zur Grenze für verschwindende Δs und $\Delta\tau$ über, so erhalten wir linker Hand $Lim\,\frac{\Delta s}{\Delta\tau} = \frac{ds}{d\tau}$, d. h. den Krümmungshalbmesser ϱ, wenn wir die in §. 18. gemachten Bemerkungen auf die doppelt gekrümmten Linien übertragen; rechter Hand ist der Grenzwerth des ersten Faktors die Einheit, und es wird so:

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2}},$$

was mit der Formel 12) übereinstimmt, sobald man die Werthe von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ aus Nro. 6) des vorigen Paragraphen einsetzt.

Die obigen Formeln zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes und des Krümmungshalbmessers sind völlig allgemein, d. h. sie gelten, welche auch die unabhängige Variabele sei; sie vereinfachen sich aber, wenn man eine von den Grössen x, y, z, s selbst als unabhängige Veränderliche ansieht. Wird z. B. die Curve durch ihre Horizontal- und Vertikalprojektion bestimmt, so ist x die unabhängige Variabele, dx ein irgendwie willkürlich in Null übergehender und ebendeswegen von x unabhängiger Zuwachs des x, folglich $d^2x = 0$; man erhält für diesen Fall:

$$17)\qquad \varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2}}$$

$$18) \begin{cases} \xi - x = -\varrho^2 \dfrac{\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dz}{dx}\dfrac{d^2z}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2\right]^2} \\[2ex] \eta - y = \varrho^2 \dfrac{\left(\dfrac{dz}{dx}\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^2z}{dx^2}\right)\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2\right]^2} \\[2ex] \zeta - z = \varrho^2 \dfrac{\left(\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^2z}{dx^2} - \dfrac{dz}{dx}\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{d^2z}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2\right]^2}. \end{cases}$$

Besonders symmetrisch gestalten sich die Formeln, wenn man s als unabhängige Variabele, mithin x, y, z als Funktionen von s ansieht; es ist dann $d^2s = 0$ und man hat:

$$19) \qquad \varrho = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2}};$$

$$20) \quad \xi - x = \varrho^2 \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \eta - y = \varrho^2 \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \zeta - z = \varrho^2 \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Will man die Untersuchung über die Krümmungsverhältnisse der räumlichen Curven weiter fortsetzen (was Sache der höheren Geometrie sein würde), so ist es vortheilhaft, für den oft vorkommenden Ausdruck $\frac{1}{\varrho}$ einen besonderen Namen einzuführen; man hat ihn deshalb das Krümmungsmaass oder kürzer die Krümmung der Curve im Punkte xyz genannt. Beachtet zu werden verdient noch die Ebene des Krümmungskreises, welche einerlei mit der Ebene ist, die man durch den Punkt xyz senkrecht auf die Grenzlinie 5) legt; nach dem Früheren findet man leicht, dass die Gleichung dieser Ebene ist:

$$21) \qquad X(\xi_1 - x) + Y(\eta_1 - y) + Z(\zeta_1 - z) = 0,$$

wo X, Y, Z die frühere Bedeutung haben und ξ_1, η_1, ζ_1 die laufenden Coordinaten der Ebene bezeichnen.

Denkt man sich in den Gleichungen 18) y und z durch x ausgedrückt, so enthalten jene Gleichungen die drei Variabelen ξ, η, ζ und x; man kann aus ihnen zwei neue Gleichungen bilden, welche kein x enthalten und die Formen

$$\eta = \varphi(\xi), \qquad \zeta = \psi(\xi)$$

besitzen; sie charakterisiren den geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte der ursprünglichen Linie; diese neue Curve kann man sich wie früher durch Abwickelung entstanden denken und sie demgemäss eine Evolute der gegebenen Linie nennen.

§. 22.

Die Tangentialebenen und Normalen der Flächen.

I. Die Gleichung einer Fläche kann man entweder in der unentwickelten Form

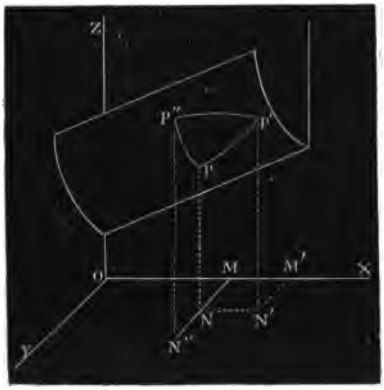
1) $$F(x, y, z) = 0$$

oder in der entwickelten Form

2) $$z = f(x, y)$$

angeben, und sie enthält demnach zwei unabhängige Variabele x und y, welche in Fig. 24 durch OM und MN dargestellt werden mögen, während die dritte Variabele $z = NP$ ist. Lassen wir x um $MM' = \varDelta x$ zunehmen, ohne jedoch y zu ändern, so erhalten wir einen zweiten Punkt N' der Ebene xy, welchem ein zweiter Punkt P' der Fläche entspricht; die Coordinaten des letzteren sind:

Fig. 24.



$$x + \varDelta x,\ y,\ z + \left(\frac{\varDelta z}{\varDelta x}\right) \varDelta x,$$

und hier soll $\left(\frac{\varDelta z}{\varDelta x}\right) \varDelta x$ einen Zuwachs des z bedeuten, welcher durch eine alleinige Aenderung des x hervorgerufen worden ist, so dass also $\left(\frac{\varDelta z}{\varDelta x}\right)$ einen partiellen Differenzenquotienten des z bezeichnet. Lassen wir umgekehrt x ungeändert, und geben dem y die Zunahme $NN'' = \varDelta y$, so entspricht dem Punkte N'' ein Punkt der Fläche mit den Coordinaten

$$x,\ y + \varDelta y,\ z + \left(\frac{\varDelta z}{\varDelta y}\right) \varDelta y.$$

Durch die drei Punkte P, P', P'' legen wir eine Ebene, deren Gleichung

$$\zeta = A\xi + B\eta + C \tag{3}$$

sein möge; es müssen dann die Coordinaten der Punkte P, P', P'' dieser Gleichung genügen, mithin die drei Bedingungen stattfinden:

$$\begin{aligned} z &= Ax + By + C \\ z + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)\Delta x &= A(x + \Delta x) + By + C \\ z + \left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)\Delta y &= Ax + B(y + \Delta y) + C. \end{aligned} \tag{4}$$

Aus diesen erhält man sehr leicht:

$$A = \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right),\ B = \left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right).$$

Subtrahirt man ferner Nro. 4) von Nro. 3) und setzt für A und B die vorstehenden Werthe, so ist

$$\zeta - z = \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)(\xi - x) + \left(\frac{\Delta z}{\Delta y}\right)(\eta - y)$$

die Gleichung der Schnittebene. Für verschwindende Δx und Δy fallen die drei Punkte P, P', P'' in einander, die von der Ebene abgeschnittene Kappe zieht sich auf einen Punkt zusammen, die Schnittebene wird zur berührenden Ebene, aus den partiellen Differenzenquotienten werden die partiellen Differenzialquotienten

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\partial z}{\partial x},\quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{\partial z}{\partial y}$$

und somit ergiebt sich

$$\zeta - z = \frac{\partial z}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(\eta - y) \tag{5}$$

als **Gleichung der Tangentialebene.**

II. Eine Senkrechte auf die Tangentialebene im Berührungspunkte der letzteren heisst die **Normale** der Fläche; nennen wir α, β, γ die Winkel, welche sie mit den drei Achsen bildet, und ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes von ihr, so sind ihre Gleichungen:

$$\eta - y = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(\xi - x),\quad \zeta - z = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(\xi - x). \tag{6}$$

Um die rechter Hand vorkommenden Quotienten zu bestimmen, braucht man nur zu bemerken, dass eine im Punkte xyz senkrecht auf die Normale gelegte Ebene die Tangentialebene sein müsste.

Die Gleichung dieser Ebene wäre nach ganz ähnlichen Betrachtungen wie im vorigen Paragraphen:

$$0 = \cos\alpha \,.\, (\xi - x) + \cos\beta \,.\, (\eta - y) + \cos\gamma \,.\, (\zeta - z)$$

oder
$$\zeta - z = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}(\xi - x) - \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}(\eta - y),$$

und wenn man dies mit Nro. 5) zusammenhält, so ergiebt sich

$$7)\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

und hieraus

$$\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = -\frac{1}{\frac{\partial z}{\partial x}},\quad \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}}.$$

Durch Substitution in Nro 6) erhält man jetzt als Gleichungen der Normale:

$$8)\qquad \begin{cases} \eta - y = -\dfrac{1}{\frac{\partial z}{\partial x}}(\xi - x) \\[2ex] \zeta - z = +\dfrac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}}(\xi - x). \end{cases}$$

Unter einer besseren Form erhält man dieselben, wenn man ζ als willkürliche Coordinate ansieht; d. h. mit anderen Worten, wenn man die Normale nicht auf die Coordinatenebenen $\xi\eta$ und $\xi\zeta$, sondern auf die Ebenen $\zeta\xi$ und $\zeta\eta$ projizirt; man hat dann

$$9)\qquad \begin{cases} \xi - x = -\dfrac{\partial z}{\partial x}(\zeta - z) \\[2ex] \eta - y = -\dfrac{\partial z}{\partial y}(\zeta - z) \end{cases}$$

als Gleichungen der Normale.

Will man die Winkel α, β, γ selbst bestimmen, so verbinde man die Gleichungen 7) mit der folgenden:

$$\cos^2\alpha + \cos\ \beta + \cos^2\gamma = 1;$$

es ergiebt sich dann durch gewöhnliche Substitution und nachherige Wurzelausziehung:

$$10)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{-\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}} \\ \cos\beta = \dfrac{-\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}} \\ \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}}. \end{cases}$$

Die in unseren Formeln vorkommenden partiellen Differenzialquotienten entnimmt man entweder der Gleichung 2) unmittelbar, oder man benutzt dazu die unentwickelte Gleichung 1); im letzteren Falle hat man, wie in §. 7., Formel 9) u. s. w.:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

und man erhält als Gleichung der Tangentialebene:

$$11)\quad \frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0.$$

Die Gleichungen der Normale werden:

$$12)\quad \xi - x = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}(\zeta - z),\quad \eta - y = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}(\zeta - z),$$

und zur Bestimmung der Winkel α, β, γ hat man die Formeln:

$$13)\quad \cos\alpha = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{N},\quad \cos\beta = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{N},\quad \cos\gamma = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{N},$$

wobei zur Abkürzung

$$14)\quad N = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

gesetzt worden ist. Passende Beispiele für die hier entwickelten Formeln bieten die Flächen zweiten Grades dar; bei den Flächen ohne Mittelpunkt, deren Gleichungen also von der Form $z = px^2 + qy^2$ sind, wird man sich der Formeln 2) bis 10) bedienen; bei den Flächen mit Mittelpunkt, deren Gleichungen in dem Schema $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$ enthalten sind, ist die Anwendung der Formeln 11) bis 14) bequemer, weil man die sonst sich einstellenden Wurzelzeichen damit vermeiden kann. So findet man z. B. für das dreiachsige Ellipsoid, dessen Gleichung ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

als Gleichung der Tangentialebene:

$$\frac{x}{a^2}(\xi - x) + \frac{y}{b^2}(\eta - y) + \frac{z}{c^2}(\zeta - z) = 0$$

oder

$$\frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta + \frac{z}{c^2}\zeta = 1.$$

Nimmt man darin einmal $\zeta = 0$, dann $\eta = 0$, so erhält man die Gleichungen der beiden Durchschnittslinien, welche die berührende Ebene mit den Coordinatenebenen xy und xz bilden; dies sind die beiden Spuren der Tangentialebene, deren Lagen man mittelst der analytischen Geometrie der Ebene weiter untersuchen kann.

§. 23.

Die Krümmungsverhältnisse der Flächen.

Um die in einem bestimmten Punkte stattfindende Krümmung einer Fläche kennen zu lernen, ist es das Natürlichste, durch jenen Punkt eine Normale auf die Fläche, durch diese Normale eine Reihe von sonst beliebigen Ebenen zu legen und die Krümmungen zu untersuchen, welche die Durchschnitte dieser Ebenen und der Fläche besitzen. Dieser Gedanke lässt sich auf folgende Weise ausführen. Die Gleichungen der Normale im Punkte xyz mögen sein

1) $$\xi - x + p(\zeta - z) = 0 \quad \text{und} \quad \eta - y + q(\zeta - z) = 0,$$

wobei wir zur Abkürzung

2) $$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

gesetzt haben; die Gleichung einer beliebigen Ebene sei

3) $$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 1;$$

soll diese Ebene die Normale in sich enthalten, so muss die Gleichung 3) auch dann noch bestehen, wenn man statt ξ und η die aus Nro. 1) entnommenen Werthe einsetzt; dies giebt

$$(\gamma - \alpha p - \beta q)\,\zeta + \alpha x + \beta y + (\alpha p + \beta q)\,z = 1,$$

und diese Gleichung kann für jedes ζ nur dann erfüllt sein, wenn gleichzeitig die Beziehungen

$$4)\qquad \gamma = \alpha p + \beta q$$

$$5)\qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = 1$$

stattfinden. Die so bestimmte durch die Normale gehende Ebene bildet mit der Fläche eine Durchschnittslinie, die wir einen Normalschnitt nennen wollen; die Gleichungen desselben würde man dadurch finden, dass man erstlich in Nro. 3) x, y, z für ξ, η, ζ setzte, wodurch man auf die Gleichung 5) kommt, und dann aus dieser und der Gleichung der Fläche $z = f(x, y)$ einmal z, das andere Mal y eliminirte. Für die Krümmung des Schnittes hätte man, x als unabhängige Variabele angesehen:

$$6)\qquad \frac{1}{\varrho^2} = \frac{(dy\; d^2z - d^2y\; dz)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3};$$

ferner durch Differenziation der Gleichungen der Fläche und der Ebene:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = p\,dx + q\,dy$$

$$\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz = 0,$$

und durch nochmalige Differenziation:

$$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 + q\,d^2y$$

$$\beta\,d^2y + \gamma\,d^2z = 0,$$

wobei von folgenden Abkürzungen Gebrauch gemacht worden ist:

$$7)\qquad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\quad t = \frac{\partial^2 z}{dy^2}.$$

Aus den obigen Gleichungen erhält man durch gewöhnliche Elimination:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha + p\gamma}{\beta + q\gamma},\quad \frac{dz}{dx} = \frac{p\beta - q\alpha}{\beta + q\gamma}.$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

$$8)\qquad r + 2s\,\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = M,$$

so findet sich für die zweiten Differenzialquotienten:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M\gamma}{\beta + q\gamma},\quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{M\beta}{\beta + q\gamma}.$$

Bevor wir diese Werthe in die Formel 6) einsetzen, bemerken wir noch folgende Transformationen:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2} = \frac{(\beta + q\gamma)^2 + (\alpha + p\gamma)^2 + (p\beta - q\alpha)^2}{(\beta + q\gamma)^2}$$

wobei sich der Zähler mit Rücksicht auf $\gamma = p\alpha + q\beta$ auf die Form bringen lässt:

$$\alpha^2(1+q^2) + \beta^2(1+p^2) + 2(\alpha p + \beta q)\gamma + (p^2+q^2)\gamma^2 - 2\alpha\beta pq$$
$$= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(1+p^2+q^2) - \alpha^2p^2 - \beta^2q^2 - 2\alpha\beta pq + \gamma^2$$
$$= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(1+p^2+q^2);$$

demnach ist also:

9) $$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dx^2} = \frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)N^2}{(\beta+\gamma q)^2},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

10) $$N^2 = 1 + p^2 + q^2.$$

Man hat nun weiter

$$\frac{dy\, d^2z - dz\, d^2y}{dx^3} = \frac{-\beta(\alpha+\gamma p) + \gamma(p\beta - q\alpha)}{(\beta+\gamma q)^2} M = -\frac{\alpha M}{\beta+\gamma q}$$

und mit Rücksicht auf die oben bestimmten zweiten Differenzialquotienten von y und x:

$$\left(\frac{dy\, d^2x - dz\, d^2y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 = \frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)M^2}{(\beta+\gamma q)^2}.$$

Mittelst dieses Werthes und der in Nro. 9) bemerkten Substitution erhält man für die Krümmung des Normalschnittes:

11) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{M(\beta+\gamma q)^2}{N^3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}$$

oder auch durch Elimination von $\beta + \gamma q$ aus 9) und 11):

12) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{M\, dx^2}{N(dx^2+dy^2+dz^2)}.$$

Bezeichnet man $\frac{dy}{dx}$ kurz mit y', setzt für dz seinen Werth $p\,dx + q\,dy = (p+qy')\,dx$, und für M den ursprünglichen Ausdruck $r + 2sy' + ty'^2$, so hat man noch

13) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{r+2sy'+ty'^2}{N[1+y'^2+(p+qy')^2]}.$$

In diesem Ausdrucke für die Krümmung eines Normalschnittes sind die partiellen Differenzialquotienten p, q, r, s, t von der Natur der Fläche einzig und allein abhängig, unabhängig dagegen von

α, β, γ, d. h. von der Lage des Schnittes gegen die Normale oder gegen die Tangentialebene, nur y' enthält α, β, γ; denn es ist

$$y' = -\frac{\alpha + \gamma p}{\beta + \gamma q} = -\frac{\alpha + (\alpha p + \beta q) p}{\beta + (\alpha p + \beta q) q} = -\frac{1 + p + \frac{\beta}{\alpha} pq}{\frac{\beta}{\alpha}(1 + q^2) + pq}$$

und es hängt demnach y', mithin auch die Krümmung des Normalschnittes, von dem Verhältnisse $\frac{\beta}{\alpha}$ ab. Aendert man dieses fortwährend, so dreht sich die Ebene des Normalschnittes um die Normale, zugleich erhalten y' und $\frac{1}{\varrho}$ andere Werthe und man kann demnach die Krümmung als Funktion von y' ansehen. Nach dem Theoreme I. des §. 16. nimmt dieselbe zu, so lange der Differenzialquotient $d\left(\frac{1}{\varrho}\right) : dy'$ positiv bleibt, und sie nimmt ab, so lange er negativ ist: ein **Wechsel der Krümmung** findet also in dem Falle statt, wo

$$\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{dy'} = 0$$

wird; durch Ausführung dieser Differenziation erhält man als Bedingung dafür

$$14) \qquad \varrho\,(s + ty') = N\,[y' + (p + qy')\,q].$$

Eliminirt man ϱ aus dieser und der Krümmungsgleichung, so folgt

$$\frac{r + 2sy' + ty'^2}{s + ty'} = \frac{1 + y'^2 + (p + qy')^2}{pq + (1 + q^2)y'}$$

und durch Entwickelung nach Potenzen von y':

$$15) \quad [(1 + q^2)s - pqt]\,y'^2 + [(1 + q^2)r - (1 + p^2)t]\,y' + pqr - (1 + p^2)s = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung giebt nun diejenigen Werthe von y', mithin auch die Werthe des Verhältnisses $\frac{\beta}{\alpha}$, für welche ein Wechsel der Krümmung, also eine grösste oder kleinste Krümmung stattfindet. Vorausgesetzt wird dabei nur, dass die Differenzialquotienten p, q, r, s, t in dem Punkte xyz endliche bestimmte Werthe haben, dass also xyz keinen ausgezeichneten Punkt (wie z. B. eine Spitze) bedeutet. Die Gleichung 15) zeigt nun die Existenz von zwei Hauptnormalschnitten, deren gegenseitige Lage man dadurch erfahren kann, dass man die Gleichung vereinfacht, indem man den Punkt xyz zum Anfangspunkte der Coordinaten und die Tangentialebene im Punkte xyz zur Ebene xy nimmt. Es ist in diesem Falle $x=y=z=0$, ferner constant $\zeta=0$; die Gleichung der Tangentialebene wird $p\xi+q\eta=0$ und diese kann für alle η und ζ nur bestehen, wenn $p=q=0$ ist. Die Gleichung 15) verwandelt sich jetzt in die folgende:

$$y'^2+\frac{r-t}{s}y'-1=0,$$

welche immer zwei reelle Wurzeln besitzt. Ist nun weiter $y=x\tan\omega$ die Gleichung der Spur, welche ein Hauptnormalschnitt mit der Coordinatenebene xy (der Tangentialebene) bildet, so hat man

$$y'=\frac{dy}{dx}=\tan\omega,$$

mithin statt der vorigen Gleichung die folgende:

$$\tan^2\omega+\frac{r-t}{s}\tan\omega-1=0,$$

deren Wurzeln $\tan\omega_1$ und $\tan\omega_2$ heissen mögen; für diese gelten die beiden Beziehungen

$$\tan\omega_1+\tan\omega_2=\frac{t-r}{s},\quad \tan\omega_1\tan\omega_2=-1,$$

deren letztere identisch mit der Gleichung $\cos(\omega_1-\omega_2)=0$ ist. Daraus folgt $\omega_1-\omega_2=\pm\frac{1}{2}\pi$, oder mit anderen Worten, dass die Hauptnormalschnitte auf einander senkrecht stehen.

Statt der Gleichung 15) kann man auch eine quadratische Gleichung aufstellen, deren Wurzeln der grösste und kleinste Krümmungshalbmesser selbst sind; sie ergiebt sich, wenn man aus den Gleichungen 13) und 14) nicht ϱ, sondern y' eliminirt, wobei zur Abkürzung

$$\frac{\varrho}{N}=\lambda$$

gesetzt werden möge. Die fraglichen Gleichungen sind dann

$$\begin{aligned}\lambda(r+2sy'+ty'^2)&=1+y'^2+(p+qy')^2\\ \lambda(s+ty')&=pq+(1+q^2)y',\end{aligned}$$

und wenn man y' aus der zweiten Gleichung in die erste einsetzt, so erhält man zunächst:

$$\begin{aligned}&\lambda[r(1+q^2-\lambda t)^2+2s(1+q^2-\lambda t)(\lambda s-pq)+t(\lambda s-pq)^2]\\ &=(1+p^2)(1+q^2-\lambda t)^2+2pq(1+q^2-\lambda t)(\lambda s-pq)\\ &\qquad+(1+q^2)(\lambda s-pq)^2,\end{aligned}$$

oder durch Reduktion auf Null:

$$(1+q^2-\lambda t)\,[(1+p^2-\lambda r)(1+q^2-\lambda t)-(pq-\lambda s)^2]=0.$$

Hier kann nun der erste Faktor nicht $=0$ sein, weil sonst der vorhin substituirte Werth von y', nämlich

$$y'=\frac{\lambda s-pq}{1+q^2-\lambda t}$$

unendlich oder unbestimmt (wenn zugleich der Zähler verschwände) werden würde, was Beides im Allgemeinen nicht der Fall ist. Es muss daher der zweite Faktor $=0$ gesetzt werden und dies giebt bei Entwickelung der Potenzen von λ:

$$(rt-s^2)\lambda^2-[r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)]\lambda+1+p^2+q^2=0,$$

und vermöge des Werthes von λ und der Bedeutung von N:

16) $$(rt-s^2)\varrho^2-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]N\varrho+N^4=0.$$

Nennen wir ϱ_1 und ϱ_2 die Wurzeln dieser Gleichung, so finden zwischen diesen grössten und kleinsten Krümmungshalbmessern im Punkte xyz die Beziehungen statt:

17) $$\varrho_1+\varrho_2=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{rt-s^2}N,$$

18) $$\varrho_1\varrho_2=\frac{N^4}{rt-s^2}.$$

Die Ebenen der beiden Hauptnormalschnitte standen sowohl aufeinander als auch auf der Tangentialebene senkrecht; es liegt daher nahe, diese drei Ebenen zu Coordinatenebenen zu wählen, so dass nunmehr die vorhin betrachteten Winkel ω_1 und ω_2 die Werthe $\omega_1=0$ und $\omega_2=\frac{1}{2}\pi$ erhalten müssen. Die Gleichung

$$\tan\omega_1+\tan\omega_2=\frac{r-t}{s}$$

wird jetzt $\infty=\frac{r-t}{s}$ und zeigt, dass für diesen Fall $s=0$ sein muss, weil im Allgemeinen r und t endliche Werthe besitzen. Die Formel 13) wird jetzt

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{r+ty'^2}{1+y'^2},$$

oder wenn $y'=\tan v$ gesetzt wird, wo v die Neigung der Ebene irgend eines Normalschnittes gegen die Ebene des ersten Hauptschnittes (ϱ_1) bezeichnet:

$$\frac{1}{\varrho}=r\cos^2 v+t\sin^2 v.$$

Für die Hauptschnitte ist $v = 0$ und $v = \frac{1}{2}\pi$, also

$$\frac{1}{\varrho_1} = r, \qquad \frac{1}{\varrho_2} = t,$$

mithin durch Substitution in die vorhergehende Gleichung:

$$19) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 v}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 v}{\varrho_2}.$$

Die Gleichungen 17), 18) und 19) bestimmen vollständig die Krümmungen der verschiedenen durch einen Punkt xyz gelegten Normalschnitte; aus 17) und 18) erhält man die Krümmungen der Hauptschnitte, aus 19) die Krümmung eines beliebigen anderen Normalschnittes, welcher mit dem ersten Hauptschnitte den Winkel v bildet.

Bemerkenswerth ist noch der spezielle Fall, in welchem man den x, y, z solche Werthe ertheilt, dass

$$20) \qquad \frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t}$$

wird; es wird nämlich unter dieser Voraussetzung

$$\frac{(1+p^2)(1+q^2)}{rt} = \frac{p^2q^2}{s^2}, \qquad \frac{(1+p^2)(1+q^2)}{p^2q^2} = \frac{rt}{s^2},$$

woraus man leicht findet:

$$1 + p^2 + q^2 = N^2 = p^2q^2\,\frac{rt - s^2}{s^2}.$$

Die Gleichung 16) verwandelt sich jetzt in die folgende:

$$\varrho^2 - \frac{2pqN}{s}\,\varrho + \frac{p^2q^2N^2}{s^2} = 0,$$

welche die gleichen Wurzeln

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \frac{pq}{s}N$$

besitzt. Aus Nro. 19) erkennt man weiter, dass jeder Normalschnitt durch diesen Punkt dieselbe Krümmung $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1}$ besitzt; der fragliche Punkt heisst dann ein Nabelpunkt oder Kreispunkt der Fläche. Durch Verbindung der zwei in Nro. 20) aufgestellten Gleichungen mit der Gleichung der Fläche erhält man drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten x, y, z.

Besitzen die Krümmungen $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$ der beiden Hauptschnitte dasselbe Vorzeichen, so kommt dieses auch der Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ jedes anderen durch denselben Punkt gelegten Normalschnittes zu, wie man aus Nro. 19) augenblicklich ersieht. Dann kehren sämmtliche Normalschnitte des Punktes ihre convexen Seiten derselben Gegend des Raumes zu und die Berührungsebene liegt gänzlich auf der einen Seite der Fläche. Wenn dagegen ϱ_1 und ϱ_2 entgegengesetzte Vorzeichen haben, so ist (nach derselben Gegend des Raumes hin) der eine Hauptschnitt convex, der andere concav, und die Krümmung wechselt zwischen beiden Schnitten ihr Zeichen; die Tangentialebene liegt in diesem Falle nicht auf einer Seite der Fläche, sondern schneidet dieselbe in ihrem späteren Verlaufe. Derartige Flächen entstehen z. B. durch Umdrehung einer ebenen Curve, die der Drehungsachse ihre convexe Seite zuwendet.

Ausser den obigen zwei Gattungen von Flächen, welche die Namen der concav-concaven und der convex-concaven Flächen führen, giebt es noch eine dritte Art, welche den Uebergang von der einen zur anderen Gattung bilden; es sind dies die Flächen, an denen der eine Hauptschnitt in jedem Punkte die Krümmung Null besitzt, d. h. eine gerade Linie bildet. Da in jedem Falle die Tangentialebene die Tangenten der Normalschnitte, also auch die Tangente des geradlinigen Normalschnittes enthält, so ist unmittelbar klar, dass den genannten Flächen die Eigenschaft zukommt, von einer Ebene nicht nur in einem Punkte, sondern in einer Geraden berührt zu werden. Nennen wir $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$ die Krümmung einer Fläche, so ist für diese Flächen die Krümmung gleich Null; als analytisches Kennzeichen dafür ergiebt sich aus Nro. 18) $rt - s^2 = 0$, oder:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}\right)^2 = 0.$$

Die durch diese Gleichung charakterisirten Flächen sind übrigens sämmtlich abwickelbar, und hierin unterscheiden sie sich geometrisch von den vorigen Flächenarten. Weitere Auseinandersetzungen hierüber gehören in die höhere Geometrie.

Cap. V.

Die vieldeutigen Symbole.

§. 24.

Brüche von der Form $\frac{0}{0}$.

Wenn die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für einen Spezialwerth von x, etwa für $x = a$, gleichzeitig Null werden, so nimmt der Quotient $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ in diesem besonderen Falle die Form $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{0}{0}$ an, welche bekanntlich vieldeutig ist. Um aber den wahren Werth dieses Ausdruckes zu finden, betrachten wir den Quotienten $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$ als die Grenze, welcher sich der Quotient $\frac{\varphi(a+\delta)}{\psi(a+\delta)}$ für verschwindende δ nähert. Nun ist wegen der Voraussetzung, dass $\varphi(a) = 0$ und $\psi(a) = 0$ sei,

$$\frac{\varphi(a+\delta)}{\psi(a+\delta)} = \frac{\varphi(a+\delta) - \varphi(a)}{\psi(a+\delta) - \psi(a)} = \frac{\dfrac{\varphi(a+\delta) - \varphi(a)}{\delta}}{\dfrac{\psi(a+\delta) - \psi(a)}{\delta}}$$

und hieraus folgt, indem man δ zu Null werden lässt:

$$1) \qquad \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)},$$

d. h. in dem besonderen Falle $x = a$, für welchen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ verschwinden, werden die sonst sehr verschiedenen Quotienten

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

einander gleich. — Dieser Satz kann unmittelbar dienen, um den wahren Werth der Brüche von der Form $\frac{0}{0}$ zu bestimmen, wie die folgenden Beispiele zeigen werden.

Aus §. 6. ist folgende Formel bekannt:

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}$$
$$=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Für $x=1$ verwandelt sich der rechter Hand befindliche Bruch in $\frac{0}{0}$; differenzirt man Zähler und Nenner für sich, so ist der Quotient:

$$\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{-x^{n-1}+x^n}{-(1-x)}=\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1},$$

welcher für $x=1$ nicht mehr jene unbestimmte Form annimmt; man findet so für $x=1$:

$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

was auch sonst schon bekannt ist.

Es kommt bei diesem Verfahren nicht selten vor, dass der neue Bruch $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ für $x=a$ gleichfalls verschwindet; dann muss man auf ihn wiederum dieselbe Methode anwenden. Nehmen wir z. B.

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{x-\sin x}{x^3},$$

so ist der Reihe nach

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{1-\cos x}{3x^2},\quad \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}=\frac{\sin x}{6x},\quad \frac{\varphi'''(x)}{\psi'''(x)}=\frac{\cos x}{6}.$$

Für $x=0$ verschwinden $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\psi(x)$, $\psi'(x)$, $\psi''(x)$, und daher giebt erst der letzte Quotient $\frac{\varphi'''(x)}{\psi'''(x)}$ den wahren Werth $\frac{1}{6}$ des in Rede stehenden Bruches.

Eine allgemeinere Ausführung der Art ist folgende. Der gegebene Bruch sei

$$\frac{f(c+h)-f(c)-hf'(c)}{h^2}$$

und man fragt nach dem Werthe desselben für $h=0$; durch Differenziation des Zählers und Nenners in Beziehung auf h erhält man

$$\frac{1}{2}\,\frac{f'(c+h)-f'(c)}{h};$$

für $h=0$ wird hieraus $\frac{1}{2}f''(c)$, und findet also die Gleichung statt:

$$2)\qquad Lim\,\frac{f(c+h)-f(c)-hf'(c)}{h^2}=\frac{1}{2}f''(c),$$

wobei sich das Zeichen Lim auf das Verschwinden von h bezieht. Wäre ferner der Bruch gegeben:

$$\frac{f(c+h)-f(c)-\frac{h}{1}f'(c)-\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(c)}{h^3}$$

so gäbe die Differenziation des Zählers und Nenners:

$$\frac{1}{3}\,\frac{f'(c+h)-f'(c)-hf''(c)}{h^2}$$

und nach Nro. 2) wird hieraus für $h=0$, $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}f'''(c)$, wie man sogleich erkennt, wenn man sich f' statt f geschrieben denkt; es ist demnach:

$$3)\qquad Lim\,\frac{f(c+h)-f(c)-\frac{h}{1}f'(c)-\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(c)}{h^3}=\frac{f'''(c)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Man wird leicht übersehen, wie man auf diesem Wege weiter gehen kann; bezeichnet überhaupt n eine beliebige positive ganze Zahl, so findet die allgemeine Gleichung statt:

$$4)\quad\left\{\begin{aligned}&Lim\,\frac{f(c+h)-f(c)-\frac{h}{1}f'(c)-\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(c)-\cdots-\frac{h^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n-1)}(c)}{h^n}\\&\qquad=\frac{f^{(n)}(c)}{1.2.3....n}.\end{aligned}\right.$$

Will man das Zeichen *Lim* vermeiden, so ist zu beachten, dass die vorstehende Gleichung für kleine h näherungsweise gelten muss; nennen wir ϱ den begangenen Fehler, so ist

$$\frac{f(c+h)-f(c)-\frac{h}{1}f'(c)-\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(c)-\cdots-\frac{h^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n-1)}(c)}{h^n}$$

$$=\frac{f^{(n)}(c)}{1.2..n}+\varrho,$$

und wenn hier ϱ auch nicht näher bekannt ist, so weiss man doch, dass es mit h gleichzeitig verschwindet. Man kann übrigens dem obigen Theoreme die folgende Form geben:

$$5)\qquad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(x)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{h^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{1.2...n}f^{(n)}(x)+\varrho h^n,$$

wobei wir späterer Anwendungen wegen x für c geschrieben haben.

§. 25.

Die Symbole $\frac{\infty}{\infty}$, $0\,.\,\infty$, 0^0, ∞^0 und 1^∞.

I. Besitzen die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ die gemeinsame Eigenschaft, für $x = a$ unendlich zu werden, so stellt sich der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ in diesem Falle unter die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$, deren wahrer Werth q auf folgende Weise ermittelt werden kann. Setzen wir

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

so erhält der neue Bruch für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$, lässt sich also nach der Regel des vorigen Paragraphen behandeln; es ist nun

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{-\frac{F'(x)}{F(x)^2}}{-\frac{f'(x)}{f(x)^2}} = \frac{F'(x)}{f'(x)}\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)^2$$

und für $x = a$, wo nun $\frac{f(a)}{F(a)}$ den Werth q annimmt:

$$q = \frac{F'(a)}{f'(a)}\,q^2 \quad \text{oder} \quad q = \frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

Man erkennt hieraus, dass die Regel zur Bestimmung des wahren Werthes eines vieldeutigen Bruches dieselbe bleibt für die Form $\frac{\infty}{\infty}$, wie für $\frac{0}{0}$. So wird z. B. der Bruch

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x}$$

für $x = 0$ von der Form $\frac{\infty}{\infty}$; sein Werth ist dann einerlei mit dem Werthe von

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{\frac{M}{x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{M \sin^2 x}{x} = M\,\frac{\sin x}{x}\,\sin x,$$

welcher für $x = 0$ in $M\,.\,1\,.\,0 = 0$ übergeht.

II. Sind zwei Funktionen vorhanden, von denen die eine $\varphi(x)$ für $x = a$ verschwindet, während die andere $f(x)$ für $x = a$ unendlich wird, so nimmt das Produkt $\varphi(x)\,.\,f(x)$ für $x = a$ die unbestimmte Form $0\,.\,\infty$ an; den wahren Betrag desselben kann man auf zweierlei Weise finden. Entweder man setzt

$$\frac{1}{f(x)} = \psi(x)$$

und schreibt statt des Produktes $\varphi(x) \cdot f(x)$ den Quotienten

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

so besitzt dieser die Eigenschaft, für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ anzunehmen, deren wahrer Werth nach dem Früheren leicht zu ermitteln ist.

Man kann aber auch setzen:

$$\frac{1}{\varphi(x)} = F(x)$$

und substituirt nun für $\varphi(x) \cdot f(x)$ den Quotienten

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

welcher die Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, und sich auf gleiche Weise weiter behandeln lässt.

So z. B. wird man an die Stelle des Produktes

$$log\left(2 - \frac{x}{a}\right) \cdot tan\,\frac{\pi x}{2a},$$

welches für $x = a$ in $0 \cdot \infty$ übergeht, den Quotienten

$$\frac{log\left(2 - \frac{x}{a}\right)}{cot\,\frac{\pi a}{2a}} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

setzen, welcher $\frac{0}{0}$ wird; es ist dann

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{-\frac{1}{2a - x}}{-\frac{\pi}{2a}\frac{1}{sin^2\frac{\pi x}{2a}}} = \frac{2a}{\pi}\,\frac{sin^2\frac{\pi x}{2a}}{2a - x}$$

und hieraus ergiebt sich $\frac{2}{\pi}$ als wahrer Werth des obigen Produktes für $x = a$.

Handelte es sich um das Produkt

$$tan\,x \cdot l\left(\frac{1}{x}\right) \text{ für } x = 0,$$

so würde es vortheilhaft sein, demselben die Form

$$\frac{l\left(\frac{1}{x}\right)}{cot\,x}$$

zu geben, welche in $\frac{\infty}{\infty}$ übergeht, deren wahrer Werth aber schon bekannt, nämlich $= 0$ ist; es verschwindet demnach jenes Produkt mit x gleichzeitig.

III. Wenn ein Ausdruck von der Form $f(x)^{\varphi(x)}$ für $x = a$ eine der vieldeutigen Gestalten 0^0, ∞^0, 1^∞ annimmt, so beachte man zunächst die identische Gleichung

$$f(x)^{\varphi(x)} = e^{lf(x) \,.\, \varphi(x)}$$

und untersuche nun das Produkt $lf(x) \,.\, \varphi(x)$; ist w der Werth desselben für $x = a$, so geht die gegebene Potenz in e^w über.

So wird z. B. für $x = 0$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = \infty^0;$$

beachtet man aber, dass die Gleichung

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = e^{l\left(\frac{1}{x}\right) \tan x}$$

stattfindet, und dass nach dem Vorigen $l\left(\frac{1}{x}\right) \tan x$ für $x = 0$ verschwindet, so ergiebt sich $e^0 = 1$ als wahrer Werth der in Rede stehenden Potenz.

Für $x = a$ verwandelt sich der Ausdruck

$$\left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2a}}$$

in 1^∞; giebt man ihm vorher die Form

$$e^{l\left(2 - \frac{x}{a}\right) \tan \frac{\pi x}{2a}}$$

und beachtet, dass der Exponent für $x = a$ in $\frac{2}{\pi}$ übergeht (Nro. II.), so erkennt man $e^{\frac{2}{\pi}}$ als wahren Werth jener Potenz für den angegebenen speziellen Fall.

Cap. VI.

Maxima und Minima.

§. 26.

Maxima und Minima der Funktionen einer Variabelen.

Wenn eine Funktion $f(x)$ von x bald steigt bald fällt, so muss es in ihrem Verlaufe, vorausgesetzt, dass er stetig ist, gewisse Stellen geben, wo die Uebergänge von Wachsthum zu Abnahme oder umgekehrt von Abnahme zu Wachsthum stattfinden. Tritt nun für $x = a$ ein Uebergang der ersten Art ein, so ist $f(a)$ grösser als seine Nachbarwerthe $f(a-h)$ und $f(a+h)$, sobald nur h hinreichend klein genommen wird, und dann heisst $f(a)$ ein Maximum der Funktion; geschieht dagegen an der Stelle $x = a$ ein Uebergang von Abnahme zu Wachsthum, so ist $f(a)$ kleiner als seine Nachbarwerthe $f(a-h)$ und $f(a+h)$, und heisst in diesem Falle ein Minimum. Es versteht sich nach dieser Erklärung von selbst, dass derartige Maxima und Minima nur relativ sind und nicht immer den absolut grössten oder absolut kleinsten Werth der Funktion bedeuten.

Für welche Werthe von x dergleichen Maxima oder Minima eintreten, das entscheidet sich durch ein früheres Theorem (§. 16.), demzufolge die Funktion $f(x)$ steigt oder fällt, je nachdem die Derivirte $f'(x)$ positiv oder negativ ist. Aendert sich nun $f'(x)$ stetig, so kann der Uebergang von negativen Werthen des $f'(x)$ zu positiven Werthen dieser Funktion, oder der umgekehrte Uebergang, nur stattfinden, wenn dazwischen $f'(x) = 0$ ist; die Werthe von x, welche $f(x)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, sind also Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$. Dies bedeutet geometrisch, dass bei einem stetigen Wechsel von Steigen und Fallen einer Curve die Tangente an jeder solchen Wechselstelle parallel zur Abscissenachse liegt.

Hat man die Gleichung $f'(x) = 0$ aufgelöst, so bedarf es noch der Entscheidung, ob die gefundenen Werthe von x einem Maximum oder Minimum entsprechen. Betrachten wir zu diesem Zwecke den Ausdruck

$$\frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h^2},$$

dessen Grenzwerth (für verschwindende h) $= \frac{1}{2} f''(a)$ ist (Formel 2, §. 24.), so ist in unserem Falle, wenn $x = a$ eine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$ bedeutet, $f'(a) = 0$, mithin

$$Lim \frac{f(a+h) - f(a)}{h^2} = \tfrac{1}{2} f''(a)$$

und ebenso wäre auch bei negativen h

$$Lim \frac{f(a-h) - f(a)}{h^2} = \tfrac{1}{2} f''(a).$$

Ist nun $f''(a)$ positiv, so muss $f(a+h) > f(a)$ und ebenso $f(a-h) > f(a)$ sein, wenigstens bei hinreichend kleinen h, weil sonst der Grenzwerth nicht positiv ausfallen könnte; aus diesen Ungleichungen folgt:

$$f(a-h) > f(a) < f(a+h)$$

und es ist mithin $f(a)$ ein Minimum. Wenn dagegen $f''(a)$ negativ ausfällt, so muss gleichzeitig $f(a+h) < f(a)$ u. $f(a-h) < f(a)$ oder

$$f(a-h) < f(a) > f(a+h)$$

sein, woraus man erkennt, dass $f(a)$ ein Maximum ist. Die Entscheidung besteht also sehr einfach darin, dass $f(a)$ ein Minimum oder Maximum ist, je nachdem $f''(a)$ positiv oder negativ ausfällt; geometrisch heisst dies: ein Minimum kann nur auf einem gegen die Abscissenachse convexen Bogen, das Maximum nur auf einem concaven Bogen vorkommen.

Es wäre aber möglich, dass $f''(a)$ weder positiv noch negativ, sondern selbst der Null gleich würde (wie z. B. wenn an einem Inflexionspunkte eine horizontale Tangente vorkommt), und dann giebt der zweite Differenzialquotient keine Entscheidung; man muss in diesem Falle die höheren Differenzialquotienten zu Rathe ziehen, und zwar auf folgende Weise. Es mögen für $x = a$ ausser $f'(x)$ auch noch $f''(x), f'''(x) \ldots f^{(n-1)}(x)$ verschwinden und $f^{(n)}(x)$ sei der erste nicht verschwindende Differenzialquotient; benutzen wir jetzt das Theorem 4) in §. 24.:

$$Lim \frac{f(x+h)-f(x)-\frac{h}{1}f'(x)-\frac{h^2}{1.2}f''(x)-\ldots-\frac{h^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n-1)}(x)}{h^n}$$

$$= \frac{f^{(n)}(x)}{1\,.\,2\,\ldots\,n}$$

für $x = a$, so wird sehr einfach

$$Lim \frac{f(a+h)-f(a)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{1\,.\,2\ldots n}$$

und hier unterscheiden wir die beiden Fälle eines ungeraden und eines geraden n. Im ersten Falle ist

$$Lim \frac{f(a+h)-f(a)}{h^n} = + \frac{f^{(n)}(a)}{1\,.\,2\ldots n}$$

$$Lim \frac{f(a-h)-f(a)}{h^n} = - \frac{f^{(n)}(a)}{1\,.\,2\ldots n},$$

mithin für ein positives $f^{(n)}(a)$

$$f(a+h) > f(a) \text{ und } f(a) > f(a-h),$$

dagegen bei negativen $f^{(n)}(a)$

$$f(a+h) < f(a) \text{ und } f(a) < f(a-h).$$

Beide Ungleichungen stimmen darin überein, dass $f(a)$ weder ein Minimum noch ein Maximum ist. Wenn dagegen die Zahl n gerade ist, so hat man gleichzeitig

$$Lim \frac{f(a+h)-f(a)}{h^n} = + \frac{f^{(n)}(a)}{1\,.\,2\ldots n}$$

$$Lim \frac{f(a-h)-f(a)}{h^n} = + \frac{f^{(n)}(a)}{1\,.\,2\ldots n},$$

folglich bei positiven $f^{(n)}(a)$

$$f(a+h) > f(a) \text{ und } f(a) < f(a-h),$$

d. h. $f(a)$ ein Minimum, und bei negativen $f^{(n)}(a)$

$$f(a+h) < f(a) \text{ und } f(a) > f(a-h),$$

mithin $f(a)$ ein Maximum. Nach diesen Erörterungen dürfen wir sagen, dass für einen aus der Gleichung $f'(x) = 0$ bestimmten Werth von x nur dann ein Maximum oder Minimum von $f(x)$ eintreten kann, wenn in der Reihe der Differenzialquotienten von $f(x)$ der erste für jenen Werth nicht verschwindende Differenzialquotient von gerader Ordnung ist; und zwar findet ein Minimum oder Maximum statt, je nachdem dieser Differenzialquotient positiv oder negativ ausfällt.

Den Mechanismus der Rechnung werden folgende Beispiele zeigen.

I. Handelt es sich um das Maximum oder Minimum der Funktion $f(x) = x^a e^{-x}$, so ist

$$f'(x) = (a-x)x^{a-1}e^{-x}$$
$$f''(x) = [a(a-1) - 2ax + x^2]x^{a-2}e^{-x}.$$

Hier wird $f'(x) = 0$ für $x = a$; dieser Werth giebt $f''(a) = -a^a e^{-a}$, also ein negatives Resultat; es ist mithin $f(a) = \left(\frac{a}{e}\right)^a$ das Maximum der Funktion $x^a e^{-x}$.

II. Für $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ findet man

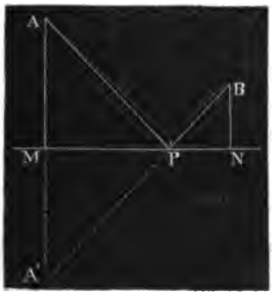
$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1-lx)$$
$$f''(x) = x^{\frac{1}{x}-4}(1-lx)^2 - x^{\frac{1}{x}-3}(3-2\,lx);$$

$f'(x)$ verschwindet, wenn $lx = 1$, also $x = e$ ist; zugleich wird

$$f''(e) = -e^{\frac{1}{e}-3}$$

und mithin ist $e^{\frac{1}{e}}$ das Maximum von $x^{\frac{1}{x}}$.

Fig. 25.



III. Sind über einer Geraden MN (Fig. 25) zwei Punkte A und B gegeben, welche mit einem Punkte P der Geraden zu der gebrochenen Linie $AP + BP$ verbunden werden sollen, so kann man nach dem Minimum dieses Weges $AP + BP$ fragen. Für $MN = c$, $MA = a$, $NB = b$, $MP = x$ ist derselbe

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2}.$$

Man findet daraus

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$
$$f''(x) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}^3} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}^3}.$$

Aus $f'(x) = 0$ ergiebt sich zur Bestimmung von x die Gleichung

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}.$$

Der aus ihr folgende Werth von x gehört zu einem Minimum, weil $f''(x)$ immer positiv bleibt. Geometrisch bedeutet übrigens die vorstehende Gleichung soviel wie

$$\cos MPA = \cos NPB \text{ d. i. } \angle MPA = \angle NPB$$

und hiernach ist die Construktion leicht, indem man $MA' = MA$ nimmt und $A'B$ zieht, welche Gerade MN in P schneidet (Spiegelungsgesetz).

IV. Um ein cylindrisches Hohlmaass von gegebenem cubischen Inhalte A mit dem geringsten Materialaufwande herzustellen, muss die Oberfläche desselben ein Minimum werden; nennen wir x den Halbmesser der Grundfläche und y die Höhe, so ist

$$A = x^2 \pi y, \quad f(x) = 2 x \pi y + x^2 \pi$$

oder, indem man den Werth von y aus der ersten Gleichung in die zweite setzt:

$$f(x) = \frac{2A}{x} + \pi x^2$$

$$f'(x) = -\frac{2A}{x^2} + 2\pi x$$

$$f''(x) = +\frac{4A}{x^3} + 2\pi;$$

aus $f'(x) = 0$ ergiebt sich für x der Werth

$$x = \sqrt[3]{\frac{A}{\pi}},$$

für welchen $f''(x)$ positiv, mithin $f(x)$ ein Minimum wird. Zu beachten ist noch, dass jetzt $y = \dfrac{Ax}{x^3 \pi} = x$, mithin der Halbmesser der Grundfläche gleich der Höhe des Maasses ist.

Besondere Aufmerksamkeit verdient bei allen Untersuchungen über Maxima und Minima noch der Ausnahmefall, wenn $f'(x)$ sein Vorzeichen nicht stetig mittelst Durchganges durch die Null, sondern sprungweise ändert, denn auch derartige Zeichenwechsel können Maxima und Minima anzeigen, die man durch das vorige Verfahren nicht finden würde. Ist z. B.

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{(1 - x)^2}, \text{ also } f'(x) = \tfrac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{1 - x}},$$

so bleibt $f'(x)$ positiv für alle $x < 1$, und negativ für alle $x > 1$; der Zeichenwechsel geschieht hier aber sprungweise, denn man hat

$$f'(1-0) = +\infty, f'(1+0) = -\infty$$

und mithin erleidet $f'(x)$ eine Unterbrechung der Continuität an der Stelle $x = 1$. Abgesehen davon geht aber aus den Vorzeichen von $f'(x)$ mit Sicherheit hervor, dass $f(x)$ wächst von $x = -\infty$ bis $x = 1$ und abnimmt von $x = 1$ bis $x = +\infty$, dass also $f(x)$ für $x = 1$ sein Maximum $f(1) = 1$ erhalten muss. Man wird dies geometrisch leicht bestätigt finden, indem man die Aufmerksamkeit auf den Berührungswinkel τ richtet, welcher durch die Gleichung $\tan\tau = f'(x)$ bestimmt wird. Derselbe ist spitz für $x < 1$, wächst mit x gleichzeitig, wird $= \frac{1}{2}\pi$ für $x = 1$ und nachher stumpf für $x > \frac{1}{2}\pi$; an der Stelle $x = 1$ besitzt daher die Curve eine Spitze, von welcher beide Theile convex gegen die Abscissenachse gekrümmt sind. — Aehnliche Betrachtungen gelten für alle derartigen Ausnahmefälle, und zwar entscheidet sich die Beschaffenheit einer Funktion an einer solchen besonderen Stelle immer sehr leicht dadurch, dass man den Lauf der Funktion in der Nachbarschaft jener Stellen vorzugsweise genauer berücksichtigt.

§. 27.

Maxima und Minima der Funktionen mehrerer Variabelen.

Ist $F(x, y, z, \ldots)$ eine Funktion der unabhängigen Variabelen $x, y, z, \ldots$, so kann es ein zusammengehörendes System spezieller Werthe dieser Variabelen geben, etwa $x = a$, $y = b$, $z = c$ u. s. w., wodurch $F(a, b, c, \ldots)$ grösser oder kleiner wird als alle Nachbarwerthe der Funktion, d. h. als alle die Werthe, welche entstehen, wenn man für x irgend einen Werth aus dem Intervalle $a - h$ bis $a + h$, für y einen Werth aus dem Intervalle $b - k$ bis $b + k$ u. s. w. nimmt, wobei h, k etc. beliebig kleine Grössen bezeichnen. Ein solcher besonderer Werth $F(a, b, c, \ldots)$ der Funktion $F(x, y, z, \ldots)$, heisst ein Maximum oder Minimum, je nachdem er grösser oder kleiner als seine Nachbarn ist. Die Aufgabe wäre jetzt, das System der speziellen Werthe $x = a$, $y = b$, etc. aufzufinden.

Wenn nun überhaupt beliebige unabhängige Variabelen $x, y, z, \ldots$ vorhanden sind, so kann man sich dieselben als ebensoviel willkürliche Funktionen einer neuen unabhängigen Variabelen t denken, denn man übersieht auf der Stelle, dass für

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t), \ldots$$

sich alle möglichen vorgeschriebenen Werthe von x, y, z, ... herausbringen lassen, wenn man nur t und die Natur der Funktionen φ, ψ, χ etc. danach wählt; so würde z. B. schon die einfache Annahme $x = \alpha t$, $y = \beta t$, $z = \gamma t$, ... wo α, β, γ völlig willkürliche Faktoren sind, zu diesem Zwecke hinreichen. Durch diese Bemerkung reduzirt sich die Aufgabe, $F(x, y, z, \ldots)$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, auf die einfachere, für eine Funktion von nur einer unabhängigen Variabelen die grössten und kleinsten Werthe aufzusuchen. Soll nun

$$F(x, y, z, \ldots) = F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t), \ldots]$$

oder kurz F seinen Maximal- oder Minimalwerth erhalten, so muss

$$\frac{dF}{dt} = 0$$

sein; diese Gleichung wird in unserem Falle, wo x, y, z, .. als abhängig von t erscheinen:

$$1)\qquad \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \ldots = 0.$$

Bei der gänzlichen Willkürlichkeit der Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$, also auch ihrer Differenzialquotienten

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t),\ \frac{dy}{dt} = \psi'(t),\ \frac{dz}{dt} = \chi'(t) \ldots$$

(wie z. B. im obigen speziellen Falle der Faktoren α, β, γ ...) kann aber die Gleichung 1) nur bestehen, wenn die Coeffizienten der unbestimmten Grössen für sich Null sind, wenn also die Gleichungen stattfinden:

$$2)\qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \ldots.$$

deren Anzahl mit der Anzahl der unabhängigen Variabelen übereinkommt, so dass es also immer möglich ist, die obigen Gleichungen nach x, y, z, ... aufzulösen und so die Werthesysteme $x = a$, $y = b$, $z = c$ etc. zu bestimmen. Ist dies geschehen, so bedarf es noch einer Discussion, ob das gefundene System ein Maximum oder Minimum von F bildet. Diese Entscheidung wird dadurch herbeigeführt, dass man den zweiten Differenzialquotienten $\frac{d^2F}{dt^2}$ entwickelt und nachsieht, ob er durch Substitution der für x, y, z, ... gefundenen Werthe positiv oder negativ ausfällt. Wir wollen diese Untersuchung unter der Voraussetzung, dass F eine Funktion von nur zwei unabhängigen Variabelen x und y ist, näher ausführen.

Man hat zunächst mit Rücksicht auf die Gleichungen 2)

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,\frac{dx}{dt}\,\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

oder wenn der Quotient $\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt}$ mit q bezeichnet wird:

$$3)\qquad \frac{d^2F}{dt^2} = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,q^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,q + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Soll dieser zweite Differenzialquotient zu einer Entscheidung führen, so darf er nicht verschwinden, also darf **n i c h t** zugleich

$$4)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = 0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

sein; ist diese Vorbedingung erfüllt, so muss der in 3) verzeichnete Ausdruck, worin noch die ganz unbestimmten Grössen q und $\frac{dy}{dt}$ vorkommen, immer gleiches Vorzeichen behalten, von welchem nachher noch zu entscheiden ist, ob es das Plus- oder Minuszeichen ist. Das Vorzeichen von $\frac{d^2F}{dt^2}$ hängt nun einzig allein von dem Ausdrucke

$$5)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,q^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,q + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

ab, welcher unter der Form $\alpha q^2 + 2\beta q + \gamma$ enthalten ist. Hätte ferner die quadratische Gleichung $\alpha q^2 + 2\beta q + \gamma = 0$ eine reelle Wurzel q_1, so würde der Ausdruck $\alpha q^2 + 2\beta q + \gamma$ sein Vorzeichen wechseln, wenn man q das Intervall $q_1 - \delta$ bis $q_1 + \delta$ durchlaufen liesse, wo δ eine beliebig kleine Grösse bezeichnet. Damit also der fragliche Ausdruck sein Vorzeichen nicht wechsele, ist es nothwendig und hinreichend, dass jene quadratische Gleichung imaginäre Wurzeln besitze, folglich $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$ sein. Die Bedingung für die Unveränderlichkeit des Vorzeichens in Nro. 5) besteht also in der Ungleichung

$$6)\qquad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0,$$

sie vertritt zugleich die in Nro. 4) angegebene Determination, denn wenn sie erfüllt ist, können die Gleichungen 4) nicht sämmtlich stattfinden. Aus der Bedingung 6) ersieht man ferner, dass

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

(nach Substitution der für x und y gefundenen Werthe) gleiche Vorzeichen besitzen müssen, weil ausserdem die Ungleichung 6) die Summe zweier positiven Grössen als negativ angeben würde. Da ferner nach den bisherigen Bestimmungen der Ausdruck in 5) sein Vorzeichen nicht wechselt, so darf man auch $q = 0$ setzen, ohne einen solchen Wechsel befürchten zu müssen, und man ersieht daraus, dass jener Ausdruck dasselbe Vorzeichen besitzt wie $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ oder $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$; nunmehr lautet die Entscheidung:

Die aus den Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ abgeleiteten Werthe von x und y müssen zunächst der Bedingung

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0$$

genügen und geben das Maximum oder Minimum der Funktion $F(x, y)$, je nachdem sie die Differenzialquotienten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

gleichzeitig negativ oder positiv machen.

Finden die Gleichungen 4) zusammen statt, verschwindet also $\frac{d^2 F}{dt^2}$ für die gefundenen Werthe von x und y, so giebt der zweite Differenzialquotient keine Entscheidung und man muss sich dann an die höheren Differenzialquotienten wenden, was jedoch umständliche Rechnungen erfordert. Ebenso wird die Sache etwas verwickelt, wenn es sich um eine Funktion von drei oder mehr Variabelen handelt. Man wird in allen solchen Fällen besser thun, aus der Natur der dargestellten speziellen Aufgabe zu entscheiden, ob überhaupt ein Maximum oder Minimum stattfindet.

Als Beispiel hierzu diene die Aufgabe, die kürzeste Entfernung zweier Geraden zu finden, deren Gleichungen

$$7)\qquad \left\{\begin{array}{l} y = B_1 x + b_1 \\ z = C_1 x + c_1 \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} y = B_2 x + b_2 \\ z = C_2 x + c_2 \end{array}\right\}$$

gegeben sind. Nehmen wir auf der ersten Geraden einen Punkt $x_1 y_1 z_1$, auf der zweiten einen Punkt $x_2 y_2 z_2$ an, so ist die Länge der verbindenden Geraden

$$8)\qquad \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

und wenn diese ein Maximum oder Minimum wird, so erhält offenbar auch ihr Quadrat seinen grössten oder kleinsten Werth; wir haben uns daher nur mit dem Ausdrucke

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$$

zu beschäftigen, welcher vermöge der Gleichungen 7) die Form

$$\begin{aligned}F(x_1, x_2) = (x_1-x_2)^2 &+ (B_1 x_1 - B_2 x_2 + b_1 - b_2)^2 \\ &+ (C_1 x_1 - C_2 x_2 + c_1 - c_2)^2\end{aligned}$$

annimmt und eine Funktion der beiden unabhängigen Variabelen x_1 und x_2 darstellt. Man hat nun

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1} &= (1+B_1^2+C_1^2)x_1-(1+B_1B_2+C_1C_2)x_2 \\
&\qquad +(b_1-b_2)B_1+(c_1-c_2)C_1 \\
\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_2} &= -(1+B_1B_2+C_1C_2)x_1+(1+B_2^2+C_2^2)x_2 \\
&\qquad -(b_1-b_2)B_2-(c_1-c_2)C_2 \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} &= 2(1+B_1^2+C_1^2) \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial x_2} &= -2(1+B_1B_2+C_1C_2) \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} &= 2(1+B_2^2+C_2^2).
\end{aligned}$$

$B_2 \quad C_2$

Setzt man die ersten Differenzialquotienten der Null gleich, so erhält man zwei Gleichungen ersten Grades zur Bestimmung von x_1 und x_2; die so bestimmten Werthe entsprechen einem Minimum, weil einerseits die Bedingung 6), d. h.

$$4(1+B_1B_2+C_1C_2)^2-(1+B_1^2+C_1^2)(1+B_2^2+C_2^2)<0$$

hier erfüllt und $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}$ sowie $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}$ positiv ist. Aus x_1 und x_2 erhält man mittelst der Gleichungen der Geraden die Werthe von y_1, z_1 und y_2, z_2; nach Substitution der Werthe von x_1, x_2, y_1, y_2, z_1 und z_2 giebt nun der unter Nro. 8) verzeichnete Ausdruck die kürzeste Entfernung der beiden Geraden. Uebrigens liegt es hier in der Natur der Aufgabe, dass nur ein Minimum stattfindet, und man hätte sich daher die Entwickelung der zweiten Differenzialquotienten von F nebst den angeknüpften Bemerkungen ersparen können.

§. 28.

Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

Die Werthe, durch welche eine gegebene Funktion mehrerer Variabelen zu einem Maximum oder Minimum werden soll, sind häufig noch an eine oder mehrere Bedingungen gebunden, welche in Gleichungen ausgedrückt werden. Suchte man z. B. die kürzeste Entfernung eines Punktes $\alpha\beta\gamma$ von einer Ebene, deren Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

sein möge, so wäre der Ausdruck

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2},$$

welcher den Abstand der Punkte $\alpha\beta\gamma$ und xyz angiebt, zu einem Minimum zu machen, jedoch mit der besonderen Rücksicht, dass die Werthe von x, y und z der Gleichung der Ebene genügen müssen. Das natürlichste Verfahren wäre nun die Herausschaffung der abhängigen Variabelen; ist z. B. nur eine Bedingungsgleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ gegeben, so könnte man sie nach z auflösen und den so gefundenen Werth von z in die Funktion $F(x, y, z)$, deren Maximum oder Minimum gesucht wird, substituiren; an die Stelle einer Funktion von drei Variabelen tritt nunmehr eine Funktion zweier unabhängiger Variabelen, und für diese gelten die Vorschriften des vorigen Paragraphen. Sind zwischen drei Variabelen zwei Bedingungsgleichungen $\varphi(x, y, z) = 0$ und $\psi(x, y, z) = 0$ gegeben, so kann man mittelst derselben y und z durch x ausdrücken und wenn man diese Werthe substituirt, so enthält jetzt die Funktion $F(x, y, z)$ nur noch eine unabhängige Variabele. Diese Eliminationen sind aber nicht selten sehr umständlich oder unmöglich und man muss in solchen Fällen einen anderen Weg einschlagen, welcher darin besteht, dass man nicht die abhängigen Variabelen selbst aus den Bedingungsgleichungen, sondern die Differenzialquotienten der abhängigen Variabelen aus den Differenzialgleichungen der gegebenen Bedingungen eliminirt. Die Ausführung dieses Gedankens ist folgende.

Wenn $F(x, y)$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht und dabei die Bedingung $\varphi(x, y) = 0$ erfüllt sein soll, so ist nur eine unabhängige Variabele x vorhanden und es muss daher $\frac{dF}{dx} = 0$ sein; dies giebt in unserem Falle, wo F ausser x noch die abhängige Variabele y enthält,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Differenzirt man auch die Bedingungsgleichung in Beziehung auf x als unabhängige Variabele, so ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0;$$

die Elimination von $\frac{dy}{dx}$ aus beiden Differenzialgleichungen giebt

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

und wenn man diese Gleichung mit der Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ verbindet, so hat man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y.

Bei drei Variabelen x, y, z und zwei Bedingungsgleichungen, also wenn das Maximum oder Minimum von $F(x, y, z)$ gesucht wird, während zugleich

$$\varphi(x, y, z) = 0 \text{ und } \psi(x, y, z) = 0$$

sein soll, ist nur eine unabhängige Variabele x vorhanden, von welcher y und z abhängen. Die Gleichung $\frac{dF}{dx} = 0$ lautet dann

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

und die Differenzialgleichungen der Bedingungen sind:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ eliminiren, es bleibt dann eine Gleichung übrig, welche in Verbindung mit den beiden Bedingungen $\varphi(x, y, z) = 0$ und $\psi(x, y, z) = 0$ zur Bestimmung von x, y, z hinreicht.

Sind drei Variabele vorhanden mit nur einer Bedingungsgleichung, so kann man x und y als unabhängige Variabele, z als abhängige Veränderliche ansehen; es muss dann sein

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

oder wenn man beachtet, dass in F auch z als Funktion von x und y vorkommt,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Andererseits ist aber durch partielle Differenziation der Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

durch Elimination von $\frac{\partial z}{\partial x}$ aus der ersten und dritten, so wie von $\frac{\partial z}{\partial y}$ aus der zweiten und vierten Gleichung folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

und diese Gleichungen bestimmen mit $\varphi(x, y, z) = 0$ vereinigt die Unbekannten x, y, z. — Dieses Verfahren bleibt immer anwendbar, weil es stets nur Eliminationen aus Gleichungen des ersten Grades erfordert. Wir geben noch einige spezielle Beispiele dazu.

I. Aus den vier Seiten α, β, γ, δ soll das Viereck von grösstmöglichem Inhalte construirt werden. Nennen wir x den von α und β, y den von γ und δ eingeschlossenen Winkel, so ist die Fläche des Vierecks

$$\tfrac{1}{2}\, \alpha\beta \sin x + \tfrac{1}{2}\, \gamma\delta \sin y$$

und wenn diese, also auch das Doppelte von ihr, ein Maximum werden soll, so ist

$$F = \alpha\beta \sin x + \gamma\delta \sin y$$

zu setzen. Berechnet man ferner die Diagonale, welche den Winkeln x und y gegenüberliegt, so hat man

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos x = \gamma^2 + \delta^2 - 2\gamma\delta \cos y;$$

mithin als Bedingungsgleichung

$$\varphi = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 - 2\alpha\beta \cos x + 2\gamma\delta \cos y = 0.$$

Die Differenzialgleichungen werden nun

$$\frac{dF}{dx} = \alpha\beta \cos x + \gamma\delta \cos y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\alpha\beta \sin x - 2\gamma\delta \sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Setzt man $\frac{dF}{dx} = 0$ und eliminirt $\frac{dy}{dx}$, so folgt:

$$2\alpha\beta\gamma\delta (\cos x \sin y + \sin x \cos y) = 0,$$

d. h. $\sin(x + y) = 0$ oder $x + y = 0^0$, oder 180^0, 360^0 u. s. w.

Da aber x und y Winkel eines Vierecks sind, so kann nur $x + y = 180^0$ oder $y = 180^0 - x$ sein.

Hieraus folgt weiter $\frac{dy}{dx} = -1$, mithin

$$\frac{dF}{dx} = \alpha\beta \cos x - \gamma\delta \cos y$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = -\alpha\beta \sin x + \gamma\delta \sin y \frac{dy}{dx}$$

$$= -(\alpha\beta \sin x + \gamma\delta \sin y)$$

und da dieser Ausdruck jedenfalls negativ bleibt (wegen $x < 180^0$ und $y < 180^0$), so entspricht die Bedingung $x + y = 180^0$ einem Maximum. Zugleich ergiebt sich, dass das gesuchte Viereck ein Sehnenviereck ist.

II. Um auch die im Eingange erwähnte Aufgabe zu lösen, setzen wir

$$F = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$$
$$\varphi = Ax + By + Cz + D = 0$$

und es sind dann zwei unabhängige Variabele x und y vorhanden, während z eine Funktion von x und y ist. Setzt man die beiden partiellen Differenzialquotienten von F der Null gleich, so hat man zunächst

$$x - \alpha + (z-\gamma)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$y - \beta + (z-\gamma)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Ferner ergiebt sich durch partielle Differenziation der Gleichung $\varphi = 0$:

$$A + C\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\quad B + C\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

und durch Elimination der partiellen Differenzialquotienten:

$$A(z-\gamma) - C(x-\alpha) = 0$$
$$B(z-\gamma) - C(y-\beta) = 0.$$

Verbindet man diese zwei Gleichungen mit der dritten $Ax + By + Cz + D = 0$, so findet man der Reihe nach z, y und x, nämlich

$$x = \alpha - AK,\ y = \beta - BK,\ z = \gamma - CK,$$

wobei zur Abkürzung

$$K = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

gesetzt worden ist. Dass diese Werthe nur einem Minimum von

F entsprechen können, folgt aus der geometrischen Bedeutung unserer Aufgabe von selbst; auch sind die Werthe für x, y, z identisch mit den aus der analytischen Geometrie bekannten Coordinaten des Fusspunktes der vom Punkte $\alpha\beta\gamma$ auf die Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$ herabgelassenen Senkrechten.

III. Um kurz sein zu können, wollen wir im Folgenden unter Stellung einer Ebene die drei Winkel verstehen, welche eine auf der Ebene errichtete Senkrechte mit drei rechtwinkligen Coordinatenachsen bildet. Ist nun s die Fläche eines ebenen Polygones, welches die Stellung $\alpha\beta\gamma$ besitzt, so sind die drei Projektionen von s auf die Coordinatenebenen xy, xz, yz der Reihe nach

$$a = s \,.\, \cos\gamma,\ b = s \,.\, \cos\beta,\ c = s \,.\, \cos\alpha.$$

Denken wir uns eine vierte Ebene, welche mit der Ebene von s den Winkel ϑ bildet, so ist die Projektion von s auf die neue Ebene

$$p = s \,.\, \cos\vartheta$$

oder wenn uvw die Stellung der vierten Ebene bezeichnet:

$$p = s(\cos\alpha \cos u + \cos\beta \cos v + \cos\gamma \cos w)$$

d. i.

$$p = a \cos u + b \cos v + c \cos w.$$

Diese Formel giebt also die Projektion p von s auf eine beliebige Ebene, wenn man erst die Projektionen von s auf die Coordinatenebenen und die Stellung der neuen Ebene kennt. Für mehrere beliebig liegende Figuren s_1, s_2 etc. hat man entsprechend

$$P = A \cos u + B \cos v + C \cos w,$$

wo P die Projektionssumme $p_1 + p_2 +$ etc. bedeutet, und ebenso A, B, C die Summen der auf den Coordinatenebenen construirten Projektionen sind. Wir suchen nun die Ebene, für welche P sein Maximum erreicht. Dann sind wegen der immer stattfindenden Bedingung

$$\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w - 1 = 0$$

zwei unabhängige Variabele u und v vorhanden, während w eine Funktion von u und v ist. Durch partielle Differenziation von P hat man, die Differenzialquotienten gleich Null gesetzt,

$$A \sin u + C \sin w \frac{\partial w}{\partial u} = 0$$

$$B \sin v + C \sin w \frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

Die partiellen Differenzialquotienten der Bedingungsgleichung sind

$$\cos u \sin u + \cos w \sin w \frac{\partial w}{\partial u} = 0$$

$$\cos v \sin v + \cos w \sin w \frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

Durch Elimination der partiellen Differenzialquotienten von w ergeben sich hieraus die Gleichungen

$$A \cos w = C \cos u, \; B \cos w = C \cos v,$$

welche in Verbindung mit der Bedingungsgleichung zur Bestimmung von u, v, w führen; man erhält nämlich

$$\frac{\cos u}{A} = \frac{\cos v}{B} = \frac{\cos w}{C} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

und hierdurch erfährt man die Stellung derjenigen Ebene, für welche die Summe der Projektionen von allen Polygonen ihren grössten Werth erreicht.

Cap. VII.

Die Potenzenreihen.

§. 29.

Beziehungen zwischen einer Funktion und ihrer Derivirten.

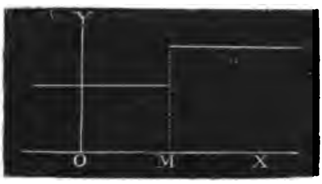
I. Wir haben bisher immer vorausgesetzt, dass die Funktionen und ihre Differenzialquotienten stetig verlaufen, wenigstens haben wir gerade den Stellen, wo eine Discontinuität eintritt, noch keine besondere Aufmerksamkeit geschenkt; dies soll jetzt geschehen. Betrachten wir die Definition des Differenzialquotienten

$$f'(x) = Lim \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta}$$

etwas genauer, so finden wir im Zähler die Differenz zweier Nachbarwerthe $f(x + \delta)$ und $f(x)$ der Funktion; eine solche Differenz verschwindet im Allgemeinen mit δ zugleich, ausgenommen, wenn man dem x einen solchen Spezialwerth ξ ertheilt, für welchen $f(x)$ eine Unterbrechung der Continuität erleidet. Ist dies der Fall, so nähert sich $f(x + \delta) - f(x)$ irgend einer endlichen Grenze c und es wird

$$f'(\xi) = Lim \frac{c}{\delta} = \infty .$$

Fig. 26.



Um dies an einem ganz einfachen Beispiele nachzuweisen, denken wir uns eine Funktion, welche von $x = -\infty$ bis $x = \xi - 0$ den constanten Werth k und von $x = \xi + 0$ bis $x = +\infty$ den ebenfalls constanten Werth $K > k$ besitzt, deren geometrisches Bild also aus zwei Geraden parallel zur Abscissenachse (Fig. 26) bestehen würde. Für $x < \xi$ ist immer $f'(x) = 0$, für $x = \xi - 0$ hat man

$$f'(\xi - 0) = Lim \frac{f(\xi - 0 + \delta) - f(\xi - 0)}{\delta} = Lim \frac{K - k}{\delta} = +\infty$$

endlich für $x \overset{=}{>} \xi + 0$ wiederum $f'(x) = 0$. Eine ganz ähnliche Betrachtung gilt für jeden anderen Fall; man wird sich dadurch leicht überzeugen, dass der Differenzialquotient endlich ist für $x < \xi$, unendlich für $x = \xi - 0$ und dann wieder endlich für $x \geqq \xi + 0$; hieraus erkennt man zugleich die Discontinuität des Differenzialquotienten, zusammen also die Richtigkeit des Satzes:

> Der Differenzialquotient einer Funktion wird an allen den Stellen unendlich und zugleich discontinuirlich, an welchen die ursprüngliche Funktion eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet.

Setzen wir umgekehrt den Differenzialquotienten als endlich und continuirlich voraus, so kann die Funktion nicht aufhören stetig zu sein, weil ausserdem der Differenzialquotient unendlich und discontinuirlich würde, was gegen die Voraussetzung ist; also:

> So lange der Differenzialquotient einer Funktion endlich und stetig bleibt, verläuft die Funktion selbst continuirlich.

Auch hierin liegt eine geometrische Bedeutung; denken wir uns $f'(x)$ als Ordinate zur Abscisse x, so ist $f(x)$ die über der Abscisse x stehende Fläche, ändern sich nun die Ordinaten stetig und bleiben sie dabei unendlich, so erhellt unmittelbar, dass auch die Aenderungen der Fläche stetig geschehen.

II. Bezeichnen wir mit A den grössten und mit B den kleinsten Werth, welchen die derivirte Funktion $F'(x)$ annimmt, wenn x das Intervall $x = a$ bis $x = a + h$ durchläuft, und setzen wir A und B als endliche Grössen voraus, so ist innerhalb der genannten Grenzen

$$F'(x) - A \text{ negativ, } F'(x) - B \text{ positiv}$$

oder auch, wenn man $x = a + z$ setzt, wo nun z das Intervall 0 bis h durchläuft,

1) $$F'(a + z) - A < 0$$

2) $$F'(a + z) - B > 0.$$

Die linker Hand stehenden Ausdrücke können als die Differenzialquotienten der Funktionen

3) $$F(a + z) - F(a) - Az$$

und

4) $$F(a + z) - F(a) - Bz$$

angesehen werden, und es folgt aus Nro. 1), dass der Ausdruck in 3) abnimmt von $z = 0$ bis $z = h$, ebenso aus Nro. 2), dass die unter 4) verzeichnete Funktion innerhalb desselben Intervalles wächst. Da ferner $F(a + z) - F(a) - Az$ für $z = 0$ verschwindet, so kann jene Abnahme nur in der Weise geschehen, dass der fragliche Ausdruck von $z = 0$ bis $z = h$ negativ bleibt, also

5) $$F(a + h) - F(a) - Ah < 0$$

ist; ebenso kann die Funktion $F(a + z) - F(a) - Bz$, weil sie für $z = 0$ verschwindet, nur auf der positiven Seite wachsen, woraus folgt:

6) $$F(a + h) - F(a) - Bh > 0.$$

Lassen wir nun in dem Ausdrucke

7) $$F(a + h) - F(a) - F'(x)h$$

x von a bis $a + h$ gehen, so erreicht $F'(x)$ einmal sein Maximum A und ein andermal sein Minimum B; im ersten Falle wird nach Nro. 5) der Ausdruck negativ, im zweiten Falle positiv (nach Nro. 6). Dieser Uebergang vom Negativen zum Positiven ist bei einer stetigen Funktion nur möglich, wenn sie dazwischen den Werth Null angenommen hat, setzen wir also $F'(x)$ als stetig von $x = a$ bis $x = a + h$ voraus, so muss es einen Spezialwerth μ von x geben, für welchen

$$F(a + h) - F(a) - F'(\mu)h = 0$$

oder

$$F(a + h) = F(a) + hF'(\mu)$$

wird; dieser Spezialwerth μ liegt irgendwo zwischen a und $a + h$, man kann ihn daher mit $a + \vartheta h$ bezeichnen, wo ϑ einen nicht näher bekannten positiven echten Bruch bedeutet; demnach ist jetzt

8) $$F(a + h) = F(a) + hF'(a + \vartheta h),$$

und zwar unter der Determination, dass $F'(x)$ endlich und stetig bleibt von $x = a$ bis $x = a + h$. Denkt man sich $F(x)$ als die über der Abscisse x stehende Fläche, mithin $F'(x)$ als Ordinate zur Abscisse x, so besitzt der obige Satz die sehr einfache Bedeutung, dass die über der Strecke h der Abscissenachse stehende Fläche als ein Rechteck angesehen werden kann, welches h zur Basis und eine mittlere Ordinate zur Höhe hat.

Für $a + h = b$, also $h = b - a$ geht die Gleichung 8) in die folgende über

9) $$F(b) = F(a) + (b - a)F'[a + \vartheta(b - a)],$$

bei welcher $F'(x)$ stetig und endlich bleiben muss von $x = a$ bis $x = b$.

§. 30.

Die endlichen Potenzenreihen.

Bereits in §. 24., Formel 5) haben wir gesehen, dass die geänderte Funktion $f(x+h)$ durch eine Reihe ausgedrückt werden kann, welche nach Potenzen von h fortschreitet und die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ etc. als Coeffizienten enthält; jene Formel galt jedoch nur für solche h, welche die Null zur Grenze haben, und es wäre daher die Frage, ob sich diese Beschränkung nicht wegschaffen liesse. Zu diesem Zwecke versuchen wir die Summirung der Reihe:

$$f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n-1)}(x),$$

bei welcher wir das beliebige $h=a-x$ setzen können, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun. Sei $F(x)$ die unbekannte Summe dieser Reihe, also

$$1)\qquad F(x)=f(x)+\frac{a-x}{1}f'(x)+\frac{(a-x)^2}{1\,.\,2}f''(x)+\ldots.$$
$$\ldots+\frac{(a-x)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x),$$

so findet man zunächst durch beiderseitige Differenziation und nach Hebung aller negativen Glieder

$$2)\qquad F'(x)=\frac{(a-x)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}f^{(n)}(x).$$

Um hieraus $F(x)$ selbst abzuleiten, benutzen wir das Theorem 9) des vorigen Paragraphen, indem wir uns x an die Stelle von b gesetzt denken; es ist dann

$$F(x)=F(a)+(x-a)\frac{[a-(a+\vartheta(x-a))]^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}f^{(n)}(a+\vartheta(x-a))$$

oder

$$3)\qquad F(x)=F(a)-\frac{\vartheta^{n-1}(a-x)^n}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(a+\vartheta(x-a)),$$

wobei jedoch vorausgesetzt wird, dass $F'(x)$ stetig und endlich bleibe, von $x=a$ bis $x=b=x$. Diese Bedingung ist, wie man aus Nro. 2) abnehmen kann, erfüllt, sobald $f^{(n)}(x)$ innerhalb jenes Intervalles stetig und endlich bleibt, woraus weiter folgt, dass auch $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n-2)}(x)$, $\ldots f'(x)$, $f(x)$ von $x=x$ bis $x=a$ endlich und stetig sind. Die Formel 3) gäbe nun die gesuchte Summe $F(x)$, wenn der spezielle Werth $F(a)$ derselben bekannt wäre; dieser findet sich aber unmittelbar aus Nro. 1), nämlich $F(a) = f(a)$, und es ist nun die gesuchte Summe:

$$f(a) - \frac{\vartheta^{n-1}(a-x)^n}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n)}(a+\vartheta(x-a)).$$

Setzen wir endlich noch $a - x = h$, also $a = x + h$, und $1 - \vartheta = \Theta$, wo nun Θ wiederum einen positiven echten Bruch bezeichnet, so haben wir die Formeln

4) $$f(x+h) - \frac{(1-\Theta)^{n-1}h^n}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n)}(x+\Theta h)$$

$$= f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n-1)}(x)$$

und

5) $$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots.$$

$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n-1)}(x) + \frac{(1-\Theta)^{n-1}h^n}{1.2..(n-1)}f^{(n)}(x+\Theta h),$$

deren Gültigkeit an die Bedingung gebunden ist, dass $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x) \ldots f^{(n)}(x)$ endlich und stetig bleiben, während x das Intervall x bis $x + h$ durchläuft. Die Gleichung 5) heisst das Theorem von **Taylor**, das letzte Glied rechter Hand der **Rest** der Reihe.

Nehmen wir speziell $x = 0$ und setzen nachträglich x an die Stelle von h, so gehen die vorigen Formeln in die folgenden über:

6) $$f(x) - \frac{(1-\Theta)^{n-1}x^n}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n)}(\Theta x)$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{1.2..(n-1)}x^{n-1}$$

und

7) $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \ldots..$$

$$\ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{1.2..(n-1)}x^{n-1} + \frac{(1-\Theta)^{n-1}x^n}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(\Theta x),$$

zu deren Bestehen erfordert wird, dass $f(x)$, $f'(x)$, $\ldots f^{(n)}(x)$ stetig und endlich bleiben, während x von 0 bis x geht. Die Formel 7) heisst das Theorem von **Mac Laurin** und kann dazu dienen, um eine gegebene Funktion $f(x)$, welche der eben ausgesprochenen Bedingung genügt, in eine sogenannte Potenzenreihe zu verwandeln.

Um dies an einem Beispiele zu zeigen, nehmen wir

$$f(x) = l\left(\frac{1}{1-x}\right) = -l(1-x);$$

es ist dann für ein positives ganzes k

$$f^{(k)}(x) = \frac{1.2.3\ldots(k-1)}{(1-x)^k},\ f^{(k)}(0) = 1.2\ldots(k-1)$$

und mithin durch Substitution in Nro. 7):

$$8)\quad l\left(\frac{1}{1-x}\right) = \tfrac{1}{1}x + \tfrac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{n-1}x^{n-1} + \frac{(1-\Theta)^{n-1}}{(1-\Theta x)^n}x^n.$$

Um Grenzen für die Gültigkeit dieser Formel zu ermitteln, bedarf es nur der Erinnerung, dass im vorliegenden Falle $f(x)$, $f'(x) \ldots f^{(n)}(x)$ stetig und endlich bleiben einerseits von $x = 0$ bis $x = -\infty$, andererseits von $x = 0$ bis $x = +1$, die Grenzfälle $-\infty$ und $+1$ ausgeschlossen; die Formel 8) gilt demnach für $-\infty < x < +1$. Was den Rest der Reihe betrifft, so kann man bemerken, dass der Ausdruck

$$\frac{(1-\Theta)^{n-1}}{(1-\Theta x)^n}$$

als Funktion von Θ betrachtet abnimmt, wenn Θ von 0 bis 1 geht, dass mithin der Fall $\Theta = 0$ das Maximum, und $\Theta = 1$ das Minimum des Restes giebt; demzufolge ist

$$1 > \frac{(1-\Theta)^{n-1}}{(1-\Theta x)^n} > 0$$

und man könnte daher den Rest kurz mit $\Theta_n x^n$ bezeichnen, wo Θ_n einen echten positiven Bruch bedeutet.

Die unter 4) und 6) verzeichneten Resultate sind noch einer Modification fähig, welche hauptsächlich die beliebige Zahl n betrifft. Lassen wir nämlich n fortwährend wachsen, so werden die rechter Hand befindlichen aus n Gliedern bestehenden endlichen Reihen zu unendlichen Reihen, und es würden die Formeln 4) und 6) in die folgenden übergehen:

$$f(x+h) - Lim\,\frac{(1-\Theta)^{n-1}h^n f^{(n)}(x+\Theta h)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

$$= f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) + \ldots\ldots$$

$$f(x) - Lim\,\frac{(1-\Theta)^{n-1}x^n f^{(n)}(\Theta x)}{1.2\ldots(n-1)}$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \frac{f'''(0)}{1.2.3}x^3 + \ldots\ldots$$

Der Betrag eines jeden der linker Hand angedeuteten Grenzwerthe lässt sich im Allgemeinen nicht angeben, es ist aber denkbar, dass unter Umständen

$$9) \qquad Lim \frac{(1-\Theta)^{n-1} h^n f^{(n)}(x+\Theta h)}{1.2.3\ldots.(n-1)} = 0$$

und ebenso

$$10) \qquad Lim \frac{(1-\Theta)^{n-1} x^n f^{(n)}(\Theta x)}{1.2.3\ldots.(n-1)} = 0$$

werden kann; in diesem Falle gehen die vorigen Formeln in die folgenden über:

$$11) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots.$$

$$12) \qquad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{1.2} x^2 + \ldots.$$

So z. B. war in dem unter Nro. 8) behandelten Beispiele der Rest von der Form $\Theta_n x^n$ und Θ_n ein echter Bruch; für unendlich wachsende n ist der Grenzwerth hiervon im Allgemeinen nicht bestimmt, beschränkt man aber x auf das Intervall -1 bis $+1$, setzt also $1 > x > -1$ voraus, so ist $Lim\ (\Theta_n x^n)$ entschieden $= 0$ und man gelangt damit zu der Formel:

$$13) \qquad l\left(\frac{1}{1-x}\right) = \tfrac{1}{1}x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \ldots\ldots$$

die sich vor der in 8) verzeichneten Formel dadurch auszeichnet, dass sie keine nicht näher bekannte Grösse Θ enthält, während sie andererseits spezieller als die Formel 8) ist, insofern in ihr x einen weit kleineren Spielraum hat.

Jede solche Fortsetzung der endlichen Reihen zu unendlichen Reihen verlangt, wie wir so eben sahen, eine besondere Restuntersuchung, die um so weitläufiger ausfallen wird, je verwickelter die Funktion $f(x)$ ist; es muss daher unsere Sorge sein, diese Umständlichkeit so viel als möglich zu vermeiden.

§. 31.

Die unendlichen Potenzenreihen.

Die unendliche Taylor'sche Reihe (Nro. 11. des vorigen Paragraphen) erfordert vermöge ihrer Entstehung aus der endlichen Taylor'schen Reihe (Nro. 5.) zunächst die Stetigkeit und Endlichkeit von $f(x)$ und allen Differenzialquotienten dieser Funktion. Um zweitens die Grenzen zu finden, innerhalb deren sich h bewegen darf, ist nichts einfacher, als die Gleichung

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x)+\ldots.$$

einer Probe zu unterwerfen. Setzen wir nämlich $h=a-x$, so wäre

1) $$f(a)=f(x)+\frac{a-x}{1}f'(x)+\frac{(a-x)^2}{1\,.\,2}f''(x)+\ldots.$$

mithin die Summe der Reihe eine Constante, und da der Differenzialquotient einer Constanten die Null ist, so müsste auch der Differenzialquotient der unendlichen Reihe verschwinden. Die obige unendliche Reihe geht nun aus der endlichen Reihe

$$f(x)+\frac{a-x}{1}f'(x)+\frac{(a-x)^2}{1\,.\,2}f''(x)+\ldots+\frac{(a-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)$$

dadurch hervor, dass die Gliederzahl n in's Unendliche wächst; auf gleiche Weise entsteht der Differenzialquotient der unendlichen Reihe aus dem Differenzialquotienten der endlichen Reihe; letzterer ist nach Formel 2) §. 30.:

$$\frac{(a-x)^{n-1}}{1\,.\,2\,\ldots\,(n-1)}f^{(n)}(x),$$

mithin haben wir für unendlich wachsende n

$$\frac{d\left[f(x)+\frac{a-x}{1}f'(x)+\frac{(a-x)^2}{1\,.\,2}f''(x)+\ldots.\right]}{dx}$$

$$=Lim\,\frac{(a-x)^{n-1}f^{(n)}(x)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(n-1)}$$

und wenn dieser Differenzialquotient die Null sein soll, so ist die Bedingung

2) $$Lim\,\frac{(a-x)^{n-1}f^{(n)}(x)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}=0$$

erforderlich, aus welcher sich der für x erlaubte Spielraum bestimmen lässt.

Fassen wir das Bisherige zusammen, so haben wir für $a=x+h$ folgendes Theorem:

A. Bleiben die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ etc. endlich und stetig innerhalb des Intervalles x bis $x+h$, so gilt die Formel

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x)+\ldots.$$

und zwar für alle x und h, welche der Bedingung

$$Lim \frac{h^{n-1} f^{(n)}(x)}{1.2.3\ldots(n-1)} = 0$$

Genüge leisten.

Für $x = 0$, und wenn nachher x für h geschrieben wird, ergiebt sich weiter:

B. Bleiben die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ etc. endlich und stetig innerhalb des Intervalles 0 bis x (d. h. innerhalb eines die Null einschliessenden Intervalles), so ist

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{1.2} x^2 + \ldots.$$

und zwar für alle x, welche der Bedingung

$$Lim \frac{f^{(n)}(0)\, x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} = 0$$

Genüge leisten.

Dieser Satz ist von besonderer Wichtigkeit, da in ihm die Mittel enthalten sind, um eine Funktion in eine Potenzenreihe zu verwandeln; man kann ihn auch folgendermassen formuliren:

C. Wenn die Funktion $f(x)$ nebst ihren sämmtlichen Differenzialquotienten endlich und stetig bleibt innerhalb eines den Werth $x = 0$ einschliessenden Intervalles, so ist jederzeit eine Reihenverwandlung von der Form

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots.$$

ausführbar und zwar gilt dieselbe für alle x, welche der Bedingung

$$Lim\,(n A_n x^{n-1}) = 0$$

genügen.

Der Sinn der beiden Determinationen, welche hier vorkommen, ist einfach folgender: Die Bedingung der Continuität von $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ etc. innerhalb eines die Null umfassenden Intervalles scheidet die Funktionen aus, welche nicht in Potenzenreihen verwandelbar sind (wie z. B. $\frac{1}{x}$, $\cot x$ etc.), die zweite Bedingung $Lim\,(nA_n x^{n-1})$ scheidet die Werthe der Variabelen x aus, für die jene Entwickelung nicht mehr gilt. Was endlich die Coeffizienten A_0, A_1, A_2 etc. betrifft, so kann man sie entweder direkt nach den Formeln

$$3) \qquad A_0 = f(0), \quad A_k = \frac{f^{(k)}(0)}{1.2.3\ldots k}$$

oder indirekt dadurch bestimmen, dass man mit der Gleichung

$f(x) = A_0 + A_1 x +$ etc. weiter rechnet, wie es z. B. in §. 6. V. geschehen ist; im letzteren Falle bildet der Satz C. die wissenschaftliche Grundlage der sogenannten **Methode der unbestimmten Coeffizienten.**

Für den Gebrauch des genannten Theorems ist es übrigens vortheilhaft, der Bedingung $Lim\,(n A_n x^{n-1})$ eine etwas andere Form zu geben, zu welcher man auf folgendem Wege gelangt. Wenn eine Funktion $\psi(n)$ von n die Eigenschaft besitzt, dass für unendlich wachsende n der absolute Werth des Quotienten $\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}$ sich einer unter der Einheit liegenden Grenze nähert, wenn also die Beziehungen

$$Lim\,\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} = \lambda \text{ und } \lambda < 1$$

statt finden, so darf man für irgend ein endliches n

$$\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} = \lambda + \delta$$

setzen, wo man δ zwar nicht näher kennt, aber wenigstens weiss, dass es bei unendlich wachsenden n die Null zur Grenze hat. Da nun δ beliebig klein gemacht werden kann, sobald nur n hinreichend gross genommen wird, so lässt sich letzteres auch so wählen, dass $\delta < 1 - \lambda$ oder $\lambda + \delta < 1$ wird und bleibt, wenn n noch weiter zunimmt. Nennen wir k den jedenfalls bestimmten endlichen Werth des n, von welchem ab $\lambda + \delta < 1$ bleibt, so haben wir

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = \lambda + \delta < 1$$

$$\frac{\psi(k+2)}{\psi(k+1)} < \lambda + \delta$$

$$\frac{\psi(k+3)}{\psi(k+2)} < \lambda + \delta$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\psi(k+m)}{\psi(k+m-1)} < \lambda + \delta$$

und durch Multiplikation dieser m Ungleichungen

$$\frac{\psi(k+m)}{\psi(k)} < (\lambda + \delta)^m.$$

Für $k + m = n$, also $m = n - k$, erhält man hieraus

$$\psi(n) < \frac{\psi(k)}{(\lambda+\delta)^k}\,(\lambda + \delta)^n.$$

Lassen wir jetzt n in's Unendliche wachsen und beachten, dass

$\lambda + \delta$ ein echter Bruch, mithin $Lim\,(\lambda + \delta)^n = 0$ ist, und dass es sich immer nur um absolute Werthe handelt, so folgt augenblicklich

$$Lim\ \psi(n) = 0.$$

Wenn also eine Funktion $\psi(n)$ für unendlich wachsende n die Null zur Grenze haben soll, so ist dazu nur nöthig, dass der absolute Werth von $Lim\ \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}$ weniger als die Einheit betrage. Wenden wir dies auf den Fall $\psi(n) = n A_n x^{n-1}$ an, so folgt, dass $Lim\ (n A_n x^{n-1}) = 0$ wird, wenn

$$Lim\ \frac{(n+1) A_{n+1}\, x^n}{n A_n\, x^{n-1}} = Lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{A_{n+1}}{A_n}\, x\right] < 1,$$

d. h.

$$x\, Lim\ \frac{A_{n+1}}{A_n} < 1 \quad \text{oder} \quad x < Lim\ \frac{A_n}{A_{n+1}}$$

ist. Dies giebt an die Stelle von C. folgenden Satz:

D. Wenn die Funktion $f(x)$ nebst ihren sämmtlichen Differenzialquotienten endlich und stetig bleibt innerhalb eines die Null umfassenden Intervalles, so ist jederzeit eine Reihenverwandlung von der Form

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots .$$

ausführbar und zwar gilt sie für alle x, deren absoluter Werth weniger beträgt, als der absolute Werth von

$$Lim\ \frac{A_n}{A_{n+1}}.$$

In dieser Form werden wir das Theorem von **Mac Laurin** anwenden, um sowohl die einfachen als auch zusammengesetzte Funktionen in Reihen zu verwandeln. Diese Reihen sind meistentheils unendliche und bedürfen ebendeswegen einer kleinen Voruntersuchung, die wir sogleich erledigen wollen. Wir hatten nämlich in §. 6. bemerkt, dass man nicht geradezu sagen dürfe, „der Differenzialquotient einer Summe unendlich vieler Summanden ist die Summe von den Differenzialquotienten der einzelnen Theile", und es ist daher nöthig, die Frage nach dem Differenzialquotienten einer unendlichen Potenzenreihe zu diskutiren, da die folgenden Betrachtungen solche Differenziationen erheischen werden. Sind nun $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ etc. in der Nachbarschaft der Null stetig und endlich, so kann man $f(x) = \varphi'(x)$ setzen und hat

4) $$\varphi'(x) = \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{1}\, x + \frac{\varphi'''(0)}{1.2}\, x^2 + \ldots .$$

und zwar unter der Bedingung

5) $$val\,num\,x < val\,num\,Lim\,\frac{(n+2)\,\varphi^{(n+1)}(0)}{\varphi^{(n+2)}(0)}.$$

Aus der Stetigkeit und Endlichkeit von $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ etc. folgt andererseits die von $\varphi(x)$, und indem wir das Theorem von Mac Laurin auf den Fall $f(x) = \varphi(x)$ anwenden

6) $$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1}\,x + \frac{\varphi''(0)}{1.2}\,x^2 + \dots\dots$$

7) $$val\,num\,x < val\,num\,Lim\,\frac{(n+1)\,\varphi^{(n)}(0)}{\varphi^{(n+1)}(0)}.$$

Differenzirt man aber die Gleichung 6), so erhält man Nro. 4), und schreibt man in Nro. 5) m für $n+1$, so ist jene Bedingung von der in 7) verzeichneten nicht verschieden; d. h. zusammen: die aus dem Theoreme von Mac Laurin abgeleiteten Gleichungen dürfen auf gewöhnliche Weise differenzirt werden, ohne dass das Gültigkeitsintervall der Variabelen zu ändern wäre.

§. 32.

Die Reihen für Potenz, Logarithmus und Exponenzialgrösse.

I. Da wir die Entwickelung des Ausdrucks $(1+x)^\mu$ für den Fall eines ganzen positiven μ bereits erledigt haben, so setzen wir im Folgenden immer voraus, dass der Exponent keine ganze positive Zahl sei. Es ist nun für $f(x) = (1+x)^\mu$

$$f^{(k)}(x) = \mu(\mu-1)\dots(\mu-\overline{k-1})(1+x)^{\mu-k} = \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-\overline{k-1})}{(1+x)^{k-\mu}},$$

wobei die zweite Form für $k > \mu$ dient, ein Fall, der früher oder später immer eintritt. Sollen nun $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ etc. endlich und stetig bleiben, so muss x zwischen -1 und $+\infty$ liegen, und dies ist die erste Bedingung der Entwickelung. Ferner haben wir

$$A_0 = 1,\quad A_k = \frac{f^{(k)}(0)}{1.2\dots k} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-\overline{k-1})}{1.2.3\dots.k}$$

und es lautet demnach die allgemeine Binomialformel

1) $$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}\,x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\,x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\,x^3 + \dots$$

Um noch die Grenzen zu bestimmen, auf welche x zu beschränken ist, entwickeln wir den Grenzwerth von

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{n+1}{\mu-n} = -1 - \frac{\mu+1}{n-\mu};$$

dieser ist -1; und es gilt demnach die Formel 1) für alle x, deren absoluter Werth weniger als die Einheit beträgt, d. h. kürzer für $1 > x > -1$.

Setzt man $x = \frac{b}{a}$ und multiplizirt beiderseits mit a^μ, so erhält man die Formel:

2) $$(a+b)^\mu$$
$$= a^\mu \left\{ 1 + \frac{\mu}{1}\,\frac{b}{a} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \dots \right\}$$
$$1 > \frac{b}{a} > -1,$$

die unter Anderem zur Ausziehung beliebig hoher Wurzeln benutzt werden kann.

II. Für $f(x) = l\,(1+x)$ hat man

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}.1.2.3\dots(k-1)}{(1+x)^k}$$

und man erkennt hieraus, dass $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ etc. endlich und stetig bleiben für $-1 < x < +\infty$. Ferner ist

$$A_k = \frac{(-1)^k}{k},$$

$$Lim\,\frac{A_n}{A_{n+1}} = Lim\,\frac{n+1}{n} = Lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

und mithin haben wir jetzt die Reihenentwickelung

3) $$l(1+x) = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \dots$$
$$1 > x > -1.$$

Für negative x gilt ganz ähnlich die Formel:

4) $$l(1-x) = -\tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \dots$$
$$1 > x > -1,$$

welche mit der unter Nro. 13) des vorigen Paragraphen gewonnenen Formel übereinstimmt. Die Differenz der Formeln 3) und 4) giebt:

5) $$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\,[\tfrac{1}{1}x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \dots]$$
$$1 > x > -1.$$

Für $x = \frac{z-1}{z+1}$, wo nun z jede beliebige positive Zahl sein darf, folgt weiter

6) $$lz = 2\left[\tfrac{1}{1}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right],$$

womit das Problem gelöst ist, zu jeder positiven Zahl den natürlichen Logarithmus zu finden. Für $z = 2$ erhält man z. B. eine zur Berechnung von $l2$ vortheilhafte Formel.

Aus der Bemerkung, dass $l(a+b) = la + l\left(1 + \frac{b}{a}\right)$ ist, zieht man leicht unter Anwendung von Nro. 3):

7) $$l(a+b) = la + \tfrac{1}{1}\left(\frac{b}{a}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \ldots$$

$$1 > \frac{b}{a} > -1,$$

und diese Formel dient zur Berechnung von $l(a+b)$, sobald la bekannt ist. Ein zu demselben Zwecke noch brauchbareres Resultat findet sich aus der identischen Gleichung

$$l(a+b) = la + l\left(\frac{1 + \frac{b}{2a+b}}{1 - \frac{b}{2a+b}}\right),$$

indem man den zweiten Theil der rechten Seite nach Formel 5) entwickelt; es ist nämlich

8) $$l(a+b) = la + 2\left[\tfrac{1}{1}\left(\frac{b}{2a+b}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{b}{2a+b}\right)^3 + \ldots\right],$$

und dies gilt für alle positiven a und b, weil $\frac{b}{2a+b}$ unter dieser Voraussetzung immer ein echter Bruch ist.

Aus den obigen nur für natürliche Logarithmen gültigen Formeln kann man sehr leicht entsprechende Formeln für künstliche Logarithmen ableiten; es ist nämlich immer

$$z = e^{lz} \quad \text{und} \quad z = b^{({}^b\!\log z)},$$

folglich, wenn man von beiden rechten Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt,

$$lz \,.\, le = {}^b\!\log z \,.\, lb \text{ oder } lz = {}^b\!\log z \,.\, lb,$$

woraus umgekehrt folgt:

9) $${}^b\!\log z = \frac{1}{lb}\, lz = M_b \,.\, lz.$$

Für das Brigg'sche System ist $b = 10$, und man findet nach den obigen Formeln:

$$l\,10 = 2{,}30258509\ldots, \quad M_{10} = 0{,}434294482\ldots$$

III. Nehmen wir $f(x) = e^x$, so ist $f^{(k)}(x) = e^x$ und es bleiben $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ etc. durchaus stetig und endlich. Ferner hat man

$$A_k = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k},$$

$$Lim \frac{A_n}{A_{n+1}} = Lim\,(n+1) = \infty,$$

und so gelangt man augenblicklich zu der für alle x geltenden Formel:

10) $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\ldots$$

Für $x = 1$ findet man hieraus den Werth von e, nämlich

$$e = 2{,}7182818284590\ldots$$

Setzt man $e^x = z$ und nimmt beiderseits die Logarithmen in irgend einem Systeme, so folgt $x = \frac{\log z}{\log e}$, mithin:

11) $$z = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{\log z}{\log e}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{\log z}{\log e}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots$$

und es ist damit die Aufgabe gelöst, die Zahl z zu finden, wenn ihr Logarithmus gegeben ist. Am einfachsten gestaltet sich die Formel, wenn man die Logarithmen als natürliche nimmt.

Für ein negatives x geht die Gleichung 10) in die folgende über:

12) $$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\ldots,$$

die man mit jener durch Addition und Subtraktion zu neuen Formeln verknüpfen kann.

§. 33.

Die trigonometrischen Reihen.

I. Da $\sin x$ und $\cos x$ durchaus stetige Funktionen und ihre Differenzialquotienten wiederum Cosinus oder Sinus sind, so erhellt zunächst die Möglichkeit von Potenzenreihen für die genannten Funktionen. Was nun den Sinus anbelangt, so hat man

$$f(0) = f^{II}(0) = f^{IV}(0) \ldots = 0,$$
$$f^{I}(0) = +1,\ f^{III}(0) = -1,\ f^{V}(0) = +1 \text{ etc.}$$

und mithin folgende Reihe

1) $$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \ldots 5} - \ldots\ldots\ldots$$

Um die Gültigkeitsgrenzen derselben zu bestimmen, kann man bemerken, dass die Entwickelung von $\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ nothwendig zu folgendem Resultate geführt haben müsste:

$$\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{1}{1} - \frac{x}{1.2.3} + \frac{x^2}{1.2..5} - \frac{x^3}{1.2..7} + \ldots$$

und hier wäre, abgesehen vom Vorzeichen:

$$Lim \frac{A_n}{A_{n+1}} = Lim\,[2n(2n+1)] = \infty;$$

die vorstehende Reihe gilt demnach für alle endlichen x, dies muss nun auch bei der Formel 1) der Fall sein. Man hätte zu diesem Resultate unmittelbar durch die Bemerkung gelangen können, dass die Bedingung

$$x < Lim \frac{A_n}{A_{n+1}} \text{ aus } Lim \frac{A_{n+1}\,x^{n+1}}{A_n\,x^n} < 1$$

hergeleitet worden ist, und dass es in letzterer nur auf den Quotienten zweier aufeinander folgender Glieder ankommt.

Behandelt man die Funktion $f(x) = \cos x$ auf dieselbe Weise, so findet man ohne Schwierigkeit die Reihe:

$$2)\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2..6} + \ldots,$$

welche ebenfalls für jedes endliche x gilt.

II. Was die Sekante anbetrifft, so lässt sich aus dem Umstande, dass $\sec x$ und die Differenzialquotienten davon innerhalb des Intervalles $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ endlich und stetig bleiben, die Möglichkeit einer Reihenverwandlung schliessen; man erkennt dieselbe aber auch aus der Gleichung

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-(1-\cos x)},$$

wenn man dieselbe mittelst des aus dem Binomialtheoreme folgenden Satzes

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \ldots, \quad 1 > u > -1$$

transformirt. Man erhält nämlich unter der Voraussetzung, dass $1 - \cos x$ ein echter Bruch, mithin $\cos x$ positiv und also x zunächst zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ enthalten ist:

$$sec\,x = 1 + (1 - cos\,x) + (1 - cos\,x)^2 + \dots\dots$$

$$\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2},$$

und wenn man sich statt $cos\,x$ seinen Werth aus Nro. 2) gesetzt, die angedeuteten Potenzirungen ausgeführt und das Gleichartige vereinigt denkt, so muss offenbar dieselbe Reihe zum Vorschein kommen, wie bei der unmittelbaren Anwendung des Theoremes von Mac Laurin. Zugleich erhellt, dass diese Reihe nur gerade Potenzen von x enthalten, dass also eine Gleichung von der Form

3) $$sec\,x = 1 + \frac{T_2 x^2}{1.2} + \frac{T_4 x^4}{1.2..4} + \frac{T_6 x^6}{1.2...6} + \dots$$

$$\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$$

resultiren wird. Darin ist für $f(x) = sec\,x$

$$T_2 = f^{\mathrm{II}}(0), \quad T_4 = f^{\mathrm{IV}}(0), \quad T_6 = f^{\mathrm{VI}}(0), \dots.$$

Um eine Formel zu erhalten, aus welcher sich diese Coeffizienten berechnen lassen, setzen wir in der Gleichung 8) des §. 12. $x = 0$; es ist dann:

4) $$T_n = n_2\,T_{n-2} - n_4\,T_{n-4} + n_6\,T_{n-6} - \dots.$$

und indem man diese Beziehung für $n = 2, 4, 6, ..$ in Anspruch nimmt, wobei $T_0 = 1$ zu setzen ist, findet man successive:

$$T_2, \; T_4, \; T_6 \text{ etc.}$$

Ein ganz ähnliches Verfahren ist auf die Tangente anwendbar. Die Möglichkeit der Entwickelung erhellt nämlich daraus, dass $tan\,x$ und die Differenzialquotienten dieser Funktion endlich und stetig bleiben für $\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi$; man würde aber dieselbe Reihe finden müssen, wenn man die Sekantenreihe mit der Sinusreihe multiplizirte und die letztere Bemerkung zeigt auf der Stelle die Form des Resultates und die Grenzen seiner Gültigkeit, nämlich:

5) $$tan\,x = \frac{T_1 x}{1} + \frac{T_3 x^3}{1.2.3} + \frac{T_5 x^5}{1.2..5} + \dots.$$

$$\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}.$$

Dabei ist, wenn $tan\,x$ mit $f(x)$ bezeichnet wird,

$$T_1 = f^{\mathrm{I}}(0), \quad T_3 = f^{\mathrm{III}}(0), \quad T_5 = f^{\mathrm{V}}(0), \dots.$$

Andererseits ergiebt sich aus der Formel 9) §. 12. für $x = 0$:

6) $$T_n = sin\,\frac{n\pi}{2} + n_2\,T_{n-2} - n_4\,T_{n-4} + n_6\,T_{n-6} - \dots$$

und mittelst dieser Formel lassen sich die Coeffizienten $T_1, T_3, T_5, \dots$ berechnen, indem man $n = 1, 3, 5, \dots$ setzt.

Die Formeln 4) und 6) unterscheiden sich nur insofern, als in der ersten n immer gerade, in der zweiten ungerade ist; man kann daher als allgemeine Formel für alle T die folgende aufstellen:

$$7)\quad T_n - n_2 T_{n-2} + n_4 T_{n-4} - n_6 T_{n-6} + \ldots = \sin\frac{n\pi}{2},$$

und aus dieser ergeben sich für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ wechselweise die Tangenten- und Sekantenkoeffizienten, nämlich:

$$T_1 = 1,\ T_2 = 1,\ T_3 = 2,\ T_4 = 5,\ T_5 = 16,\ T_6 = 61, \ldots.$$

Aus der Bemerkung, dass $\sec x + \tan x = \tan(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x)$, zieht man endlich auch das bemerkenswerthe Resultat:

$$8)\quad \tan(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x) = 1 + \frac{T_1 x}{1} + \frac{T_2 x^2}{1.2} + \frac{T_3 x^3}{1.2.3} + \ldots.$$
$$\tfrac{1}{2}\pi > x > -\tfrac{1}{2}\pi,$$

worin die sämmtlichen mit T bezeichneten Coeffizienten vorkommen.

III. Die Cosekante lässt sich unmittelbar nicht in eine Potenzenreihe der bisherigen Form verwandeln; man hat nämlich unter Benutzung der Formel 1):

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \ldots},$$

und wenn man sich die Division ausgeführt denkt, so entsteht eine Reihe, welche mit $\frac{1}{x}$ anfängt. Wir versuchen daher die Entwickelung des Produktes $x \operatorname{cosec} x$. Es ist zunächst:

$$x \operatorname{cosec} x = \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)}$$
$$= 1 + \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) + \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^2 + \ldots\ldots,$$

was jedoch voraussetzt, dass $1 - \frac{\sin x}{x}$ ein echter Bruch, also $\frac{\sin x}{x}$ positiv, folglich x zwischen $-\pi$ und $+\pi$ enthalten sei. Denkt man sich für $\sin x$ die gleichgeltende Reihe substituirt, die Potenzirungen von $1 - \frac{\sin x}{x}$ ausgeführt und alles Gleichartige vereinigt, so entsteht ein Resultat von der Form

$$x \operatorname{cosec} x = 1 + \frac{U_1 x^2}{1.2} + \frac{U_3 x^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

9) $$cosec\, x = \frac{1}{x} + \frac{U_1\, x}{1\,.\,2} + \frac{U_3\, x^3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{U_5\, x^5}{1\,.\,2\ldots 6} + \ldots.$$
$$\pi > x > -\pi,$$

wo es sich noch um das Bildungsgesetz der mit U bezeichneten Coeffizienten handelt. Wir werden dasselbe gleich nachher erörtern.

Aus der Cosekantenreihe folgt durch Multiplikation mit der Cosinusreihe die Cotangentenreihe; führt man die kleine Rechnung aus, so erhält man eine Gleichung von der Form:

10) $$cot\, x = \frac{1}{x} - \frac{V_1\, x}{1\,.\,2} - \frac{V_3\, x^3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{V_5\, x^5}{1\,.\,2\,.\,.\,6} - \ldots$$
$$\pi > x > -\pi,$$

wo noch die mit V bezeichneten Coeffizienten einer näheren Untersuchung bedürfen.

Die in den Gleichungen 9) und 10) vorkommenden Coeffizienten U und V sind den Tangentenkoeffizienten sehr nahe verwandt; nach einer bekannten Formel ist nämlich

$$cot\, z - 2\, cot\, 2\, z = tan\, z,$$

und hier lassen sich die drei vorkommenden Funktionen nach den Formeln 10) und 5) entwickeln; vergleicht man hierauf die Coeffizienten von z^{2n-1}, so ist

$$-\frac{V_{2n-1}}{2\,n} + \frac{2^{2n}\, V_{2n-1}}{2\,n} = T_{2n-1}$$

und hieraus ergiebt sich für V_{2n-1} die Formel:

11) $$V_{2n-1} = \frac{2\,n}{2^{2n}-1}\, T_{2n-1}.$$

Ferner hat man den bekannten goniometrischen Satz:

$$2\, cosec\, 2\, z - cot\, z = tan\, z.$$

Entwickelt man wiederum die drei vorkommenden Funktionen und vergleicht die Coeffizienten von z^{2n-1}, so findet sich:

$$\frac{2^{2n}\, U_{2n-1}}{2\,n} + \frac{V_{2n-1}}{2\,n} = T_{2n-1}.$$

Hier kann man den Werth von V_{2n-1} aus der Formel einsetzen und nachher auf U_{2n-1} als Unbekannte reduziren; dies giebt:

12) $$U_{2n-1} = \frac{2\,n}{2^{2n}} \cdot \frac{2^{2n}-2}{2^{2n}-1}\, T_{2n-1}.$$

Da man die Tangentenkoeffizienten bereits kennt, so hat es nach den Formeln 11) und 12) nicht die mindeste Schwierigkeit, aus ihnen die Cosekanten- und Cotangentenkoeffizienten abzuleiten; man findet z. B. $U_1 = \frac{1}{3}$, $U_3 = \frac{7}{15}$ etc., $V_1 = \frac{2}{3}$, $V_3 = \frac{8}{15}$ etc.

§. 34.

Die cyklometrischen Reihen.

I. Bezeichnen wir *Arcsin x* mit $f(x)$, so ist nach Formel 11) in §. 12.:

$$f^{(n+2)}(x) = \frac{(2n+1)\,x\,f^{(n+1)}(x) + n^2 f^{(n)}(x)}{1-x^2}$$

und es geht hieraus hervor, dass $f^{(n+2)}(x)$ zwischen den Grenzen -1 und $+1$ endlich und stetig bleibt, wenn $f^{(n+1)}(x)$ und $f^{(n)}(x)$ innerhalb desselben Intervalles endlieh und stetig sind. Da nun die beiden ersten Differenzialquotienten

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ und } f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

zwischen -1 und $+1$ endlich und stetig bleiben, so kommt jetzt dieselbe Eigenschaft dem nächsten Differenzialquotienten $f'''(x)$ zu, dann auch, nach derselben Schlussweise, dem folgenden $f^{IV}(x)$ u. s. w. Was ferner die Coeffizienten A_0, A_1 etc. anbelangt, so bestimmen sie sich, indem man in der Formel 1) $x=0$ und für n die Reihe der natürlichen Zahlen setzt; man findet zunächst:

2) $$f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0),$$

und da unmittelbar die Werthe

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0$$

bekannt sind, so ergiebt sich weiter:

$$\begin{array}{ll} f^{III}(0) = 1^2 \,.\, f^{I}(x)\, f^{I}(0) = 1^2 \,, & f^{IV}(0) = 0 \\ f^{V}(0) = 3^2 \,.\, f^{III}(x)\, f^{III}(0) = 3^2 \,.\, 1^2 \,, & f^{VI}(0) = 0 \\ f^{VII}(0) = 5^2 \,.\, f^{V}(x)\, f^{V}(0) = 5^2 \,.\, 3^2 \,.\, 1^2, & f^{VIII}(0) = 0 \\ \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} \end{array}$$

und folglich mittelst des Theoremes von Mac Laurin:

3) $$Arcsin\, x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{x^5}{5} + \ldots\ldots$$

Wie weit dieses Resultat gilt, entscheidet der Grenzwerth des Quotienten zweier auf einander folgenden Glieder; dieser ist nämlich

$$Lim\left(\frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}\,x^2\right) = x^2,$$

und wenn dieser weniger als die Einheit betragen soll, so muss x zwischen -1 und $+1$ enthalten sein.

Setzt man $Arcsin\, x = z$, mithin umgekehrt $x = sin\, z$, so nimmt die Gleichung 3) folgende Gestalt an:

4) $$z = \frac{\sin z}{1} + \frac{1}{2}\frac{\sin^3 z}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\sin^5 z}{5} + \cdots\cdot$$
$$\tfrac{1}{2}\pi > z > -\tfrac{1}{2}\pi.$$

Wählt man den Sinus so, dass der zugehörige Bogen einen aliquoten Theil des Kreisumfanges ausmacht, so können diese Formeln zur Berechnung der Zahl π dienen; für $\sin z = \frac{1}{2}$ z. B. liefert die Gleichung 4) eine Formel zur Berechnung von $z = \frac{1}{6}\pi$.

Um eine Reihenentwickelung für $Arccos\, x$ zu bekommen, ist nur die Erinnerung an die Formel

$$Arccos\, x = \frac{\pi}{2} - Arcsin\, x$$

nöthig; man hat dann ohne Weiteres:

5) $$Arccos\, x = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \cdots\cdot$$
$$1 > x > -1,$$

oder für $Arccos\, x = z$, und umgekehrt $x = \cos z$:

6) $$z = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{\cos z}{1} - \frac{1}{2}\frac{\cos^3 z}{3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\cos^5 z}{5} - \cdots\cdot$$
$$\tfrac{1}{2}\pi > z > -\tfrac{1}{2}\pi.$$

II. Nehmen wir in dem Theoreme von Mac Laurin $f(x) = Arctan\, x$; und erinnern uns an die Formel 10) in §. 12, so ist zunächst

7) $$f^{(n+1)}(x) = -\frac{2nx f^{(n)}(x) + n(n-1) f^{(n-1)}(x)}{1+x^2},$$

und man erkennt hieraus, dass $f^{(n+1)}(x)$ für alle x stetig und endlich bleibt, wenn $f^{(n)}(x)$ und $f^{(n-1)}(x)$ dieselbe Eigenschaft besitzen. Da nun

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ und } f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ endlich und stetig bleiben, so folgt hieraus der Reihe nach die Stetigkeit und Endlichkeit von $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$ u. s. w. innerhalb desselben Intervalles. Man hat ferner aus Nro. 7) für $x = 0$:

$$f^{(n+1)}(0) = -n(n-1) f^{(n-1)}(0),$$

und wenn man diese Beziehung mit den Werthen $f'(0) = 1$ und $f''(0) = 0$ verbindet, so ergiebt sich successive:

$$\begin{aligned} f^{III}(0) &= -2\cdot 1 f^{I}(0) = -2\cdot 1, & f^{IV}(0) &= 0\\ f^{V}(0) &= -4\cdot 3 f^{III}(0) = +4\cdot 3\cdot 2\cdot 1, & f^{VI}(0) &= 0\\ f^{VII}(0) &= -6\cdot 5 f^{V}(0) = -6\cdot 5\cdots 1, & f^{VIII}(0) &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

Das Theorem von Mac Laurin liefert nun unmittelbar die Formel:

$$8)\qquad Arctan\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots .$$

Der Grenzwerth von dem Quotienten zweier Nachbarglieder ist, abgesehen vom Vorzeichen:

$$Lim\left(\frac{2n-1}{2n+1}\,x^2\right) = x^2$$

und wenn dieser weniger als die Einheit betragen soll, so muss x zwischen -1 und $+1$ enthalten sein.

Für $Arctan\, x = z$, also $x = tan\, z$ nimmt die Gleichung 8) folgende Gestalt an:

$$9)\qquad z = \frac{tan\, z}{1} - \frac{tan^3 z}{3} + \frac{tan^5 z}{5} - \dots .$$

$$\tfrac{1}{4}\pi > z > -\tfrac{1}{4}\pi.$$

Für $x > 1$ ist die Formel 8) nicht brauchbar; man hilft sich dann auf folgende Weise. Wenn u einen Bogen des ersten Quadranten bezeichnet, und x seine Cotangente, so hat man gleichzeitig

$$cot\, u = x \text{ und } tan\, u = \frac{1}{x}$$

oder umgekehrt

$$u = Arccot\, x \text{ und } u = Arctan\frac{1}{x}.$$

Es ergiebt sich hieraus, dass die Funktionen $Arccot\, x$ und $Arctan\dfrac{1}{x}$ identisch sind, und dass man demnach an die Stelle der Gleichung

$$Arctan\, x + Arccot\, x = \frac{\pi}{2}$$

auch die folgende setzen kann:

$$Arctan\, x + Arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Für $x > 1$ ist nun $\dfrac{1}{x} < 1$, und man wird in diesem Falle die Entwickelung nach der Formel 8) auf $Arctan\dfrac{1}{x}$ anwenden; dies giebt für $x > 1$:

$$10)\qquad Arctan\, x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x}\right)^5 + \dots$$

und für $Arctan\, x = z$, woraus $\frac{1}{x} = \cot z$ folgt:

11) $$z = \frac{\pi}{2} - \frac{\cot z}{1} + \frac{\cot^3 z}{3} - \frac{\cot^5 z}{5} + \dots$$
$$z > \frac{\pi}{4}.$$

Die Formel 8), von welcher die übrigen nur Folgerungen sind, liefert Mittel zur Berechnung der Ludolph'schen Zahl. Zunächst kann man bemerken, dass die Gleichung 8), obwohl sie nur für $x < 1$ bewiesen worden ist, doch noch für $x = 1$ gelten muss. Vereinigt man nämlich die Glieder der Reihe

12) $$\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \dots,$$

so erhält man die folgende Reihe:

$$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \dots$$

und es ist unmittelbar klar, dass man immer grössere Summen bekommt, wenn man successiv zwei, drei u. s. f. Glieder dieser neuen Reihe addirt. Diese Zunahme der Summen $\frac{2}{1 \cdot 3}$, $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{5 \cdot 7}$ etc. kann aber nicht in's Unendliche fortgehen, weil man der Reihe 12), sobald man ihr die Form giebt:

$$1 - \frac{2}{3 \cdot 5} - \frac{2}{7 \cdot 9} - \frac{2}{11 \cdot 13} - \dots$$

sogleich ansieht, dass ihre Summe weniger als die Einheit beträgt. Es muss also die Summe der Reihe 12) eine endliche Grösse sein, und wir können diese Summe als den Grenzwerth betrachten, den die Summe von

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

erreicht, sobald x in 1 übergeht, woraus weiter folgt, dass dieser Grenzwerth $= Arctan\, 1 = \frac{\pi}{4}$ sein muss. Wir haben daher die merkwürdige Formel:

13) $$\frac{\pi}{4} = \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \dots$$

Dagegen darf man in Nro. 11) x nicht grösser als die Einheit nehmen, weil sonst die Reihe keine bestimmte Summe mehr besitzt.

Die Formel 13) ist zur numerischen Berechnung von π nicht brauchbar, weil man eine sehr grosse Menge von Gliedern vereinigen müsste, um eine nur mässige Genauigkeit zu erzielen; bessere Formeln erhält man dadurch, dass man $\frac{\pi}{4}$ in zwei oder mehrere Theile (Bögen) zerlegt und diese einzeln berechnet. So hat man z. B.:

$$\frac{\pi}{4} = Arctan\,\tfrac{1}{2} + Arctan\,\tfrac{1}{3}$$

$$\frac{\pi}{4} = Arctan\,\tfrac{1}{2} + Arctan\,\tfrac{1}{5} + Arctan\,\tfrac{1}{8},$$

wie man mittelst der Formeln für $tan\,(u+v)$ und $tan\,(u+v+w)$ leicht prüfen wird, und hier kann man die einzelnen Bögen in rasch abnehmende Reihen verwandeln.

III. Das Verfahren, dessen wir uns zur Entwickelung von $Arcsin\,x$ und $Arctan\,x$ bedient haben, ist fast wörtlich auf die Funktionen $sin\,(\mu\,Arcsin\,x)$ und $cos\,(\mu\,Arcsin\,x)$ anwendbar. Aus den Formeln 12) und 13) des §. 12. erkennt man nämlich, dass jene Funktionen nebst allen ihren Differenzialquotienten endlich und stetig bleiben für alle zwischen -1 und $+1$ enthaltene x; bestimmt man ferner, von $f(0)$, $f'(0)$ und $f''(0)$ ausgehend, $f'''(0)$, $f^{IV}(0)$ etc. nach den genannten Formeln, so findet man für $f(x) = sin\,(\mu\,Arcsin\,x)$ mittelst des Theoremes von Mac Laurin:

$$14)\quad sin\,(\mu\,Arcsin\,x) = \frac{\mu}{1}\,x - \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,x^3 + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,x^5 - \dots$$

und zwar gültig für $1 > x > -1$, weil der Grenzwerth zweier auf einander folgender Coeffizienten die Einheit ist. Gewöhnlich stellt man diese Gleichung in folgender Form dar:

$$15)\quad sin\,\mu z = \frac{\mu}{1}\,sin\,z - \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,sin^3 z + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,sin^5 z - \dots$$

$$\tfrac{1}{2}\pi > z > -\tfrac{1}{2}\pi.$$

Durch Differenziation in Beziehung auf z erhält man noch:

$$16)\quad cos\,\mu z = cos\,z\left\{1 - \frac{\mu^2-1^2}{1\,.\,2}\,sin^2 z + \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,sin^4 z - \dots\right\}$$

$$\tfrac{1}{2}\pi > z > -\tfrac{1}{2}\pi.$$

Ist μ eine ungerade Zahl, so brechen die Reihen ab und gelten für **jedes** z der linken Seite gleich, wie man leicht aus der Bemerkung schliessen wird, dass beiderseits die Periodizität der Funktionen dieselbe ist.

Nimmt man $f(x) = \cos(\mu \operatorname{Arcsin} x)$, so findet sich:

$$\cos(\mu \operatorname{Arcsin} x) = 1 - \frac{\mu^2}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\mu^2(\mu^2 - 2^2)}{1.2.3.4}x^4 - \ldots$$

und zwar unter der Bedingung $1 > x > -1$. Man schreibt dafür gewöhnlich:

$$17) \qquad \cos\mu z = 1 - \frac{\mu^2}{1\cdot 2}\sin^2 z + \frac{\mu^2(\mu^2 - 2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 z - \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\pi > z > -\tfrac{1}{2}\pi.$$

Durch Differenziation erhält man daraus:

$$18) \qquad \sin\mu z = \cos z \left\{\frac{\mu}{1}\sin z - \frac{\mu(\mu^2 - 2^2)}{1.2.3}\sin^3 z + \ldots\ldots\right\}$$

$$\tfrac{1}{2}\pi > z > -\tfrac{1}{2}\pi.$$

Ist μ eine gerade Zahl, so werden die Reihen in 17) und 18) endliche und gelten für jedes z der linken Seiten gleich.

Man kann die obigen Formeln auf verschiedene Weise spezialisiren, namentlich dadurch, dass man μ in Null übergehen lässt. Dividirt man z. B. beide Seiten der Gleichung 15) durch μ und setzt dann $\mu = 0$, so kommt man auf die Formel 4) zurück; die Gleichung 16) giebt für $\mu = 0$:

$$1 = \cos z \left\{1 + \tfrac{1}{2}\sin^2 z + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin^4 z + \ldots\right\},$$

was man auch unmittelbar aus der Beziehung

$$1 = \cos z\,(1 - \sin^2 z)^{-\frac{1}{2}}$$

durch Anwendung des binomischen Satzes finden kann.

Subtrahirt man beide Seiten der Gleichung 17) von der Einheit, dividirt darauf mit μ^2 und lässt nachher μ zu Null werden, so ergiebt sich das bemerkenswerthe Resultat:

$$19) \qquad \tfrac{1}{2}z^2 = \frac{\sin^2 z}{2} + \frac{2}{3}\frac{\sin^4 z}{4} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\frac{\sin^6 z}{6} + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\pi > z > -\tfrac{1}{2}\pi.$$

Durch beiderseitige Division mit μ in die Gleichung 18) und nachherige Nullifizirung von μ findet sich endlich noch:

$$z = \cos z \left\{\sin z + \frac{2}{3}\sin^3 z + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\sin^5 z + \ldots\right\}$$

oder auch, wenn man $\cos z$ und $\sin z$ durch $\tan z$ ausdrückt:

$$20) \quad z = \frac{\tan z}{1+\tan^2 z}\left\{1 + \frac{2}{3}\frac{\tan^2 z}{1+\tan^2 z} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{\tan^2 z}{1+\tan^2 z}\right)^2 + \ldots\right\}$$

$$\tfrac{1}{2}\pi > z > -\tfrac{1}{2}\pi,$$

woraus sich wiederum verschiedene Reihen für π ableiten liessen.

§. 35.

Reihenentwickelungen für Funktionen mehrerer Variabelen.

Wenn in der Funktion $f(x, y)$ zweier Variabelen x und y die Zunahmen h und k erhalten, so kann $f(x+h, y+k)$ nach Potenzen von h und k entwickelt werden; es genügt hierzu der einfache Kunstgriff, dass man $h=t\xi$ und $k=t\eta$ setzt, nunmehr $f(x+t\xi, y+t\eta)$ als Funktion von t betrachtet, und auf diese neue Funktion das Theorem von Mac Laurin anwendet. Aus

1) $$F(t) = f(x+\xi t, y+\eta t)$$

folgt nun durch successive Differenziation:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial(x+\xi t)}\xi + \frac{\partial f}{\partial(y+\eta t)}\eta$$

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{[\partial(x+\xi t)]^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial(x+\xi t)\cdot\partial(y+\eta t)}\xi\eta + \frac{\partial^2 f}{[\partial(y+\eta t)]^2}\eta^2$$

u. s. f.,

wie man leicht finden wird, indem man provisorisch $x+\xi t$ mit u, $y+\eta t$ mit v bezeichnet und dabei u und v als Funktionen von t betrachtet. Für $t=0$ erhält man:

$$F(0) = f(x, y)$$

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta$$

$$F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\xi\eta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2$$

u. s. w.

Das Theorem von Mac Laurin giebt jetzt:

$$F(t) = f(x, y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta\right)\frac{t}{1}$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\xi\eta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2\right)\frac{t^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

oder vermöge der Werthe $\xi t = h$ und $\eta t = k$:

$$2)\quad f(x+h,\, y+k) = f(x,\, y)$$
$$+ \frac{1}{1}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right)$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2\right)$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} h^2 k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2} hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} k^3\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Das Bildungsgesetz dieses Ausdruckes ist sehr leicht zu übersehen; der Coeffizient von $\frac{1}{1\,.\,2\,\ldots\,n}$ ist nämlich das vollständige Differenzial der $n$ten Ordnung, wenn man sich in demselben h statt dx und k für dy gesetzt denkt; man könnte demgemäss auch schreiben:

$$3)\quad f(x+h,\, y+k) = f(x,\, y) + \left(\frac{1}{\partial x} h + \frac{1}{\partial y} k\right) \frac{\partial f}{1}$$
$$+ \left(\frac{1}{\partial x} h + \frac{1}{\partial y} k\right)^2 \frac{\partial^2 f}{1\cdot 2}$$
$$+ \left(\frac{1}{\partial x} h + \frac{1}{\partial y} k\right)^3 \frac{\partial^3 f}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

was wenigstens sehr übersichtlich ist. Aehnliche Formeln gelten für Funktionen mehrerer Variabelen und sind leicht genug zu entwickeln. Um die Gültigkeitsbedingungen zu finden, muss man auf den Satz von Mac Laurin zurückgehen, indem man sich F für f und t für x geschrieben denkt; es ergiebt sich daraus, dass erstens die Funktion $f(x,\, y)$ nebst allen ihren Differenzialquotienten stetig und endlich bleiben muss, während x bis $x+h$ und y bis $y+k$ zunehmen; zweitens muss die Determination

$$Lim\, \frac{A_{n+1}\, t}{A_n} < 1 \quad \text{oder} \quad Lim\, \frac{F^{(n+1)}(0)\cdot t}{(n+1) F^{(n)}(0)} < 1$$

erfüllt sein; aus dieser folgt, indem man für $F^{(n)}(0)$ und $F^{(n+1)}(0)$ ihre Werthe substituirt, eine Bedingung, welcher die ξ und η genügen müssen; und wenn man in dieser $\xi t = h$ und $\eta t = k$ setzt, so erhält man die Bedingung für h und k.

Für $x = 0$, $y = 0$, und wenn man nachher x für h sowie y für k schreibt, geht die Formel 3) in die folgende über:

$$4)\quad f(x,\, y) = f(0,\, 0) + \left[\left(\frac{1}{\partial x} h + \frac{1}{\partial y} k\right) \frac{\partial f}{1}\right]_{(0)}$$
$$+ \left[\left(\frac{1}{\partial x} h + \frac{1}{\partial y} k\right)^2 \frac{\partial^2 f}{1\cdot 2}\right]_{(0)} + \ldots,$$

worin die angehangenen Nullen bezeichnen sollen, dass nach Ausführung der angedeuteten Differenziationen $x = 0$ und $y = 0$ zu setzen ist. Die nöthigen Determinationen folgen aus den bei Nr. 3) gemachten Bemerkungen.

Bricht man die Reihen ab, so müssen die nöthigen Reste hinzugefügt werden; ihren Betrag findet man aus den früheren Formeln, indem man wiederum von $F(t)$ ausgeht.

§. 36.

Das Unendlich-Kleine.

In allen Untersuchungen dieses Capitels kam es darauf an, mittelst der Differenzialquotienten einer Funktion eine Reihe für die Funktion zu bilden; es kann aber auch umgekehrt das Theorem von Taylor zur Entwickelung der Differenzialquotienten dienen, wenn die Reihe im Voraus bekannt ist. Wäre z. B.

1) $$f(x+h) = \chi_0 + \chi_1 h + \chi_2 h^2 + \chi_3 h^3 + \dots,$$

wo $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \dots$ bekannte, von x abhängige Coefficienten bedeuten mögen, so würde die Vergleichung mit dem Taylor'schen Satze

2) $$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1} h + \frac{f''(x)}{1\cdot 2} h^2 + \frac{f'''(x)}{1\cdot 2\cdot 3} h^3 + \dots$$

sogleich zu erkennen geben, dass

3) $$f(x) = \chi_0,\ f'(x) = 1\,\chi_1,\ f''(x) = 1\cdot 2\,\chi_2,\ f'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3\,\chi_3, \dots$$

wäre, und man erhielte so die Differenzialquotienten von $f(x)$. Es liesse sich übrigens selbst die Kenntniss des Taylor'schen Satzes unterdrücken und man könnte zu den Gleichungen 3) auch dadurch gelangen, dass man das frühere Theorem

4) $$Lim \frac{f(x+h) - \frac{h}{1} f'(x) - \frac{h^2}{1.2} f''(x) - \dots - \frac{h^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(x)}{1.2.3\dots n}$$

in Anwendung brächte. Aus der Gleichung 1) folgt nämlich für $h = 0$:

5) $$f(x) = \chi_0$$

und durch Subtraktion dieser Gleichung von Nro. 1) und Division mit h:

6) $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \chi_1 + \chi_2 h + \chi_3 h^2 + \dots,$$

woraus sich für verschwindende h auf der Stelle ergiebt:

7) $$f'(x) = 1 \, . \, \chi_1.$$

Setzt man für χ_0 und χ_1 ihre Werthe in Nro. 1), so folgt weiter:

8) $$\frac{f(x+h) - f(x) - \frac{h}{1} f'(x)}{h^2} = \chi_2 + \chi_3 h + \ldots,$$

mithin für verschwindende h unter Anwendung der Gleichung 4):

9) $$\frac{f''(x)}{1 \cdot 2} = \chi_2 \text{ oder } f''(x) = 1 \, . \, 2 \; \chi_2.$$

Wie sich dieses Verfahren fortsetzen lässt, übersieht man sogleich, und es bedarf dasselbe keiner besonderen Auseinandersetzung, wohl aber ist eine solche hinsichtlich der Gleichungen 6) und 8) nicht überflüssig. Vergleicht man nämlich Formel 6) mit dem aus ihr abgeleiteten Resultate in 7), so erkennt man auf der Stelle, dass in Nro. 6) das Hinschreiben der Glieder $\chi_2 h$, $\chi_3 h^2$ etc. eine überflüssige Mühe war, da sie für $h = 0$ verschwinden; ebenso war es in Nro. 8) unnöthig, die Glieder $\chi_3 h$, $\chi_4 h^2$ etc. hinzusetzen, weil sie für $h = 0$ aus der Rechnung herausfallen.

Diese für die Praxis wichtigen Bemerkungen kann man leicht zu einer Regel zusammenfassen, indem man bemerkt, dass h der Zuwachs des x, also $= \Delta x$ ist; man wird nämlich sagen:

> Bei der Entwickelung eines Differenzialquotienten oder einer Differenzialgleichung hat man die Glieder wegzulassen, welche höhere Potenzen von Δx enthalten, als die Ordnung der Differenzialgleichung beträgt.

Kennt man z. B. den binomischen Satz für ganze positive Exponenten, der in der That auch ohne Differenzialrechnung beweisbar ist, so hat man zur Entwickelung des ersten Differenzialquotienten:

10) $$(x + \Delta x)^m = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} \Delta x + \text{etc.}$$

oder

$$\frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = m x^{m-1} + \text{etc.},$$

und hieraus sogleich für $\Delta x = 0$ den Differenzialquotienten $m x^{m-1}$; will man die Differenzialgleichung, so gebe man der Gleichung 10) die Form

$$(x + \Delta x)^m - x^m = m x^{m-1} \Delta x + \text{etc.}$$

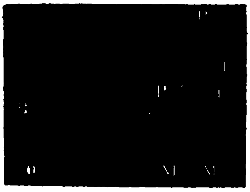
$$\text{oder } \Delta(x^m) = m x^{m-1} \Delta x + \text{etc.},$$

schreibe d statt Δ und lasse „etc.“ weg, dann wird richtig

$$d(x^m) = m\,x^{m-1}\,dx.$$

Vielleicht ist ein geometrisches Beispiel nicht überflüssig. Bedeutet $f(x)$ die über der Abscisse x stehende Fläche $BOMP$, z die Ordinate MP, τ den Berührungswinkel UPT, und Δx die Zunahme MM' der Abscisse $OM = x$ (Fig. 27), so ist

Fig. 27.



$$\begin{aligned}\text{Fläche } BOM'P' = \text{Fläche } & BOMP \\ & + \text{Rechteck } MM'UP \\ & + \text{Dreieck } UPT \\ & + \text{Abschnitt } TPP'\end{aligned}$$

oder in den obigen Zeichen ausgedrückt und mit Rücksicht darauf, dass der Abschnitt einen Bruchtheil des Dreiecks UPT bildet:

$$\begin{aligned}f(x + \Delta x) = f(x) + z\,\Delta x & + \tfrac{1}{2} \tan\tau \,.\, \Delta x^2 \\ & + \beta \,.\, \tfrac{1}{2} \tan\tau \,.\, \Delta x^2,\end{aligned}$$

wo $1 > \beta > 0$ ist; hieraus folgt:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = z + \tfrac{1}{2}\Delta x\,(1 + \beta) \tan\tau,$$

mithin für $\Delta x = 0$, $f'(x) = z$; hier sieht man gleich, dass die Genauigkeit, welche das Dreieck UPT und den Abschnitt TPP' in Rechnung zog, am unrechten Platze angebracht war; man hätte kürzer sagen können: je kleiner Δx ist, desto eher darf man den Zuwachs $MPP'M'$ der Fläche, also $\Delta f(x)$, für ein Rechteck ansehen; man hat also näherungsweise $\Delta f(x) = z\,\Delta x$, und genau $df(x) = z\,dx$.

Ganz dieselben Bemerkungen knüpfen sich an das Taylor'sche Theorem für zwei oder mehrere Variabele; so kann man z. B. bei der Entwickelung von $d^2 f(x, y)$ alle die Grössen weglassen, welche von höherer Dimension als der zweiten sind, also z. B. $\Delta x^2 \Delta y$, $\Delta x \Delta y^2$, Δx^3, Δy^4 etc.

Nicht selten nennt man Grössen, welche die Null zur Grenze haben, unendlich klein werdende, oder kürzer, unendlich kleine Grössen; in diesem Sinne sind die Differenziale dx, dy etc. unendlich kleine Grössen, und zwar der ersten Ordnung; Produkte von je zwei solchen Differenzialen, wie z. B. dx^2, $dx\,dy$, dy^2, heissen entsprechend Unendlichkleine der zweiten Ordnung, und man kann in dieser Weise fortgehend Unendlichkleine beliebiger Ordnungen bilden. Als Regel gilt dann:

> Bei der Bildung einer Differenzialgleichung sind alle unendlich kleinen Grössen wegzulassen, deren Ordnungen die Ordnung der gesuchten Differenzialgleichung übersteigen,

und man vergegenwärtige sich, dass eine Ungenauigkeit hierbei deswegen nicht entstehen kann, weil es sich immer nur um Grenzwerthe handelt, und weil bei jedem solchen Grenzübergange die Grössen, welche der Einfachheit wegen im Voraus weggelassen worden sind, auch in der That verschwinden.

Cap. VIII.

Die Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen.

§. 37.

Einfachste Fälle der Convergenz und Divergenz.

Dem Probleme der Reihenentwickelung gegebener Funktionen, womit wir uns im vorigen Capitel beschäftigten, steht das umgekehrte Problem der Reihensummirung gegenüber; dort war die Funktion gegeben und es wurde die Reihe gesucht, hier ist umgekehrt die Reihe vorgelegt und man sucht die Funktion, von der sie die Entwickelung bildet, oder kürzer ihre Summe. Im Allgemeinen gehört dieses Problem der Integralrechnung an, aber schon die blosse Kenntniss derartiger Aufgaben nöthigt zu einer Voruntersuchung, welche hier erledigt werden kann. Es ist nämlich die erste Frage, ob eine solche Summe überhaupt existirt oder nicht, und es versteht sich von selbst, dass diese Frage beantwortet sein muss, bevor man einen Versuch zur wirklichen Summirung macht; so wird man sich z. B. sehr leicht überzeugen, dass die Summe der Reihe

$$x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2} + x^3 + \frac{1}{x^3} + \ldots.$$

unter allen Umständen unendlich gross ist, womit zugleich alle etwaigen Summirungsversuche abgewiesen sind.

Denken wir uns unter $u_0, u_1, u_2, \ldots$ beliebige, nach irgend einem bestimmten Gesetze gebildete Grössen und nennen S_n die Summe der n ersten unter ihnen, also

1) $$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1},$$

so wird die rechter Hand stehende $n$gliedrige Reihe unendlich, wenn n in's Unendliche zunimmt, die Summe der unendlichen Reihe ist dann $= Lim\, S_n$ und hier sind zwei Fälle denkbar; entweder ist $Lim\, S_n$ eine bestimmte angebbare endliche Grösse S oder nicht. Im ersten Falle heisst die endliche Reihe $u_0 + u_1 + $ etc. convergent und S ihre Summe, im zweiten Falle nennt man die Reihe divergent und sie besitzt dann keine Summe.

Nehmen wir sämmtliche Reihenglieder als positiv an, so wird zur Convergenz vor allen Dingen erfordert, dass die Grössen u_0, u_1, u_2 .. fortwährend, und zwar in's Unendliche abnehmen [d. h. $Lim\, u_n = 0$ für $n = \infty$]; denn betrüge jedes Reihenglied mehr als irgend eine Zahl ε, so würde die Summe der unendlichen Reihe mehr als $\varepsilon + \varepsilon + \ldots$ *in inf.* ausmachen, d. h. in's Unendliche wachsen. Dieses Kennzeichen der Convergenz ist aber nicht ausreichend, wie man z. B. an der Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

sehen kann, deren Summe mehr als

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$= n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

beträgt, und also mit n gleichzeitig unendlich wird, obschon die Reihenglieder die Null zur Grenze haben; man muss daher eine genauere Untersuchung vornehmen, deren Prinzip darin besteht, dass man zwei Reihen vergleicht, von deren einer die Convergenz oder Divergenz bereits festgestellt ist.

Es seien zwei unendliche Reihen mit positiven Gliedern vorhanden

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots .$$

und

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots .$$

und es möge darin auf folgende Weise bezeichnet werden:

$$\frac{t_{m+1}}{t_m} = \lambda_1, \quad \frac{t_{m+2}}{t_{m+1}} = \lambda_2, \quad \frac{t_{m+3}}{t_{m+2}} = \lambda_3, \ldots ,$$

so findet man sehr leicht

2)
$$t_m + t_{m+1} + t_{m+2} + t_{m+3} + \cdots$$
$$= t_m (1 + \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \ldots .).$$

Bezeichnet man in ganz entsprechender Weise wie folgt:

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = \mu_1, \quad \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} = \mu_2, \quad \frac{u_{m+3}}{u_{m+2}} = \mu_3, \ldots ,$$

so ist analog

3)
$$u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \cdots$$
$$= u_m (1 + \mu_1 + \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_2 \mu_3 + \ldots .).$$

Finden nun zwischen den mit λ und μ bezeichneten Quotienten folgende Beziehungen statt:

$$\mu_1 < \lambda_1,\ \mu_2 < \lambda_2,\ \mu_3 < \lambda_3, \ldots.$$

so ist auch $\mu_1\,\mu_2 < \lambda_1\,\lambda_2$, $\mu_1\,\mu_2\,\mu_3 < \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3$ etc., ebenso

$$\begin{aligned} &1 + \mu_1 + \mu_1\,\mu_2 + \mu_1\,\mu_2\,\mu_3 + \ldots \\ < &1 + \lambda_1 + \lambda_1\,\lambda_2 + \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3 + \ldots \end{aligned}$$

d. i. vermöge der Gleichungen 2) und 3)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{u_m}(u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots.) \\ < &\frac{1}{t_m}(t_m + t_{m+1} + t_{m+2} + t_{m+3} + \ldots.). \end{aligned}$$

Vorausgesetzt, dass die Reihe $t_0 + t_1 + t_2 +$ etc. convergirt, also eine endliche Summe hat, ist auch die Summe von t_m, t_{m+1}, etc. eine endliche (und zwar kleinere) Grösse; der blosse Anblick der vorstehenden Ungleichung lehrt aber, dass die linke Seite eine endliche Grösse ist, es muss folglich die Reihe $u_m + u_{m+1} +$ etc. convergiren, und wenn man ihre Summe mit der jedenfalls endlichen Summe $u_0 + u_1 + \ldots + u_m$ vereinigt, so kommt nothwendig wieder eine endliche Grösse als Summe von $u_0 + u_1 +$ etc. zum Vorschein; die letztere Reihe convergirt also unter den gemachten Bedingungen. Diese bestanden in den Ungleichungen $\mu_1 < \lambda_1$, $\mu_2 < \lambda_2$ etc., d. h.

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{t_{m+1}}{t_m},\ \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} < \frac{t_{m+2}}{t_{m+1}}, \ldots.$$

und wir können demnach folgendes Theorem aufstellen:

> Die Convergenz der unendlichen Reihe $t_0 + t_1 +$ etc. bedingt die Convergenz der anderweiten Reihe $u_0 + u_1$ etc., sobald der Quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ von irgend einer bestimmten Stelle $(n = m)$ an kleiner bleibt als der entsprechende Quotient $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$.

Durch ganz ähnliche Schlüsse, die auf einer blossen Vertauschung der Zeichen $<$ und $>$ beruhen, ergiebt sich das analoge Theorem:

> Aus der Divergenz der unendlichen Reihe $t_0 + t_1 +$ etc. folgt die Divergenz der anderweiten Reihe $u_0 + u_1 +$ etc.,

sobald von irgend einer bestimmten Stelle an $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ grösser bleibt als $\frac{t_{n+1}}{t_n}$.

Die Anwendungen dieses Theoremes giebt der folgende Paragraph.

§. 38.

Convergenzbedingungen bei positiven Reihengliedern.

I. Wenn wir an der Stelle der Reihe $t_0 + t_1 +$ etc. des vorigen Paragraphen eine geometrische Progression setzen wollen

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots\ldots,$$

so ist zunächst die Frage, unter welchen Umständen diese convergirt; aus der Bemerkung, dass die Summe der n ersten Progressionsglieder durch

$$\frac{1 - a^n}{1 - a}$$

ausgedrückt wird, erkennt man aber leicht die Convergenz für den Fall $a < 1$ und die Divergenz für $a \geqq 1$. Demnach convergirt die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 +$ etc., wenn von einer gewissen Stelle an

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{a^{n+1}}{a^n} \text{ und } a < 1$$

ist; sie divergirt dagegen, wenn die umgekehrten Bedingungen stattfinden; statt dessen kann man auch sagen:

Die unendliche Reihe $u_0 + u_1 + u_2 +$ etc. convergirt oder divergirt, je nachdem der Grenzwerth von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ für unendlich wachsende n weniger oder mehr als die Einheit beträgt,

denn wenn sich $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ einer Grenze $g < 1$ nähert, so ist für hinreichend grosse n dieser Quotient nur wenig von g verschieden, also gewiss kleiner als eine beliebige zwischen g und 1 eingeschaltete Zahl a; ebenso würde für $g > 1$ früher oder später $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ nahe an g bleiben und mithin immer mehr betragen, als eine zwischen 1 und g eingelegte Zahl a.

Mittelst des oben ausgesprochenen Theoremes ist meistentheils die Entscheidung über die Convergenz nicht schwer; für die Reihe

$$1)\qquad \frac{x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{x^5}{5}+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,\frac{x^7}{7}+\ldots.$$

wäre z. B. für $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{x}{1}$ u. s. w.

$$Lim\,\frac{u_{n+1}}{u_n} = Lim\left(\frac{(2n-1)(2n-1)}{2n\,(2n+1)}\,x^2\right) = x^2$$

und mithin convergirt die Reihe für $x < 1$ und divergirt für $x > 1$.

Wenden wir überhaupt das obige Theorem auf eine Potenzenreihe an

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots,$$

so ergiebt sich, das letztere convergirt oder divergirt, je nachdem

$$Lim\,\frac{A_{n+1}\,x}{A_n}$$

kleiner oder grösser als die Einheit ist, und beachten wir die früher für das Theorem von **Mac Laurin** aufgestellte ganz gleiche Bedingung, so folgt, dass dieses Theorem, richtig angewandt, immer convergirende Reihen liefert, wie sich von selbst versteht.

II. So sicher die vorige Entscheidung ist, wenn der Grenzwerth von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ mehr oder weniger als die Einheit beträgt, so unsicher wird sie in dem Falle, wo jene Grenze der Einheit gleich ist; der gegebene Beweis hört dann auf anwendbar zu sein, und man muss sich folglich nach einem anderweiten Kennzeichen der Convergenz umsehen. Wir gehen zu diesem Zwecke von einer anderen Reihe aus.

Durch gewöhnliche Subtraktion überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+m-1)} - \frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots m\,(m+1)}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+m-1)(a+m)}$$
$$= \frac{a-1}{a}\cdot\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+m)}.$$

Setzt man in derselben $m = 1, 2, 3, \ldots n$ und addirt alle so entstehenden neuen Gleichungen, so ergiebt sich nach gehöriger Hebung:

$$2)\quad \frac{1}{a}-\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,n\,(n+1)}{a(a+1)\,(a+2)\,.\,.\,.\,.\,(a+n-1)\,(a+n)}$$
$$=\frac{a-1}{a}\left[\frac{1}{a+1}+\frac{1\,.\,2}{(a+1)(a+2)}+\frac{1\,.\,2\,.\,3}{(a+1)(a+2)(a+3)}+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ldots\ldots+\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,n}{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+n)}\right].$$

Für unendlich wachsende n wird die eingeklammerte Reihe unendlich und sie convergirt oder divergirt, je nachdem die linke Seite eine endliche Grenze hat oder nicht, wobei es nur auf den Ausdruck

$$3)\qquad \frac{1}{a}\cdot\frac{2}{a+1}\cdot\frac{3}{a+2}\cdots\frac{n}{a+n-1}\cdot\frac{n+1}{a+n}$$

ankommt, weil er allein n enthält. Ist nun a positiv und > 1, so ist $a+1>2$, $a+2>3$ etc., d. h. alle vorhandenen Faktoren sind positive echte Brüche; je mehr solcher Brüche multiplizirt werden, desto kleiner wird das Produkt, es nimmt also der Werth des Ausdruckes 3) fortwährend ab, wenn n wächst. Andererseits kann aber das Produkt nicht negativ werden und es bleibt daher nichts Anderes übrig, als dass sich jenes Produkt einer festen Grenze nähert, die entweder die Null oder zwischen 0 und $\frac{1}{a}$ enthalten, jedenfalls aber eine bestimmte Grösse ist. Hieraus folgt nach dem Früheren, dass die unendliche Reihe

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1\,.\,2}{(a+1)\,(a+2)}+\frac{1\,.\,2\,.\,3}{(a+1)\,(a+2)\,(a+3)}+\ldots$$

für $a>1$ convergirt. Vergleichen wir dieselbe mit der Reihe $u_0+u_1+u_2+u_3+$ etc., so ergiebt sich die Convergenz der letzteren, sobald von einer bestimmten Stelle ab

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{n}{a+n}\text{ und }a>1$$

ist; diese beiden Ungleichungen lassen sich in folgende Beziehung zusammenfassen:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)>a>1$$

und aus dieser entspringt nach ähnlichen Schlüssen wie in I. das Theorem:

> Die unendliche Reihe $u_0+u_1+u_2+$ etc. convergirt, wenn für unendlich werdende n der Grenzwerth des Ausdruckes
>
> $$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$$
>
> mehr als die Einheit beträgt.

In der Anwendung auf die Reihe 3) ist z. B. für $x = 1$

$$Lim\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right] = Lim\left[n\left(\frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2}-1\right)\right]$$

$$= Lim\frac{n(6n-1)}{(2n-1)^2} = Lim\frac{6-\frac{1}{n}}{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{6}{2^2} = \tfrac{3}{2} > 1,$$

mithin convergirt nach allem Bisherigen die Reihe 3) für $x < 1$ sowie für $x = 1$, sie divergirt dagegen für $x > 1$, womit die Entscheidung vollständig gegeben ist.

§. 39.

Convergenzbedingungen für Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

Wenn in einer unendlichen Reihe die Vorzeichen auf irgend eine Weise wechseln, so kann man zunächst eine neue Reihe bilden, welche dieselben Glieder mit durchaus positiven Zeichen enthält; convergirt nun die letztere, so convergirt ganz sicher auch die erste, und zwar ist ihre Summe kleiner als die Summe der Hülfsreihe, wie man durch äusserst einfache Schlüsse leicht finden wird.

Wechselt das Vorzeichen von Glied zu Glied, wie z. B. in

1) $$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots,$$

so convergirt diese Reihe, wenn dies mit der folgenden der Fall ist

2) $$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

also z. B. unter der Bedingung

3) $$Lim\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

Will man dieses Kennzeichen auf die Reihe 1) unmittelbar anwenden, so hat man zu beachten, dass der Quotient zweier benachbarten gleichstelligen Glieder in 1) und 2) der Grösse nach derselbe und nur dem Vorzeichen nach verschieden ist; man braucht dann nur den absoluten Werth von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, aus Nro. 1) genommen, in Betracht zu ziehen.

Meistentheils kann man sich diese Untersuchung ersparen und viel rascher unmittelbar über die Convergenz entscheiden. Ist nämlich wie immer $u_0 > u_1 > u_2$ etc., endlich $Lim\, u_n = 0$, und bezeichnen wir die Summe der n ersten Glieder der Reihe 1) mit S_n, so gelten folgende Schlüsse. Es ist

$$S_1 = u_0$$
$$S_3 = u_0 - (u_1 - u_2)$$
$$S_5 = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4)$$
u. s. w.,

und da die Differenzen $u_1 - u_2$, $u_3 - u_4$ etc. sämmtlich positiv sind, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen: $S_1 > S_3 > S_5$ etc., also eine fortwährende Abnahme der Summen von ungeraden Gliedermengen. Andererseits hat man

$$S_2 = u_0 - u_1$$
$$S_4 = u_0 - u_1 + (u_2 - u_3)$$
$$S_6 = u_0 - u_1 + (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5)$$
u. s. w.

und dies lässt erkennen, dass die Summen S_2, S_4, S_6 etc. fortwährend wachsen. Endlich hat man für ein beliebiges positives unendlich werdendes k

$$Lim\,(S_{2k+1} - S_{2k+2}) = Lim\, u_{2k+1} = 0,$$

mithin nähern sich S_{2k+1} und S_{2k+2} einer und derselben Grenze; diese kann aber nur eine endliche Grösse sein, weil sonst durch die Abnahme der immer positiven Summen S_1, S_3, etc. eine unendliche positive Zahl herauskommen müsste. Es folgt hieraus der wichtige Satz:

Eine unendliche Reihe mit alternirenden Vorzeichen convergirt immer, sobald ihre Glieder die Null zur Grenze haben.

Mittelst dieses Kennzeichens ergiebt sich z. B., dass die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \ldots.$$

convergirt und dass ihre Summen zwischen

$$\frac{1}{\sqrt{1}} \text{ und } \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ und } \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}$$
u. s. w.

enthalten ist; dagegen würde diese Reihe mit positiven Gliedern genommen, divergiren.

§. 40.

Grenzenübergänge an unendlichen Reihen.

I. Es kommt sehr häufig bei Reihenentwickelungen der Fall vor, dass eine Gleichung von der Form

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots.$$

für alle x bewiesen wird, die zwischen $-a$ und $+a$ enthalten sind, ohne dass man erfährt, ob sie auch für $x = a$ noch gilt oder nicht. Man hilft sich dann mittelst eines sehr einfachen Satzes, welcher folgendermassen lautet: sind zwei continuirliche Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ identisch für alle $x < a$ und bleiben beide Funktionen für $x = a$ noch stetig, so muss nothwendig auch $f(a) = \varphi(a)$ sein; denn wäre dies nicht der Fall, so müssten die beiden Funktionen entweder schon vor der Stelle $x = a$ aufgehört haben gleich zu sein, was der ersten Voraussetzung $f(x) = \varphi(x)$, für alle $x < a$, widerspräche, oder es müssten die Funktionen an der Stelle $x = a$ plötzlich verschiedene Werthe annehmen, was nur mittelst einer Discontinuität möglich wäre und wiederum gegen die Voraussetzungen streiten würde. Um von diesem Satze Gebrauch zu machen, muss man bemerken, dass die Summe einer convergenten Potenzenreihe eine Funktion $\varphi(x)$ von x ist, in welcher zu jedem x ein ganz bestimmter endlicher Werth von $\varphi(x)$ gehört, dass folglich eine solche Summe jederzeit eine stetige Funktion von x ist und es bleibt so lange die Convergenz dauert. Wir können demnach den Satz aufstellen:

> Findet eine Gleichung zwischen einer Funktion und einer Reihe für alle $x < a$ statt, so gilt diese Gleichung noch für $x = a$, wenn in diesem Spezialfalle die Reihe ihre Convergenz und die Funktion ihre Continuität behält.

So gilt z. B. für alle $x < 1$ die Formel

$$Arcsin\, x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{x^5}{5} + \ldots\ldots;$$

für $x = 1$ convergirt die Reihe noch, also ist

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{1}{5} + \ldots\ldots;$$

für $x > 1$ divergirt die Reihe, mithin kann nunmehr keine Gleichung zwischen ihr und $Arcsin\, x$ bestehen, in der That entspricht auch einem Sinus > 1 kein reeller Bogen. — Ein anderes bemerkenswerthes Beispiel bietet die binomische Reihe dar; dieselbe gilt für alle μ, wenn x zwischen -1 und $+1$ liegt, sie bleibt richtig für $x = +1$, liefert also die Formel

$$2^\mu = 1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots,$$

wenn die Reihe convergirt, und man wird nach den Entwickelungen der vorigen Paragraphen finden, dass dies für $\infty > \mu > -1$ der Fall ist; sie gilt ferner für $x = -1$, giebt also

$$0 = 1 - \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

und zwar für $\infty > \mu > 0$; sie hört dagegen auf zu convergiren, wenn die genannten Bedingungen nicht erfüllt sind, oder x die Einheit übersteigt, und es gilt dann auch das Binomialtheorem nicht mehr.

II. Eine zweite wichtige Frage, die sich mittelst der Untersuchung über die Convergenz der Reihen beantworten lässt, ist die nach dem Differenzialquotienten einer unendlichen Reihe. Für den Fall einer Potenzenreihe haben wir dieselbe bereits erledigt, es bleibt nun noch die allgemeinere Untersuchung übrig, wenn nämlich

1) $$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \dots$$

gesetzt wird, wo φ_1, φ_2, φ_3 etc. ganz beliebige Funktionen bezeichnen. Zunächst müssen wir die Convergenz der Reihe $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) +$ etc. annehmen, weil es keinen Sinn haben würde, eine divergente Reihe einer bestimmten Grösse $f(x)$ gleich zu setzen. Lassen wir x um Δx wachsen, ohne dass dadurch das Intervall der Convergenz überschritten wird, so findet sich leicht

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta \varphi_1(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta \varphi_2(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta \varphi_3(x)}{\Delta x} + \dots$$

und hier convergirt die Reihe rechter Hand wiederum. Man kann aber überhaupt

$$\frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{d\varphi(x)}{dx} + \varrho$$

setzen, wo ϱ eine nicht näher bekannte Grösse bezeichnet, von der wir jedoch wissen, dass sie mit Δx gleichzeitig verschwindet; demgemäss wird

2) $$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d\varphi_1(x)}{dx} + \frac{d\varphi_2(x)}{dx} + \frac{d\varphi_3(x)}{dx} + \dots + \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \dots$$

und hier sind die beiden Fälle zu unterscheiden, ob die Reihe der Differenzialquotienten divergirt oder convergirt. Fände das Erste statt, so muss die Reihe $\varrho_1 + \varrho_2 +$ etc. gleichfalls divergiren, denn im Gegenfalle würde der Widerspruch zum Vorschein kommen, dass eine divergente Reihe mit einer convergenten Reihe vereinigt eine bestimmte Summe gäbe. Sobald aber die Reihe $\varrho_1 + \varrho_2 +$ etc. divergirt, lässt sich schlechterdings nicht angeben, was aus ihr wird, wenn Δx und alle ϱ kleiner und kleiner werden.

Convergirt dagegen die Reihe der Differenzialquotienten, so muss auch die Reihe der ϱ convergiren und hier lässt sich leicht zeigen, dass für verschwindende Δx auch $Lim\,(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + ..)$ $= 0$ wird.

Wären nämlich alle ϱ positiv und r ihre Summe, also

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots . = r,$$

wo nun r jedenfalls endlich ist, so lasse man Δx kleiner werden; es vermindern sich alle ϱ und erhalten etwa die geringeren Werthe ϱ'_1, ϱ'_2 etc., wobei

$$\varrho'_1 + \varrho'_2 + \varrho'_3 + \ldots . = r'$$

sein möge und $r' < r$ ist. Da nun sämmtliche ϱ der Null beliebig nahe gebracht werden können, so ist es auch möglich, sie beliebig vielmal kleiner als ihre ursprünglichen Werthe zu machen; es kann also, unter m eine willkürliche positive Zahl verstanden,

$$\varrho'_1 < \frac{1}{m}\,\varrho_1,\ \varrho'_2 < \frac{1}{m}\,\varrho_2,\ \varrho'_3 < \frac{1}{m}\,\varrho_3, \ldots .$$

werden, woraus auf der Stelle folgt

$$r' < \frac{1}{m}\,r.$$

Lassen wir m in's Unendliche wachsen und beachten, dass r eine endliche Grösse ist, so folgt hieraus die unbegrenzte Abnahme des r', d. h. $Lim\,r' = 0$; entspricht also dem ursprünglichen Werthe von Δx die Summe r, so entspricht dem Werthe $\Delta x = 0$ der Werth $r' = 0$. Diese Schlüsse bleiben im Wesentlichen dieselben, wenn auch die Grössen ϱ_1, ϱ_2 etc. theils positiv theils negativ sein sollten; man kann in diesem Falle jedes positive Glied der Reihe $\varrho_1 + \varrho_2 +$ etc. mit einem negativen Gliede vereinigen und dadurch eine Reihe von Differenzen bilden, welche durchaus gleiche Vorzeichen besitzen; nennen wir δ_1, δ_2, etc. diese Differenzen, so ist

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots . = \pm\,(\delta_1 + \delta_2 + \ldots .)$$

und jetzt gilt von den δ wörtlich dasselbe was früher von den ϱ bemerkt wurde. Nach diesen Erörterungen dürfen wir sagen:

> Der Differenzialquotient von der Summe einer unendlichen Reihe ist die Summe von den Differenzialquotienten der einzelnen Glieder, jedoch nur dann, wenn sowohl die ursprüngliche als die abgeleitete Reihe convergirt.

Dass in der That dieses Theorem zu gelten aufhört, wenn die Reihe der Differenzialquotienten divergirt, kann man u. A. an folgendem Beispiele sehen. Es sei

$$f(x) = \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 4x}{4} + \ldots,$$

so convergirt die Reihe z. B. für $x = \frac{1}{2}\pi$ und giebt $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots = -\frac{1}{2} l 2$; wollte man nun

$$f'(x) = -\sin x - \sin 2x - \sin 3x - \sin 4x - \ldots .$$

setzen, so würde für $x = \frac{1}{2}\pi$ folgen $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 1 - 1 + 1$ etc. und diese Reihe hat keine bestimmte Summe, divergirt also. Demnach hätte die Tangente an dem Punkte der Curve, dessen Abscisse $x = \frac{1}{2}\pi$ und dessen Ordinate $y = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ist, keine bestimmte Lage gegen die Abscissenachse, was offenbar keinen Sinn hat. Der richtige Werth von $f'(x)$ findet sich hier nicht durch Differenziation der Reihe, sondern dadurch, dass man erst die ursprüngliche Reihe summirt und die so erhaltene Summe $f(x)$ direkt differenzirt.

Cap. IX.

Die imaginären Funktionen.

§. 41.

Die algebraischen Funktionen complexer Zahlen.

Man hat sich aus Gründen, die im Verlaufe dieses Capitels von selbst hervortreten werden, genöthigt gesehen, die Betrachtung der Funktionen auch auf den Fall auszudehnen, wo die Variabele eine Zahl von der Form $x + y\sqrt{-1}$ ist; man nennt solche Zahlen, die aus einem reellen und einem imaginären Theile bestehen, complexe Zahlen und bezeichnet zur Abkürzung $\sqrt{-1}$ gewöhnlich mit i, so dass die Gleichungen

$$1) \quad \begin{cases} i^2 = -1, & i^4 = +1, \quad i^6 = -1, \quad i^8 = +1, \ldots \\ i^3 = -i, & i^5 = +i, \quad i^7 = -i, \quad i^9 = +i, \ldots \end{cases}$$

stattfinden.

Was nun die Rechnung mit derartigen Zahlen betrifft, so heissen zwei complexe Zahlen gleich, wenn die reellen und imaginären Theile, einzeln verglichen, gleich sind; also $x + yi = \xi + \eta i$, wenn $x = \xi$ und $y = \eta$. Man versteht ferner unter der Summe $(x + yi) + (\xi + \eta i)$ den Ausdruck $(x + \xi) + (y + \eta) i$, so dass die Addition complexer Zahlen auf dieselbe Weise geschieht, als wenn i ein reeller Faktor wäre. Da die Subtraktion das Umgekehrte der Addition ist, so folgt leicht, dass auch für die Subtraktion complexer Zahlen das Verfahren dasselbe bleibt, wie bei reellen Zahlen, also $(X + Yi) - (x + yi) = (X - x) + (Y - y) i$.

Unter dem Produkte der complexen Faktoren $x + yi$ und $\xi + \eta i$ versteht man den Ausdruck

$$(x\xi - y\eta) + (x\eta + y\xi) i,$$

welcher auf dieselbe Weise gebildet ist, als wenn man jene Faktoren nach gewöhnlicher Art multiplizirt und $i^2 = -1$ setzt. Zur Ausführung der Division sei:

$$\frac{x+yi}{X+Yi} = u+vi,$$

so folgt, vermöge des hier beibehaltenen Begriffes der Division:

$$x+yi = (X+Yi)(u+vi) = (Xu-Yv)+(Xv+Yu)i,$$

mithin

$$x = Xu - Yv \text{ und } y = Xv + Yu.$$

Bestimmt man die Werthe von u und v aus diesen Gleichungen, so ist:

$$\frac{x+yi}{X+Yi} = \frac{Xx+Yy}{X^2+Y^2} + \frac{Xy-Yx}{X^2+Y^2}i.$$

Dasselbe würde man auch erhalten, wenn man Zähler und Nenner linker Hand mit $X - Yi$ multiplizirte und beachtete, dass $(X+Yi)(X-Yi) = X^2+Y^2$ ist.

Eine andere Art, die Multiplikation und Division auszuführen, beruht auf der Bemerkung, dass jede complexe Zahl $x+yi$ auf die Form $r(\cos u + i \sin u)$ gebracht werden kann. Aus

2) $$x+yi = r(\cos u + i\sin u) = r\cos u + ir\sin u$$

folgen nämlich die Gleichungen $x = r\cos u$ und $y = r\sin u$, und diese geben:

3) $$x^2+y^2 = r^2, \quad \text{also} \quad r = \sqrt{x^2+y^2},$$

4) $$\frac{y}{x} = \tan u, \quad \text{mithin } u = \operatorname{Arctan}\frac{y}{x} \pm k\pi,$$

wo k eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet; von den so bestimmten Grössen r und u nennt man die erste den **Modulus**, die zweite das **Argument** der complexen Zahl $x+yi$. Man kann jetzt die Betrachtung der Zahlen von der Form $x+yi$ verlassen und statt deren immer Ausdrücke von der Form $r(\cos u + i\sin u)$ behandeln.

Bei der Multiplikation findet man leicht

$$\begin{aligned} r(\cos u + i\sin u)\,.\,r'(\cos u' + i\sin u') \\ &= rr'[(\cos u\cos u' - \sin u\sin u') + (\cos u\sin u' + \sin u\cos u')i] \\ &= rr'[\cos(u+u') + i\sin(u+u')]. \end{aligned}$$

Durch mehrmalige Anwendung desselben Theoremes gelangt man leicht zu der allgemeineren Formel:

5) $$\begin{aligned} r_1(\cos u_1 + i\sin u_1)\,.\,r_2(\cos u_2 + i\sin u_2)\ldots r_m(\cos u_m + i\sin u_m) \\ = r_1 r_2 \ldots r_m[\cos(u_1+u_2+\ldots+u_m) + i\sin(u_1+u_2+\ldots+u_m)]. \end{aligned}$$

Ganz ähnlich verhält es sich mit der Division; wenn man nämlich Zähler und Nenner des Quotienten

$$\frac{r(\cos u + i \sin u)}{r'(\cos u' + i \sin u')}$$

mit $\frac{1}{r'}(\cos u' - i \sin u')$ multiplizirt, so geht der Nenner in die Einheit über und man erhält

$$\frac{r}{r'}[(\cos u \cos u' + \sin u \sin u') + (\sin u \cos u' - \cos u \sin u')\, i],$$

d. i. nach bekannten goniometrischen Formeln:

$$6)\qquad \frac{r(\cos u + i \sin u)}{r'(\cos u' + i \sin u')} = \frac{r}{r'}[\cos(u-u') + i \sin(u-u')].$$

So wie man bei ganzem positiven m unter z^m das Produkt versteht, welches aus dem Produkte $z_1 z_2 \ldots z_m$ für $z_1 = z_2 \ldots = z_m$ hervorgeht, so möge

$$[r(\cos u + i \sin u)]^m$$

dasjenige bezeichnen, was aus dem Produkte in Nro. 5) wird, sobald sämmtliche r und u gleich werden; man hat dann:

$$7)\qquad [r(\cos u + i \sin u)]^m = r^m (\cos mu + i \sin mu).$$

Diese Formel führt den Namen des Moivre'schen Theoremes; sie lässt sich auch auf den Fall eines beliebigen Exponenten m ausdehnen, was jedoch für unsere Zwecke nicht nöthig ist.

Eine brauchbare Anwendung der Formel 7) ist folgende. Man setze $r = 1$, wende auf die linke Seite das Binomialtheorem an und vergleiche die reellen und imaginären Theile; man findet dann

$$8)\qquad \cos mu = m_0 \cos^m u - m_2 \cos^{m-2} u \sin^2 u + m_4 \cos^{m-4} u \sin^4 u - \ldots\ldots$$

$$9)\qquad \sin mu = m_1 \cos^{m-1} u \sin u - m_3 \cos^{m-3} u \sin^3 u + m_5 \cos^{m-5} u \sin^5 u - \ldots\ldots$$

ein paar sehr brauchbare goniometrische Formeln.

§. 42.

Die binomischen Gleichungen.

I. Dem Moivre'schen Satze zufolge ist für ein ganzes positives k:

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i \sin\frac{2k\pi}{n}\right)^n = \cos 2k\pi \pm i \sin 2k\pi = +1,$$

und hierin liegt unmittelbar die Auflösung der Gleichung $x^n = 1$, denn man braucht nur

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

zu setzen und dem k irgend einen positiven ganzen Werth zu geben, um sogleich eine Wurzel der obigen Gleichung zu haben.

Für ein gerades n findet sich nun, indem man $k = 0, 1, 2, 3, \ldots \frac{1}{2}n$ setzt, dass die Wurzeln der Gleichung $x^n = +1$ folgende sind:

$$\begin{array}{ll}
+1, & -1, \\
\cos\frac{2}{n}\pi + i\sin\frac{2}{n}\pi, & \cos\frac{2}{n}\pi - i\sin\frac{2}{n}\pi, \\
\cos\frac{4}{n}\pi + i\sin\frac{4}{n}\pi, & \cos\frac{4}{n}\pi - i\sin\frac{4}{n}\pi, \\
\cos\frac{6}{n}\pi + i\sin\frac{6}{n}\pi, & \cos\frac{6}{n}\pi - i\sin\frac{6}{n}\pi, \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\cos\frac{n-2}{n}\pi + i\sin\frac{n-2}{n}\pi, & \cos\frac{n-2}{n}\pi - i\sin\frac{n-2}{n}\pi.
\end{array}$$

Wollte man dem k grössere Werthe ertheilen, so würde man keine neuen Wurzeln erhalten.

Für ein ungerades n ergiebt sich, indem man $n = 0, 1, 2, 3, \ldots \frac{1}{2}(n-1)$ setzt, dass die Gleichung $x^n = +1$ folgende Wurzeln besitzt:

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{+1} \\
\cos\frac{2}{n}\pi + i\sin\frac{2}{n}\pi, & \cos\frac{2}{n}\pi - i\sin\frac{2}{n}\pi, \\
\cos\frac{4}{n}\pi + i\sin\frac{4}{n}\pi, & \cos\frac{4}{n}\pi - i\sin\frac{4}{n}\pi, \\
\cos\frac{6}{n}\pi + i\sin\frac{6}{n}\pi, & \cos\frac{6}{n}\pi - i\sin\frac{6}{n}\pi, \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\cos\frac{n-1}{n}\pi + i\sin\frac{n-1}{n}\pi, & \cos\frac{n-1}{n}\pi - i\sin\frac{n-1}{n}\pi.
\end{array}$$

II. Zufolge des Moivre'schen Theoremes hat man auch

$$\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)^n = \cos(2k+1)\pi \pm i\sin(2k+1)\pi = -1$$

und darin liegt, indem man

$$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

setzt, die Auflösung der Gleichung $x^n = -1$. Hier sind wiederum die Fälle eines geraden und ungeraden n zu unterscheiden.

Für ein gerades n ergeben sich für $k = 0, 1, 2, \ldots \frac{1}{2}n - 1$ folgende Wurzeln unserer Gleichung:

$$\cos\frac{1}{n}\pi + i\sin\frac{1}{n}\pi, \qquad \cos\frac{1}{n}\pi - i\sin\frac{1}{n}\pi,$$
$$\cos\frac{3}{n}\pi + i\sin\frac{3}{n}\pi, \qquad \cos\frac{3}{n}\pi - i\sin\frac{3}{n}\pi,$$
$$\cos\frac{5}{n}\pi + i\sin\frac{5}{n}\pi, \qquad \cos\frac{5}{n}\pi - i\sin\frac{5}{n}\pi,$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$
$$\cos\frac{n-1}{n}\pi + i\sin\frac{n-1}{n}\pi, \qquad \cos\frac{n-1}{n}\pi - i\sin\frac{n-1}{n}\pi,$$

welche sämmtlich imaginär sind, wie sich erwarten liess, da jede gerade Potenz einer reellen Zahl positiv sein muss.

Bei ungeradem n setze man $k = 0, 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1)$ und man bekommt folgende Wurzeln unserer Gleichung:

$$-1,$$
$$\cos\frac{1}{n}\pi + i\sin\frac{1}{n}\pi, \qquad \cos\frac{1}{n}\pi - i\sin\frac{1}{n}\pi,$$
$$\cos\frac{3}{n}\pi + i\sin\frac{3}{n}\pi, \qquad \cos\frac{3}{n}\pi - i\sin\frac{3}{n}\pi,$$
$$\cos\frac{5}{n}\pi + i\sin\frac{5}{n}\pi, \qquad \cos\frac{5}{n}\pi - i\sin\frac{5}{n}\pi,$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$
$$\cos\frac{n-2}{n}\pi + i\sin\frac{n-2}{n}\pi, \qquad \cos\frac{n-2}{n}\pi - i\sin\frac{n-2}{n}\pi.$$

In allen Fällen, wo sich die Theilung der Kreisperipherie in $2n$ Theile ausführen lässt, kann man die Werthe der einzelnen Cosinus und Sinus näher angeben; so sind z. B. die Wurzeln der Gleichung $x^3 = -1$:

$$-1, \quad \tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \tfrac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

ebenso findet man, dass die Ausdrücke

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$

die Wurzeln der Gleichung $x^4 = -1$ darstellen.

§. 43.

Die Exponenzialgrössen mit complexen Variabelen.

Unter der Zahl e wurde der Grenzwerth des Ausdruckes $\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}$ für unendlich wachsende ω verstanden; demgemäss ist

$$e^z = Lim\left[\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega z}\right],$$

oder, wenn ωz mit m bezeichnet wird, woraus $\frac{1}{\omega}=\frac{z}{m}$ folgt:

1) $$e^z = Lim\left[\left(1+\frac{z}{m}\right)^{m}\right],$$

und hier bezieht sich das Zeichen *Lim* auf das unendliche Wachsthum von m. Behalten wir die vorstehende Gleichung als Definition von e^z für alle Fälle bei, so ist auch:

2) $$e^{x+yi} = Lim\left[\left(1+\frac{x+yi}{m}\right)^{m}\right].$$

Der angedeutete Grenzwerth lässt sich näher angeben; setzen wir nämlich

$$1+\frac{x+yi}{m} = 1+\frac{x}{m}+\frac{y}{m}\,i = \varrho\,(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

so folgt:

3) $$\varrho = \left[1+\frac{2x}{m}+\frac{x^2+y^2}{m^2}\right]^{\frac{1}{2}};$$

4) $$\tan\vartheta = \frac{\frac{y}{m}}{1+\frac{x}{m}},$$

und die Gleichung 2) geht unter Anwendung des Moivre'schen Theoremes in die folgende über:

5) $$e^{x+yi} = Lim\left[\varrho^m(\cos m\vartheta + i\sin m\vartheta)\right].$$

Darin ist für ϱ^m zu setzen:

$$\left(1+\frac{2x}{m}+\frac{x^2+y^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}m},$$

wobei man beachten mag, dass der Ausdruck $\frac{2x}{m}+\frac{x^2+y^2}{m^2}$ die

Null zur Grenze hat. Bezeichnen wir denselben mit $\frac{1}{\mu}$, so ist μ eine unendlich wachsende Zahl und man kann jetzt

$$\varrho^m = \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}m} = \left[\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right]^{\frac{1}{2}m\,\frac{1}{\mu}}$$
$$= \left[\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right]^{x + \frac{x^2+y^2}{2m}}$$

setzen, woraus hervorgeht, dass ϱ^m für unendlich wachsende m und μ gegen die Grenze e^x convergirt. — Was ferner $m\vartheta$ anbelangt, so ist offenbar

$$m\vartheta = \frac{\vartheta}{tan\,\vartheta}\, m\, tan\,\vartheta = \frac{\vartheta}{tan\,\vartheta} \cdot \frac{y}{1 + \frac{x}{m}};$$

bei unendlich wachsenden m hat ϑ die Null und $\frac{\vartheta}{tan\,\vartheta}$ die Einheit zur Grenze, mithin geht $m\vartheta$ in y über; statt der Gleichung 5) kommt nunmehr die folgende

6) $$e^{x+yi} = e^x\,(cos\,y + i\,sin\,y),$$

und sie enthält die Definition der Exponenzialgrösse mit complexer Variabelen.

Für $x = 0$ verwandelt sich die Gleichung 6) in die einfachere

7) $$e^{yi} = cos\,y + i\,sin\,y,$$

welche man leicht mittelst der Reihen für e^z, $cos\,z$ und $sin\,z$ prüfen kann.

Setzt man in Nro. 6) $x = k\xi$ und $y = k\eta$, so ist

$$e^{k(\xi+\eta i)} = e^{k\xi}\,(cos\,k\eta + i\,sin\,k\eta)$$
$$= [e^{\xi}\,(cos\,\eta + i\,sin\,\eta)]^k,$$

und man erkennt daraus, dass die bekannte Eigenschaft $(e^z)^k = e^{kz}$ auch für complexe z gilt. Nimmt man $k = la$, so folgt einerseits

$$e^{la\,.\,(\xi+\eta i)} = (e^{la})^{\xi+\eta i} = a^{\xi+\eta i},$$

andererseits

$$e^{la\,.\,(\xi+\eta i)} = e^{la\,.\,\xi}\,(cos(la.\eta) + i\,sin(la.\eta))$$
$$= a^{\xi}\,[cos\,(\eta\,la) + i\,sin\,(\eta\,la)],$$

und wenn man dies mit dem Ersten vergleicht, so hat man als Definition der Exponenzialgrösse mit beliebiger Basis:

8) $$a^{\xi+\eta i} = a^{\xi}\,[cos\,(\eta\,la) + i\,sin\,(\eta\,la)].$$

Eine brauchbare Anwendung dieser Theoreme ist folgende. Die Gleichung 7) giebt, wenn man einmal $y = u$, das andere Mal $\eta = - u$ setzt:

$$e^{ui} = \cos u + i \sin u, \qquad e^{-ui} = \cos u - i \sin u,$$

mithin durch Addition und Subtraktion

$$2 \cos u = (e^{ui} + e^{-ui})$$
$$2 i \sin u = (e^{ui} - e^{-ui}).$$

Durch beiderseitige Erhebung auf die $m$te Potenz unter Anwendung des binomischen Satzes folgt hieraus:

$$9) \quad 2^m \cos^m u = m_0 e^{mui} + m_1 e^{(m-2)ui} + m_2 e^{(m-4)ui} + \ldots.$$

$$10) \quad 2^m i^m \sin^m u = m_0 e^{mui} - m_1 e^{(m-2)ui} + m_2 e^{(m-4)ui} - \ldots.$$

Hier kann man jede Exponenzialgrösse wieder in Cosinus und Sinus umsetzen, und nachher die reellen, sowie die imaginären Theile beiderseits vergleichen. Aus Nro. 9) erhält man auf diese Weise:

$$2^m \cos^m u = m_0 \cos mu + m_1 \cos (m-2) u + m_2 \cos (m-4) u + \ldots.$$

Dabei lassen sich die Fälle eines geraden und eines ungeraden m unterscheiden. Für $m = 2n$ giebt es einen mittelsten Binomialcoeffizienten $(2n)_n$ und jeder andere Coeffizient kommt zweimal vor, weil immer $m_k = m_{m-k}$ ist; vereinigt man daher die Glieder mit gleichen Coeffizienten und dividirt nachher durch 2, so findet sich

$$11) \quad 2^{2n-1} \cos^{2n} u$$
$$= (2n)_0 \cos 2nu + (2n)_1 \cos (2n-2) u + (2n)_2 \cos (2n-4) u + \ldots.$$
$$\ldots + (2n)_{n-1} \cos 2u + \tfrac{1}{2} (2n)_n.$$

Für ein ungerades m dagegen erhält man:

$$12) \quad 2^{2n} \cos^{2n+1} u$$
$$= (2n+1)_0 \cos (2n+1) u + (2n+1)_1 \cos (2n-1) u$$
$$+ (2n+1)_2 \cos (2n-3) u + \ldots$$
$$\ldots + (2n+1)_{n-1} \cos 3u + (2n+1)_n \cos u.$$

In ähnlicher Weise kann man in Nro. 10) die Fälle eines geraden und ungeraden m unterscheiden und gelangt dadurch zu folgenden zwei Formeln:

$$13) \quad (-1)^n 2^{2n-1} \sin^{2n} u$$
$$= (2n)_0 \cos 2nu - (2n)_1 \cos (2n-2) u + (2n)_2 \cos (2n-4) u - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} (2n)_{n-1} \cos 2u + (-1)^n \tfrac{1}{2} (2n)_n;$$

14) $$(-1)^n\, 2^{2n}\, sin^{2n+1}\, u$$
$$= (2n+1)_0\, sin\,(2n+1)\,u - (2n+1)_1\, sin\,(2n-1)\,u$$
$$+ (2n+1)_2\, sin\,(2n-3)\,u - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1}\,(2n+1)_{n-1}\, sin\,3u + (-1)^n\,(2n+1)_n\, sin\,u.$$

Die hier entwickelten Gleichungen bilden gewissermassen die Umkehrungen der unter Nro. 8) und 9) in §. 41. gewonnenen Beziehungen.

§. 44.

Complexe Logarithmen.

Behalten wir die Definition der Logarithmen, derzufolge $\zeta = l\,z$ ist, wenn $e^{\zeta} = z$ war, unverändert bei, so zieht die Gleichung

$$e^{x+yi} = e^x\,(cos\,y + i\,sin\,y)$$

die folgende nach sich:

$$x + y\,i = l\,[e^x\,(cos\,y + i\,sin\,y)].$$

Hier kann man $e^x = r$, also $x = l\,r$ setzen und y durch u ersetzen; es ist dann bei umgekehrter Anordnung:

1) $$l\,[r\,(cos\,u + i\,sin\,u)] = l\,r + u\,i.$$

Da sich jede Zahl auf die Form $r\,(cos\,u + i\,sin\,u)$ bringen lässt, so kann man mittelst dieser Formel auch den Logarithmus jeder reellen oder complexen Zahl finden. So ergiebt sich z. B. für $r = +1$ und $u = \pm\,2\,k\pi$, wo k eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet:

2) $$l\,(+1) = \pm\,2\,k\,\pi\,i,$$

und für $r = 1$, $u = \pm\,(2\,k+1)\,\pi$:

3) $$l\,(-1) = \pm\,(2\,k+1)\,\pi\,i.$$

Zu bemerken ist noch, dass auch für complexe Logarithmen die Formel $log\,z + log\,z' = log\,(z\,z')$ richtig bleiben muss; denn es ist diese Eigenschaft der Logarithmen eine Folge der Gleichung $a^z . a^{z'} = a^{z+z'}$; letztere bleibt, wie man leicht finden wird, bei complexen z ungestört und also muss es auch die Folgerung von ihr bleiben.

Verbindet man nach dieser Bemerkung die Gleichung 2) mit der folgenden

$$l\,[r\,(cos\,u - i\,sin\,u)] = l\,r - u\,i$$

durch Subtraktion, so erhält man

$$l\left(\frac{\cos u + i \sin u}{\cos u - i \sin u}\right) = 2ui,$$

oder

$$4)\qquad \frac{1}{2i}\, l\left(\frac{1 + i \tan u}{1 - i \tan u}\right) = u.$$

Dies kann man auch durch die für $l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ und $Arctan\, x$ gefundenen Reihen verifiziren, jedoch nur unter der besonderen Voraussetzung, dass $\tan u$ ein echter Bruch ist.

§. 45.

Goniometrische und cyklometrische Funktionen mit complexen Variabelen.

I. Die in §. 43. entwickelten Gleichungen

$$1)\qquad \cos u = \frac{e^{ui} + e^{-ui}}{2}, \quad \sin u = \frac{e^{ui} - e^{-ui}}{2i}$$

können wir als die allgemeinen Definitionen von $\cos u$ und $\sin u$ ansehen, weil sie in der That zu denselben Reihen führen, wie das Theorem von Mac Laurin bei seiner unmittelbaren Anwendung auf $\cos u$ und $\sin u$. Behalten wir diese Definitionen auch für den Fall eines complexen u bei, so ist z. B.:

$$2)\qquad \cos(vi) = \frac{e^{-v} + e^{+v}}{2} = \frac{e^{v} + e^{-v}}{2},$$

$$3)\qquad \sin(vi) = \frac{e^{-v} - e^{+v}}{2i} = \frac{e^{v} - e^{-v}}{2}\, i,$$

und überhaupt allgemein:

$$\cos(x + yi) = \frac{e^{(x+yi)i} + e^{-(x+yi)i}}{2} = \frac{e^{xi-y} + e^{-xi+y}}{2},$$

$$\sin(x + yi) = \frac{e^{(x+yi)i} - e^{-(x+yi)i}}{2i} = \frac{e^{xi-y} - e^{-xi+y}}{2}.$$

Mittelst einer kleinen Reduktion und unter Rücksicht auf die Gleichungen 1) kann man diesen Formeln die folgenden Gestalten verleihen:

4) $$\sin(x+yi) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i\, \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x,$$

5) $$\cos(x+yi) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - i\, \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x.$$

Behält man für die übrigen goniometrischen Funktionen die gewöhnlichen Definitionen bei (z. B. $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ u. s. w.), so lassen sich nunmehr alle goniometrischen Funktionen des complexen Bogens $x+yi$ auf die Form $U+Vi$ bringen.

II. Für die cyklometrischen Funktionen benutzen wir ebenfalls die gewöhnlichen Definitionen ungeändert; so verstehen wir z. B. unter $Arcsin(yi)$ den mit y gleichzeitig verschwindenden reellen oder complexen Bogen, dessen Sinus $= yi$ ist. Setzen wir

6) $$Arcsin\,(yi) = U + Vi,$$

so folgt nach dieser Erklärung:

$$\begin{aligned} yi &= \sin\,(U+Vi) \\ &= \frac{e^V + e^{-V}}{2} \sin U + i\, \frac{e^V - e^{-V}}{2} \cos U. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nur dadurch erfüllt werden, dass $\sin U = 0$, mithin $\cos U = 1$ und zugleich

$$\frac{e^V - e^{-V}}{2} = y$$

ist; aus diesen Bedingungen ergiebt sich erstens, dass $U = \pm k\pi$ sein muss, wo k eine positive ganze Zahl bezeichnet, und dass zweitens

$$e^V = y \pm \sqrt{1+y^2}, \quad V = l\,(y \pm \sqrt{1+y^2})$$

ist. Durch Substitution in Nro. 6) hat man nun weiter

$$Arcsin\,(yi) = \pm 2k\pi + il\,(y \pm \sqrt{1+y^2});$$

wenn aber $Arcsin\,(yi)$ mit y gleichzeitig verschwinden soll, so muss $k = 0$ sein und es darf nur das positive Zeichen der Wurzel gebraucht werden; demnach ist:

7) $$Arcsin\,(yi) = i\,l\,(y + \sqrt{1+y^2}).$$

Eine ganz ähnliche Behandlung gestatten die allgemeineren Ausdrücke $Arcsin\,(x+yi)$, $Arctan\,(x+yi)$ etc., nur fallen die Werthe von U und V etwas verwickelter aus.

§. 46.

Reihen mit imaginären Variabelen

Einer der grossen Vortheile, den die Benutzung complexer Zahlen bietet, liegt darin, dass man aus jeder Reihenentwickelung eine neue ableiten kann, indem man die Variabele imaginär werden lässt. Gehen wir z. B. von den beiden Formeln aus:

1) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2..4} - \frac{x^6}{1.2..6} + \dots$$

2) $$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2..5} - \frac{x^7}{1.2..7} + \dots,$$

so bemerken wir zunächst, dass dieselben nicht nur für reelle, sondern auch für imaginäre x gelten; denn man erhält für $x = vi$:

$$\cos(vi) = 1 + \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2..4} + \frac{v^6}{1.2...6} + \dots$$

$$\sin(vi) = \left[\frac{v}{1} + \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2...5} + \dots\dots\right] i,$$

und wenn man sich an die für e^v und e^{-v} geltenden Reihenentwickelungen erinnert, so wird man bald finden, dass die erste Reihe $\frac{1}{2}(e^v + e^{-v})$ und die zweite $\frac{1}{2}(e^v - e^{-v})$ zur Summe hat; hiermit gelangt man zu den in §. 45. unter 2) und 3) verzeichneten Formeln. Wenn nun aber die Formeln 1) und 2) für reelle und imaginäre x gleichförmig gelten, so müssen auch die aus ihnen abgeleiteten Gleichungen dieselbe Eigenschaft besitzen. Die Sekantenreihe z. B. ist nichts Anderes als das Resultat einer Division mit der Cosinusreihe in die Einheit, welche Division für imaginäre Zahlen auf dieselbe Weise, wie bei reellen Zahlen geschieht; es muss daher auch die Formel

3) $$\sec x = \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{T_2}{1.2} x^2 + \frac{T_4}{1.2..4} x^4 + \dots.$$

für $x = vi$ gültig bleiben; man erhält so auf sehr kurzem Wege das Resultat:

4) $$\frac{2}{e^v + e^{-v}} = 1 - \frac{T_2 v^2}{1.2} + \frac{T_4 v^4}{1.2.3.4} - \frac{T_6 v^6}{1.2...6} + \dots$$

Dasselbe bleibt offenbar so lange richtig, als die Reihe eine bestimmte Summe besitzt, d. h. convergirt; da nun die Reihe nur in den

Vorzeichen von der Reihe 3) differirt und diese für $\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi$ gilt, so kann die Richtigkeit der Formel 4) ebenfalls nur unter der Bedingung

5) $$\frac{\pi}{2} > v > -\frac{\pi}{2}$$

verbürgt werden.

Dieselbe Substitution $x = vi$ giebt, auf die Tangentenreihe angewendet:

6) $$\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = \frac{T_1 v}{1} - \frac{T_3 v^3}{1.2.3} + \frac{T_5 v^5}{1.2..5} - \dots$$
$$\frac{\pi}{2} > v > -\frac{\pi}{2};$$

statt der linken Seite liesse sich auch

$$\frac{e^{2v} - 1}{e^{2v} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2v} + 1}$$

schreiben; setzt man nachher $2v = u$ und dividirt beiderseits mit 2, so findet sich leicht:

7) $$\frac{1}{e^u + 1} = \frac{1}{2} - \frac{T_1 u}{1.2^2} + \frac{T_3 u^3}{1.2.3.2^4} - \frac{T_5 u^5}{1.2..5.2^6} + \dots$$
$$\pi > u > -\pi.$$

Aus der Cosekantenreihe folgt nach derselben Methode:

8) $$\frac{2}{e^v - e^{-v}} = \frac{1}{v} - \frac{U_1 v}{1.2} + \frac{U_3 v^3}{1.2.3.4} - \dots.$$
$$\pi > v > -\pi,$$

endlich aus der Cotangentenreihe:

9) $$\frac{e^v + e^{-v}}{e^v - e^{-v}} = \frac{1}{v} + \frac{V_1 v}{1.2} - \frac{V_3 v^3}{1.2.3.4} + \dots.$$
$$\pi > v > -\pi.$$

Die linke Seite lässt sich hier in folgender Form darstellen:

$$\frac{e^{2v} + 1}{e^{2v} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{2v} - 1},$$

und wenn man darin $2v = u$ setzt, so wird:

10) $$\frac{1}{e^u - 1} = \frac{1}{u} - \frac{1}{2} + \frac{V_1 u}{1.2.2^2} - \frac{V_3 u^3}{1.2.3.4.2^4} + \dots.$$
$$2\pi > u > -2\pi.$$

Die Coeffizienten $\frac{1}{4} V_1$, $\frac{1}{16} V_3$ etc. führen den Namen der Bernoulli'schen Zahlen, indem man bezeichnet:

$$11)\qquad \frac{V_{2n-1}}{2^{2n}} = \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)}\, T_{2n-1} = B_{2n-1}.$$

Die Formel 10) nimmt dann, x für u geschrieben, die folgende Form an:

$$12)\qquad \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1\, x^2}{1\,.\,2} - \frac{B_3\, x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots.$$

$$2\pi > x > -2\pi.$$

Ganz ähnliche Ableitungen neuer Formeln aus früheren gestatten unter Anderm die Resultate des §. 34. III., indem man die dort vorkommende willkürliche Grösse μ imaginär werden und zugleich an die Stellen von $\sin \mu z$ und $\cos \mu z$ ihre neuen Bedeutungen treten lässt.

Anhang.

Die höheren Differenzialquotienten zusammengesetzter Funktionen.

I. Allgemeine Formeln.

Die Lehren des §. 12. enhalten insofern eine Lücke, als nicht nachgewiesen wurde, auf welche Weise die höheren Differenzialquotienten einer zusammengesetzten Funktion von der Form $z = f(y)$, wo $y = \varphi(x)$ ist, entwickelt werden können, vorausgesetzt, dass die Differenzialquotienten von $f(y)$ in Beziehung auf y und die von $\varphi(x)$ in Beziehung auf x genommen, bekannt sind. Wir tragen nun das in neuerer Zeit über dieses wichtige aber nicht leichte Problem Geleistete nach, und zwar erst an dieser Stelle, weil einerseits die gegebenen Entwickelungen für die gewöhnlichen Fälle ausreichen, andererseits weil die folgenden Untersuchungen erst dann fruchtbar werden, wenn man die Theorie der complexen Beziehungen damit verknüpft.

Wir gehen von der Gleichung

$$\frac{df(y)}{dx} = f'(y)\frac{dy}{dx}$$

aus, in welcher $f'(y)$ den Differenzialquotienten bedeutet, der dadurch entsteht, dass man $f(y)$ so differenzirt, als wenn y unabhängige Variabele wäre. Wendet man dieselbe Regel mehrmals nach einander an und berücksichtigt dabei die Formel zur Differenziation der Produkte, so gelangt man ohne Mühe zu folgenden Gleichungen

$$\frac{d^2f(y)}{dx^2} = f'(y)\frac{d^2y}{dx^2} + f''(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\frac{d^3f(y)}{dx^3} = f'(y)\frac{d^3y}{dx^3} + 3f''(y)\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + f'''(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

u. s. w.

Aus ihnen geht hervor, dass man überhaupt setzen darf

$$\frac{d^n f(y)}{dx^n} = f'(y)\, Y_1 + f''(y)\, Y_2 + \dots + f^{(n)}(y)\, Y_n$$

wo Y_1, Y_2, .. Y_n gewisse, noch nicht näher bekannte variabele Coeffizienten bezeichnen, die von der Natur der Funktion f unabhängig sind. Nehmen wir überhaupt

$$Y_k = \frac{P_k}{1\,.\,2\,.\,3 \dots k},$$

wo nun P_k eben so unbekannt wie Y_k ist, so stellt sich die obige Gleichung in die für das Folgende bequemere Form

$$1)\quad \frac{d^n f(y)}{dx^n} = \frac{P_1}{1} f'(y) + \frac{P_2}{1\,.\,2} f''(y) + \dots + \frac{P_n}{1\,.\,2 \dots n} f^{(n)}(y).$$

Da Y_k mithin auch P_k nicht von der Natur der Funktion f abhängt, so kann man für $f(y)$ irgend eine speziellere Funktion wählen, wenn man auf eine Bestimmung jener Unbekannten ausgeht. Nehmen wir $f(y) = y^\mu$, so wird aus Nro. 1) unter Benutzung der bekannten Symbole für die Binomialcoeffizienten

$$\frac{d^n (y^\mu)}{dx^n} = \mu_1 P_1 y^{\mu-1} + \mu_2 P_2 y^{\mu-2} + \dots + \mu_n P_n y^{\mu-n}$$

oder durch Division mit y^μ;

$$2)\quad \frac{1}{y^\mu} \frac{d^n (y^\mu)}{dx^n} = \frac{\mu_1 P_1}{y} + \frac{\mu_2 P_2}{y^2} + \dots + \frac{\mu_n P_n}{y^n}.$$

Setzen wir voraus, dass sich die linker Hand angedeutete Differenziation ausführen lasse, was in vielen Fällen (wie z. B. $y = e^x$) sehr leicht ist, so haben wir linker Hand eine bekannte Grösse, die wir mit A_μ bezeichnen wollen; rechter Hand können wir $\frac{P_1}{y}$, $\frac{P_2}{y^2}$ etc. als neue Unbekannte ansehen und dafür die Buchstaben Q_1, Q_2 etc. brauchen; für

$$3)\quad \frac{1}{y^\mu} \frac{d^n (y^\mu)}{dx^n} = A_\mu, \quad \frac{P_k}{y^k} = Q_k$$

ist demnach

$$A_\mu = \mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_2 + \dots + \mu_n Q_n.$$

Um die mit Q bezeichneten n Unbekannten zu finden, setzen wir für μ der Reihe nach 1, 2, 3, ... n und haben so die n Gleichungen

$$A_1 = 1_1\ Q_1$$
$$A_2 = 2_1\ Q_1 + 2_2\ Q_2$$
$$A_3 = 3_1\ Q_1 + 3_2\ Q_2 + 3_3\ Q_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n = n_1\ Q_1 + n_2\ Q_2 + n_3\ Q_3 + \cdot\cdot + n_n\ Q_n.$$

Aus diesen könnte man der Reihe nach Q_1, Q_2, ... entwickeln, indem man den Werth jeder Unbekannten in alle folgenden Gleichungen einsetzte; kürzer ist folgendes Verfahren. Man denke sich die ersten k Gleichungen von den obigen n hingeschrieben, wobei $k \leqq n$ ist, multiplizire sie der Reihe nach mit k_1, $-k_2$, $+k_3$ etc. und vereinige darauf Alles, so wird

4)
$$\begin{aligned} & k_1 A_1 - k_2 A_2 + k_3 A_3 - \ldots + (-1)^{k+1} k_k A_k \\ = & (1_1 k_1 - 2_1 k_2 + 3_1 k_3 - \ldots .)\ Q_1 \\ - & (2_2 k_2 - 3_2 k_3 + 4_2 k_4 - \ldots .)\ Q_2 \\ + & (3_3 k_3 - 4_3 k_4 + 5_3 k_5 - \ldots .)\ Q_3 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + & (-1)^k ((k-1)_{k-1} k_{k-1} - k_{k-1} k_k)\ Q_{k-1} \\ + & (-1)^{k+1} k_k\, k_k\, Q_k. \end{aligned}$$

Die allgemeine Form der in Parenthesen stehenden Reihen ist

$$\begin{aligned} & h_h k_h - (h+1)_h\, k_{h+1} + (h+2)_h\, k_{h+2} - \ldots\ldots \\ = & h_0\, k_h - (h+1)_1\, k_{h+1} + (h+2)_2\, k_{h+2} - \ldots\ldots \end{aligned}$$

oder wenn man k_{h+1}, k_{h+2}, k_{h+3} ... durch k_h ausdrückt und statt h_0, $(h+1)_1$, $(h+1)_2$ etc. ihre Werthe setzt

$$k_h \left[1 - \frac{k-h}{1} + \frac{(k-h)\ (k-h-1)}{1\ .\ 2} - \frac{(k-h)\ (k-h-1)\ (k-h-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3} + \ldots . \right].$$

Für $k > h$ ist dies so viel wie

$$k_h\ (1-1)^{k-h} = 0.$$

In der Gleichung 4) verschwinden demnach alle Reihen, für welche $h < k$ ist, d. h. die Coeffizienten von Q_1, Q_2, ... Q_{k-1} und demnach bleibt rechter Hand nur $(-1)^{k+1} Q_k$ übrig; man findet hieraus sogleich

$$Q_k = (-1)^{k+1}\ [k_1\ A_1 - k_2\ A_2 + k_3\ A_3 - \ldots]$$

oder vermöge der Werthe von Q und A aus Nro. 3):

$$5)\quad P_k = (-1)^{k+1}\left[k_1\, y^{k-1}\frac{d^n(y^1)}{dx^n} - k_2 y^{k-2}\frac{d^n(y^2)}{dx^n} + k_3 y^{k-3}\frac{d^n(y^3)}{dx^n} - \ldots\right].$$

Kann man also überhaupt den Differenzialquotienten

$$\frac{d^n(y^\mu)}{dx^n}$$

für ein ganzes positives μ entwickeln, so ist jetzt P_k vollständig bestimmt und nach Formel 1) lässt sich nunmehr auch der $n$te Differenzialquotient von $f(y)$ ableiten. Spezielle Anwendungen hiervon geben die nächsten Abschnitte.

II. Entwickelung von $\frac{d^n f(x^\lambda)}{dx^n}$.

Nehmen wir in dem allgemeinen durch die Gleichungen 1) und 6) ausgedrückten Theoreme $y = x^\lambda$, so ist

$$\frac{d^n(y^\mu)}{dx^n} = \frac{d^n(x^{\mu\lambda})}{dx^n} = \mu\lambda(\mu\lambda-1)(\mu\lambda-2)\ldots(\mu\lambda-n+1)\,x^{\mu\lambda-n}$$
$$= 1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n\,.\,(\mu\lambda)_n\; x^{\mu\lambda-n}$$

und folglich wird

$$P_k = (-1)^{k+1}\,1.2\ldots n\,[k_1\lambda_n - k_2(2\lambda)_n + k_3(3\lambda)_n - \ldots]\,x^{k\lambda-n}.$$

Bezeichnen wir den von x unabhängigen Theil dieses Ausdruckes mit E_k, setzen also

$$6)\quad E_k = (-1)^{k+1}\,1.2\ldots n\,[k_1\lambda_n - k_2(2\lambda)_n + k_3(3\lambda)_n - \ldots],$$

so haben wir die sehr elegante Formel:

$$7)\quad \frac{d^n f(x^\lambda)}{dx^n} = \frac{1}{x^n}\left[\frac{1}{1}E_1 x^\lambda f'(x^\lambda) + \frac{1}{1.2}E_2 x^{2\lambda} f''(x^\lambda) + \ldots\ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}E_n x^{n\lambda} f^{(n)}(x^\lambda)\right].$$

Auf die speziellen Fälle $f(y) = (a+y)^\mu$ und $f(y) = l(a+y)$ angewendet, liefert sie z. B. die Differenzialformeln

$$8)\quad \frac{d^n(a+x^\lambda)^\mu}{dx^n} =$$
$$\frac{(a+x^\lambda)^\mu}{x^n}\left[\mu_1 E_1\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right) + \mu_2 E_2\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^2 + \ldots + \mu_n E_n\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^n\right].$$

$$9) \qquad \frac{d^n l(a+x^\lambda)}{dx^n} =$$

$$\frac{1}{x^n}\left[\frac{1}{1}E_1\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)+\frac{1}{2}E_2\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n}E_n\left(\frac{x^\lambda}{a+x^\lambda}\right)^n\right].$$

So lange der völlig willkürliche Exponent λ nicht besondere Werthe erhält, besteht der für E_k gegebene Ausdruck immer aus k Gliedern und lässt sich nicht kürzer zusammenziehen. Es giebt jedoch drei Spezialwerthe von λ, bei welchen eine Reduktion jenes Ausdruckes durch Summirung der Reihe $k_1\,\lambda_n - k_2\,(2\lambda)_n +$ etc. eintreten kann. Das hierzu nöthige Verfahren beruht indessen auf fern liegenden Eigenschaften der Binominalcoeffizienten und ist überdies so umständlich, dass wir uns mit einer Angabe der gefundenen Resultate und mit einem Fingerzeige zur Prüfung ihrer Richtigkeit begnügen müssen.

A. Für $\lambda = -1$ lässt sich der in 6) verzeichnete Coeffizient auf folgenden Ausdruck bringen:

$$\frac{1}{1.2.3..k}E_k = (-1)^n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(k+1)\,k\,.\,n_{n-k}$$

und die Formel 7) nimmt jetzt bei umgekehrter Anordnung ihrer Glieder die folgende Gestalt an:

$$10) \qquad (-1)^n\,\frac{d^n f\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^n} =$$

$$\frac{1}{x^{2n}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(n-1).n_1}{x^{2n-1}}f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(n-1)(n-2).n_2}{x^{2n-2}}f^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(n-1)\,(n-2)\ldots 3\,.\,2\,.\,1\,n_{n-1}}{x^{n+1}}f'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Sieht man dieselbe als ein vorgelegtes Theorem an, so kann man sich leicht dadurch von ihrer Richtigkeit überzeugen, dass man beiderseits noch einmal differenzirt; man erhält dann nach Vereinigung aller gleichartigen Glieder ein Resultat, welches sich von dem obigen dadurch unterscheidet, dass $n+1$ an der Stelle von n steht.

B. Für $\lambda = 2$ lässt sich die Formel 7) bei umgekehrter Anordnung folgendermassen darstellen:

$$11) \quad \frac{d^n f(x^2)}{dx^n} = (2x)^n f^{(n)}(x^2)+\frac{n\,(n-1)}{1}(2x)^{n-2}f^{(n-1)}(x^2)$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}(2x)^{n-4}f^{(n-2)}(x^2)$$

$$+\frac{n\,(n-1)\ldots(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}(2x)^{n-6}f^{(n-3)}(x^2)+\ldots$$

und eine ganz ähnliche Probe wie vorhin zeigt auch hier die Richtigkeit des Resultates.

Nimmt man beispielweise $n = m - 1$ und $f(y) = (1-y)^{m-\frac{1}{2}}$, so ergiebt sich eine sehr bemerkenswerthe Formel, nämlich:

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}}$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}\,1.3.5..(2m-1)}{m}\Big[m_1 x^{m-1}\sqrt{1-x^2} - m_3 x^{m-3}\sqrt{1-x^2}^{\,3}$$

$$+ m_5 x^{m-5}\sqrt{1-x^2}^{\,5} - \ldots\Big].$$

Für $x = \cos u$ verwandelt sich die eingeklammerte Reihe in die unter Nro. 9) §. 41. summirte Reihe; es lässt sich daher statt der vorigen Reihe die Summe $\sin mu = \sin(m \operatorname{Arccos} x)$ substituiren und dies giebt

$$12)\quad \frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}} = \frac{(-1)^{m-1}\,1.3.5\ldots(2m-1)}{m}\sin(m \operatorname{Arccos} x).$$

C. Für $\lambda = \frac{1}{2}$ geht die Gleichung 7) in die folgende über:

$$13)\quad 2^n \frac{d^n f(\sqrt{x})}{dx^n} = \frac{f^{(n)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^n} - \frac{n(n-1)}{2}\frac{f^{(n-1)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{n+1}}$$

$$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\,.\,4}\frac{f^{(n-2)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{n+2}}$$

$$- \frac{(n+2)\ldots\ldots(n-3)}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{f^{(n-3)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{n+3}} + \ldots$$

die sich auf dieselbe Weise wie Nro. 10) und Nro. 11) prüfen lässt. Für $f(y) = (1 + \alpha y)^{2n-1}$ findet man z. B.

$$14)\quad \frac{d^n(1+\alpha\sqrt{x})^{2n-1}}{dx^n} = \frac{1.3.5..(2n-1)}{2^n}\frac{\alpha}{\sqrt{x}}\left(\alpha^2 - \frac{1}{x}\right)^{n-1}.$$

Die hier mitgetheilten Sätze sind von der mannichfaltigsten Anwendung, theils beim Gebrauche der Theoreme von Taylor und Mac Laurin, theils in der Integralrechnung; sie sind zugleich die Mittel, um zahlreiche algebraische Sätze zu entdecken. Sobald es nämlich glückt, eine und dieselbe Funktion auf zwei verschiedene Weisen zu differenziren $\Big[$z. B. $\frac{1}{1-x^2}$ nach Formel 3) in §. 12. und nach Formel 11) für $f(y) = \frac{1}{1-y}\Big]$, so giebt die Gleichstellung der auf verschiedenen Wegen gefundenen Differenzialquotienten augenblicklich ein algebraisches Theorem, welches meistentheils mit dem binomischen Satze einige Aehnlichkeit besitzt.

III. Entwickelung von $\frac{d^n f(e^x)}{dx^n}$.

Die in Nro. I. verzeichneten Formeln gehen für $y = e^x$ in die folgenden über:

$$\frac{d^n f(e^x)}{dx^n} = \frac{P_1}{1} f'(e^x) + \frac{P_2}{1 \cdot 2} f''(e^x) + \ldots + \frac{P_n}{1.2..n} f^{(n)}(e^x)$$

$$P_k = (-1)^{k+1} e^{kx} [k_1 1^n - k_2 2^n + k_3 3^n - \ldots .].$$

Bezeichnen wir den von x unabhängigen Theil des Coeffizienten P_k mit K_k, so dürfen wir die vorstehenden Formeln durch die folgenden ersetzen:

15) $$\frac{d^n f(e^x)}{dx^n} = \frac{1}{1} K_1 e^x f'(e^x) + \frac{1}{1 \cdot 2} K_2 e^{2x} f''(e^x) + \ldots + \frac{1}{1.2..n} K_n e^{nx} f^{(n)}(e^x)$$

16) $$K_k = (-1)^{k+1} [1^n k_1 - 2^n k_2 + 3^n k_3 - \ldots].$$

Auf den Spezialfall $f(y) = (a+y)^\mu$ angewendet, giebt die Gleichung 16):

17) $$\frac{d^n (a+e^x)^\mu}{dx^n} = (a+e^x)^\mu \left[\mu_1 K_1 \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) + \mu_2 K_2 \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \ldots \ldots + \mu_n K_n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\right]$$

und noch spezieller für $\mu = -1$:

18) $$\frac{d^n \left(\frac{1}{a+e^x}\right)}{dx^n} = -\frac{1}{a+e^x} \left[K_1 \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) - K_2 \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \ldots \ldots + (-1)^{n-1} K_n \left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^n\right]$$

Etwas symmetrischer wird diese Formel, wenn man rechter Hand

$$\frac{1}{a+e^x} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{e^x}{a+e^x}\right)$$

setzt und die angedeutete Multiplikation ausführt; man findet so:

$$19)\qquad -a\,\frac{d^n\left(\frac{1}{a+e^x}\right)}{dx^n}$$

$$= J_1\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right) - J_2\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^2 + \ldots + (-1)^n J_{n+1}\left(\frac{e^x}{a+e^x}\right)^{n+1}$$

und darin ist überhaupt $J_k = K_k + K_{k-1}$ oder, nach Einsetzung der Werthe von K_k und K_{k-1}', sowie nach hinreichender Reduktion

$$20)\quad J_k = (-1)^{k+1}\,[1^n(k-1)_0 - 2^n(k-1)_1 + 3^n(k-1)_2 - \ldots].$$

Für $a = 1$ und wenn man nach geschehener Differenziation $x = 0$ setzt, ergiebt sich aus Nro. 19), $\frac{1}{1+e^x}$ mit $f(x)$ bezeichnet,

$$f^{(n)}(0) = -\frac{1}{2}J_1 + \frac{1}{2^2}J_2 - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}J_{n+1}.$$

Denken wir uns n als ungerade Zahl, so folgt andererseits aus Nro. 7) in §. 46:

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n+1)}\,T_n}{2^{n+1}}$$

mithin durch Vergleichung der für $f^{(n)}(0)$ gefundenen Werthe:

$$21)\quad T_n = (-1)^{\frac{1}{2}(n+1)}\,[J_{n+1} - 2^1 J_n + 2^2 J_{n-1} - 2^3 J_{n-2} + \ldots].$$

Hierin liegt eine direkte Bestimmung der Tangentencoefficienten, insofern man T_n findet, ohne die Vorgänger dieses Coefficienten berechnet zu haben. Für den praktischen Gebrauch ist es indessen bequemer, die Formel 6) des §. 33 zu benutzen und aus ihr successive die Tangentencoefficienten so wie die damit verwandten Zahlen abzuleiten.

Um noch eine elegante Anwendung der mehrfachen Differenziationen zu zeigen, gehen wir von der Gleichung

$$1 + e^x + e^{2x} + e^{3x} + \ldots + e^{(s-1)x} = \frac{x}{e^x - 1}\cdot\frac{e^{sx}-1}{x}$$

aus, bezeichnen den ersten Faktor rechter Hand mit $\varphi(x)$, den zweiten mit $\psi(x)$, differenziren $m$mal nach der Regel für die Differenziation der Produkte, und setzen zuletzt $x = 0$; es ergiebt sich so:

$$1^m + 2^m + 3^m + \ldots + (s-1)^m$$
$$= \varphi(0)\psi^{(m)}(0) + m_1\varphi'(0)\psi^{(m-1)}(0) + m_2\varphi''(0)\psi^{(m-2)}(0) + \ldots$$

Mittelst der Formel 12) in §. 46 findet man augenblicklich:

$$\varphi(0) = 1,\ \varphi'(0) = -\tfrac{1}{2},\ \varphi^{\mathrm{III}}(0) = \varphi^{\mathrm{V}}(0) \ldots = 0$$
$$\varphi^{(2k)}(0) = (-1)^{k+1} B_{2k-1}.$$

Ferner hat man vermöge der Exponenzialreihe:

$$\psi(x) = \frac{s}{1} + \frac{s^2}{1\cdot 2}x + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3}x^2 + \ldots\ldots,$$

mithin

$$\psi^{(n)}(0) = \frac{s^{n+1}}{n+1}.$$

Setzt man diese Werthe ein und fügt beiderseits s^m hinzu, so ergiebt sich die Formel

22) $$1^m + 2^m + 3^m + \ldots\ldots + s^m$$
$$= \frac{s^{m+1}}{m+1} + \tfrac{1}{2}s^m + \tfrac{1}{2}m_1 B_1 s^{m-1} - \tfrac{1}{4}m_3 B_3 s^{m-3} + \ldots\ldots$$

Die Werthe der Bernoulli'schen Zahlen, aus den Tangentencoeffizienten abgeleitet, sind $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_3 = \frac{1}{30}$, $B_5 = \frac{1}{42}$, $B_7 = \frac{1}{30}$ etc.

Durch die allgemeine Formel zur Differenziation von $f(e^x)$ erledigt sich zugleich die Differenziation zusammengesetzter trigonometrischer Funktionen; drückt man nämlich die vorkommenden Sinus, Cosinus etc. durch Exponenzialgrössen aus, so bleibt am Ende immer nur eine Funktion von e^{xi} übrig, die sich nach den obigen Formeln behandeln lässt.

IV. Entwickelung von $\frac{d^n f(lx)}{dx^n}$.

Die Methode, deren wir uns in Nro. I. zur Entwickelung der höheren Differenzialquotienten von $f(y)$ bedient haben, passt nicht auf den Fall $y = lx$, weil der $n$te Differenzialquotient von $y^\mu = (lx)^\mu$ nicht unmittelbar bekannt ist. Wir schlagen daher einen anderen Weg ein. Differenzirt man $f(lx)$ mehrmals hinter einander, so wird man bald zu folgendem Bildungsgesetze geführt:

23) $$\frac{d^n f(lx)}{dx^n} = \frac{1}{x^n}\left[f^{(n)}(lx) - C_1 f^{(n-1)}(lx) + C_2 f^{(n-2)}(lx) - \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + (-1)^{n-1} C_{n-1} f'(lx)\right],$$

worin $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$ gewisse Zahlencoeffizienten bedeuten, um deren Bestimmung es sich nur noch handelt. Man gelangt hierzu am einfachsten durch die spezielle Supposition $f(y) = e^{-\mu y}$, bei welcher es sehr leicht ist, sowohl rechter Hand die Differenzialquotienten $f'(y)$, $f''(y)$ etc., als auch links unmittelbar den Differenzialquotienten von $f(lx) = x^{-\mu}$ zu entwickeln. Nach gehöriger Hebung findet man:

$$24) \qquad \mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1) \\ = \mu^n + C_1\mu^{n-1} + C_2\mu^{n-2} + \ldots + C_{n-1}\mu\,,$$

und es ergeben sich jetzt die Coeffizienten C durch wirkliche Ausführung der angedeuteten Multiplikation, nämlich

$$\begin{aligned} C_1 &= 1+2+3+\ldots+n-1 \\ C_2 &= 1.2+1.3+1.4+\ldots+1.(n-1) \\ &\qquad +2.3+2.4+\ldots+2.(n-1) \\ &\qquad\qquad +3.4+\ldots+3.(n-1) \\ &\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad +(n-2)(n-1) \end{aligned}$$

u. s. w.;

überhaupt ist C_1 die Summe der Zahlen $1, 2, \ldots (n-1)$, C_2 die Summe der in ihnen liegenden Combinationen zu je zweien (ohne Wiederholungen), jede solche Ambe als Produkt angesehen, C_3 ist in gleicher Weise die Summe der Ternen u. s. f. Nennt man, wie es in neuerer Zeit üblich geworden ist, den Ausdruck $\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)$ eine Fakultät des $n$ten Grades [in Zeichen $(\mu, +1)^n$], so sind $C_1, C_2, \ldots$ die Fakultätencoeffizienten des Exponenten n; zur besseren Hervorhebung des Grades, zu welchem die Coeffizienten gehören, schreibt man gewöhnlich:

$${}^nC_0,\ {}^nC_1,\ {}^nC_2,\ \ldots\ {}^nC_{n-1},$$

wobei der erste Coeffizient jederzeit den Werth 1 besitzt.

Aus der Formel 23) ergiebt sich z. B. für $f(y) = y^\mu$ und bei umgekehrter Anordnung der Glieder:

$$25) \qquad \frac{d^n (lx)^\mu}{dx^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}[{}^nC_{n-1}\,\mu(lx)^{\mu-1} \\ - {}^nC_{n-2}\,\mu(\mu-1)(lx)^{\mu-2} + \ldots].$$

Bei ganzem positiven μ muss man hier unterscheiden, ob $n < \mu$ oder ob $n \geq \mu$ ist; im ersten Falle kommen in der Formel 25) innerhalb der Parenthese rechter Hand n Glieder vor, beim zweiten

Falle dagegen werden die Glieder $= 0$, in denen die Anzahl der gemachten Differenziationen grösser als μ ist; die Formel lautet dann

$$\frac{d^n (lx)^\mu}{dx^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{x^n} [{}^nC_{n-1}\,\mu (lx)^{\mu-1} - {}^nC_{n-2}\,\mu(\mu-1)(lx)^{\mu-2}$$
$$+ \ldots + (-1)^{\mu+1}\,{}^nC_{n-\mu}\,\mu(\mu-1)\ldots 2.1].$$

Hieraus folgt z. B., wenn $(lx)^\mu$ kurz mit $f(x)$ bezeichnet wird:

26) $$f^{(n)}(1) = (-1)^{n+\mu}\,{}^nC_{n-\mu}\,1.2.3\ldots\mu.$$

Eine Anwendung dieser Formel ist folgende. Erhebt man beide Seiten der Gleichung

$$l(1+h) = \tfrac{1}{1}h - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{3}h^3 - \ldots$$
$$1 > h > -1$$

auf die μte Potenz, so erhält man ein Resultat von der Form

$$[l(1+h)]^\mu = A_0 h^\mu + A_1 h^{\mu+1} + A_2 h^{\mu+2} + \ldots$$
$$1 > h > -1$$

und vermöge des Taylor'schen Satzes müssen hier die Gleichungen stattfinden:

$$A_0 = \frac{f^{(\mu)}(1)}{1.2..\mu},\ A_1 = \frac{f^{(\mu+1)}(1)}{1.2..(\mu+1)},\ \text{u. s. w.}$$

worin $f(x) = (lx)^\mu$ ist. Mittelst der Formel 26) erhält man jetzt:

27) $$[l(1+h)]^\mu = {}^\mu C_0 h^\mu - {}^{\mu+1}C_1 \frac{h^{\mu+1}}{\mu+1} + {}^{\mu+2}C_2 \frac{h^{\mu+2}}{(\mu+1)(\mu+2)} - \ldots$$
$$1 > h > -1.$$

Ein zweites Beispiel für die Formel 23) bietet die Funktion $\frac{1}{1+lx}$ dar, indem man $f(y) = \frac{1}{1+y}$ setzt; in ähnlicher Weise wie vorhin führt die gewonnene Differenzialformel sogleich weiter, indem sie unter Anwendung des Theoremes von Taylor die Coefficienten der Reihe

$$\frac{1}{1+l(1+h)} = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots.$$

bestimmt. Die vorstehende Gleichung gilt übrigens aus nahe liegenden Gründen nur von solchen h, welche zwischen den Grenzen $\frac{1}{e} - 1$ und $+1$ enthalten sind.

INTEGRALRECHNUNG.

Cap. X.

Fundamentalsätze der Integralrechnung.

§. 47.

Bestimmte und unbestimmte Integrale.

Die Betrachtung einer Funktion $F(x)$ und ihres Differenzialquotienten $F'(x)$ veranlasst zwei verschiedene Aufgaben, nämlich entweder $F'(x)$ aus $F(x)$ abzuleiten, oder umgekehrt $F(x)$ zu finden, wenn $F'(x)$ gegeben ist. Mit der ersten Aufgabe beschäftigt sich die Differenzialrechnung, die zweite gehört der Integralrechnung. Bezeichnen wir die gegebene Funktion mit $f(x)$, so würde es darauf ankommen, die unbekannte Funktion $F(x)$ zu ermitteln, von welcher $f(x)$ der Differenzialquotient ist.

Eine direkte Lösung dieses Problemes lässt sich aus dem Begriffe des Differenzialquotienten unmittelbar herleiten, indem man die Gleichung

$$1)\qquad \frac{F(x+\delta)-F(x)}{\delta}=f(x)+\varrho$$

benutzt, in welcher ϱ eine mit δ gleichzeitig verschwindende Grösse bezeichnet. Giebt man der Gleichung die Form

$$F(x+\delta)-F(x)=f(x)\,\delta+\varrho\,\delta,$$

setzt darin der Reihe nach

$$\begin{array}{llll} x=a, & a+\delta_1, & a+\delta_1+\delta_2, & \ldots\; a+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1}, \\ \delta=\delta_1, & \delta_2, & \delta_3, & \ldots\qquad \delta_n \end{array}$$

und bezeichnet die verschiedenen Werthe von ϱ, welche jenen Substitutionen entsprechen, mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$, so finden folgende Gleichungen statt:

$$F(a+\delta_1)-F(a)=f(a)\,\delta_1+\varrho_1\,\delta_1$$
$$F(a+\delta_1+\delta_2)-F(a+\delta_1)=f(a+\delta_1)\,\delta_2+\varrho_2\,\delta_2$$
$$F(a+\delta_1+\delta_2+\delta_3)-F(a+\delta_1+\delta_2)=f(a+\delta_1+\delta_2)\,\delta_3+\varrho_3\,\delta_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F(a+\delta_1+..+\delta_n)-F(a+\delta_1+..+\delta_{n-1})=f(a+\delta_1+..+\delta_{n-1})\delta_n+\varrho_n\delta_n$$

Die Addition aller dieser Beziehungen giebt linker Hand das einfache Resultat $F(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n)-F(a)$, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass $F(x)$ innerhalb des Intervalles $x=a$ bis $x=a+\delta_1+\ldots+\delta_n$ keine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet. Denn wenn sich $F(a+\delta_1)$ gegen $-F(a+\delta_1)$, ebenso $F(a+\delta_1+\delta_2)$ gegen $-F(a+\delta_1+\delta_2)$ etc. heben oder überhaupt $F(x)-F(x)$ der Null gleich sein soll, so darf der Minuendus keinen anderen Werth als der Subtrahendus besitzen, es muss also $F(x-0)=F(x+0)$ sein, wenigstens für alle hier vorkommenden speziellen Werthe von x, und hierin liegt unmittelbar die oben ausgesprochene Bedingung der Continuität von $F(x)$. Damit diese sicher stattfinde, müssen wir nach §. 29 (Seite 121) voraussetzen, dass $F'(x)=f(x)$ stetig bleibe von $x=a$ bis $x=a+\delta_1+..+\delta_n$, und haben jetzt durch die erwähnte Addition

$$\begin{aligned}&F(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n)-F(a)\\&=f(a)\,\delta_1+f(a+\delta_1)\,\delta_2+f(a+\delta_1+\delta_2)\,\delta_3+\ldots\\&\quad\ldots+f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1})\,\delta_n\\&\quad+\varrho_1\,\delta_1+\varrho_2\,\delta_2+\varrho_3\,\delta_3+\ldots+\varrho_n\,\delta_n.\end{aligned}$$

Wählen wir die beliebigen Grössen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ so, dass ihre Summe $b-a$ beträgt, so ist auch

$$\begin{aligned}2)\qquad &F(b)-F(a)-[\varrho_1\,\delta_1+\varrho_2\,\delta_2+\ldots+\varrho_n\,\delta_n]\\&=f(a)\,\delta_1+f(a+\delta_1)\,\delta_2+f(a+\delta_1+\delta_2)\,\delta_3+\ldots\ldots\\&\quad\ldots+f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1})\,\delta_n,\end{aligned}$$

wenn nämlich $f(x)$ innerhalb des Intervalles $x=a$ bis $x=b$ keine Unterbrechung der Continuität erleidet. Den Betrag der Produktensumme $\varrho_1\,\delta_1+\varrho_2\,\delta_2+\ldots+\varrho_n\,\delta_n$ können wir leicht in zwei Grenzen einschliessen; ist nämlich ϱ' die grösste und ϱ'' die kleinste unter den Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$, wobei es nur auf die absoluten Werthe ankommt, so hat man offenbar, wenn einmal ϱ' und das andere Mal ϱ'' an die Stelle aller ϱ gesetzt wird

$$\varrho_1\,\delta_1+\varrho_2\,\delta_2+\ldots+\varrho_n\,\delta_n\left\{\begin{array}{l}<\varrho'\,(\delta_1+\delta_2+..+\delta_n)\\>\varrho''\,(\delta_1+\delta_2+..+\delta_n)\end{array}\right.$$

und weil $\delta_1+\delta_2+..+\delta_n=b-a$ war

$$3)\qquad \varrho'\,(b-a)>\varrho_1\,\delta_1+\varrho_2\,\delta_2+..\,\varrho_n\,\delta_n>\varrho''\,(b-a).$$

Lassen wir jetzt a und b unverändert, verkleinern dagegen die beliebigen Grössen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$, wodurch sich ihre Anzahl fortwährend vermehrt, so werden auch $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ immer kleiner, und was von jedem ϱ gilt, muss gleichförmig von ϱ' und ϱ'' gelten; wenn demnach sämmtliche δ die Null zur Grenze erhalten, so verschwinden ϱ', ϱ'', ebenso die Ausdrücke $\varrho'(b-a)$ und $\varrho''(b-a)$ und es ist folglich

$$Lim\,[\varrho_1\delta_1 + \varrho_2\delta_2 + \ldots + \varrho_n\delta_n] = 0.$$

Indem wir dieses Resultat benutzen, ergiebt sich aus der Gleichung 2):

4)
$$\begin{aligned} & F(b) - F(a) \\ = Lim\,[f(a)\,\delta_1 + f(a+\delta_1)\,\delta_2 + f(a+\delta_1+\delta_2)\,\delta_3 + \ldots \\ \ldots + f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1})\,\delta_n] \end{aligned}$$

und damit ist die erwähnte Aufgabe gelöst, weil es am Ende freisteht, x für b zu schreiben, und da im Uebrigen die Operationen, mittelst deren $F(x)$ aus $f(x)$ abgeleitet werden kann, klar vorliegen. Nimmt man um grösserer Einfachheit willen die beliebigen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ gleich, also $n\delta = b-a$, so wird

5)
$$\begin{aligned} & F(b) - F(a) \\ = Lim\,\{[f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots+f(a+\overline{n-1}\,\delta)]\,\delta\} \\ \delta = \frac{b-a}{n}. \end{aligned}$$

Hier bezieht sich das Zeichen *Lim* auf das unendliche Wachsthum der Zahl n, in Folge dessen δ die Null zur Grenze hat; $f(x)$ muss continuirlich bleiben von $x = a$ bis $x = b$ *).

---

*) Ein Beispiel zu der obigen Formel wäre folgendes Es sei einfach $f(x) = x$, mithin $F(x)$ die unbekannte Funktion, deren Differenzialquotient x wäre, so wird

$$\begin{aligned} & F(b) - F(a) \\ &= Lim\,\{[a+(a+\delta)+(a+2\delta)+\ldots+(a+\overline{n-1}\,\delta)]\,\delta\} \\ &= Lim\,\{na\delta + (1+2+3+\ldots+\overline{n-1})\,\delta^2\} \\ &= Lim\,\left\{an\delta + \frac{n(n-1)}{2}\,\delta^2\right\} \end{aligned}$$

und wenn man für δ seinen Werth $\frac{b-a}{n}$ einsetzt:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= Lim\,\left\{a(b-a) + \tfrac{1}{2}(b-a)\left(b-a-\frac{b-a}{n}\right)\right\} \\ &= a(b-a) + \tfrac{1}{2}(b-a)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}a^2. \end{aligned}$$

Eine compendiösere Gestalt erlangt diese Gleichung, wenn man beachtet, dass die rechte Seite eine Summe darstellt, deren einzelne Glieder von der Form $f(x)\,\delta$ sind, dass man also schreiben könnte

$$F(b) - F(a) = Lim\, \Sigma\, f(x)\, \delta,$$

wobei sich das Summenzeichen auf die Addition aller der Glieder bezieht, welche für

$$x = a,\ a + \delta,\ a + 2\delta,\ \ldots\ a + \overline{n-1}\,\delta$$

aus $f(x)\,\delta$ hervorgehen; noch kürzer ist die Bezeichnung

$$F(b) - F(a) = Lim \sum_a^b f(x)\, \delta,$$

wobei nur zu merken wäre, dass a der erste Werth von x, dass jeder folgende Werth um δ grösser und dass endlich $b - \delta$ der letzte Werth von x sein soll. Insofern hier δ die Differenz zwischen zwei Nachbarwerthen des x ausmacht, eignet sich das Zeichen $\varDelta x$ besser als δ, also

$$F(b) - F(a) = Lim \sum_a^b f(x)\, \varDelta x.$$

Hier kann noch die beständige Wiederholung der Sylbe *Lim* erspart werden, wenn man sich erinnert, dass bei unendlich wachsenden n der Ausdruck $\frac{b-a}{n} = \delta = \varDelta x$ die Null zur Grenze hat (Seite 10), und dass diese unendliche Abnahme des $\varDelta x$ kürzer durch das Zeichen des Differenziales (dx) ausgedrückt wird; so bleibt also

$$F(b) - F(a) = \sum_a^b f(x)\, dx,$$

wobei es zur besseren Unterscheidung üblich geworden ist, statt des griechischen Buchstaben einen lateinischen zu gebrauchen; die Bezeichnung ist nun

6) $$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Daraus folgt, indem man x für b schreibt:

$$F(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + F(a) - \tfrac{1}{2}a^2,$$

oder, wenn der von x unabhängige Theil $F(a) - \frac{1}{2}a^2$ mit C bezeichnet wird:

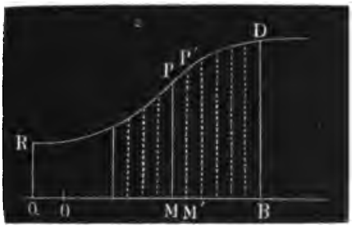
$$F(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + C,$$

wo nun C eine willkürliche Constante bedeutet. In der That wird $F'(x) = x$, wie verlangt wurde.

Den Ausdruck rechter Hand nennt man das zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommene Integral von $f(x)\,dx$ oder auch das bestimmte Integral von $f(x)\,dx$, genommen von $x = a$ bis $x = b$.

Es ist nichts weniger als überflüssig, die geometrische Bedeutung dieses Ausdruckes kennen zu lernen, wenn wir auch jetzt nicht tiefer darauf eingehen. In Fig. 28 sei in rechtwinkligen Coordinaten $OM = x$ die Abscisse, $MP = f(x)$ die Ordinate und die von einer beliebigen aber festen Ordinate QR an gerechnete Fläche $QRPM = F(x)$, dann bedeutet $F(b) - F(a)$ eine Fläche, welche die Strecke $b - a$ der Abscissenachse zur Basis hat; für $OA = a$ und $OB = b$ ist demnach

Fig. 28.



$$F(b) - F(a) = \text{Fläche } ABDC.$$

Man wird sich ferner durch ähnliche Betrachtungen wie in §. 1 leicht überzeugen, dass der Differenzialquotient von $F(x)$ gleich der Endordinate der Fläche $F(x)$ ist, oder in Zeichen

$$7) \qquad \frac{d\,F(x)}{dx} = f(x),$$

dass also hier zwischen $F(x)$ und $f(x)$ dieselbe Beziehung stattfindet, welche wir vorhin voraussetzten. Um nun umgekehrt $F(x)$ oder $F(b) - F(a)$ durch $f(x)$ auszudrücken, genügt die geometrische Bemerkung, dass man einen Näherungswerth für die Fläche $ABDC$ erhält, wenn man sich dieselbe als eine Summe schmaler rechteckförmiger Streifen vorstellt; für $MM' = \Delta x$ wäre die Fläche eines solchen Streifens $= f(x)\,\Delta x$, mithin näherungsweise

$$F(b) - F(a) = \sum_a^b f(x)\,\Delta x$$

und genau

$$F(b) - F(a) = Lim \sum_a^b f(x)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx.$$

was mit dem Früheren übereinstimmt.

Das hiermit angegebene Verfahren zur Ableitung von $F(b) - F(a)$ aus $f(x)$ hat nun zwar den Vortheil, ganz direkt zu sein und die auszuführenden Operationen (Summirung einer Reihe und nachherigen Grenzenübergang) deutlich übersehen zu lassen, aber es leidet an der Schwierigkeit, dass die genannten Operationen nur selten ausführbar sind, wie man bei einigen Versuchen bald finden wird. Man ist daher genöthigt, einen indirekten Weg einzuschlagen, welcher darin besteht, dass man von einer Funktion $F(x)$ den Differenzialquotienten $f(x)$ oder das Differenzial $f(x)\,dx$ entwickelt und durch ein neues Zeichen den Rückgang von $f(x)\,dx$ zu $F(x)$ ausdrückt. Demgemäss versteht man unter dem Symbole

$$\int f(x)\,dx \tag{8}$$

jede Funktion, deren Differenzial $= f(x)\,dx$ ist und nennt den in 8) verzeichneten Ausdruck das **unbestimmte Integral** von $f(x)\,dx$. Weiss man also im Voraus, dass $dF(x) = f(x)\,dx$ ist, so kann man umgekehrt

$$\int f(x)\,dx = F(x) \tag{9}$$

oder auch

$$\int f(x)\,dx = F(x) + Const. \tag{10}$$

setzen, denn in beiden Fällen genügt die rechte Seite der ausgesprochenen Bedingung; es ist daher jederzeit erlaubt, einem unbestimmten Integrale eine willkürliche Constante anzuhängen. — Durch beiderseitige Differenziation der Gleichung 9) oder 10) ergiebt sich

$$d\int f(x)\,dx = dF(x) = f(x)\,dx,$$

woraus zu ersehen ist, dass die beiden Zeichen d und $\int$ sich gegenseitig aufheben.

Aus dem unbestimmten Integrale lässt sich nunmehr auch das bestimmte Integral wiederum herleiten; denn setzt man nach geschehener unbestimmter Integration einmal $x = b$, dann $x = a$, so folgt durch Subtraktion

$$\int^{(x=b)} f(x)\,dx - \int_{(x=a)} f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Das bestimmte Integral kann demnach als die Differenz zweier Spezialwerthe des unbestimmten Integrales angesehen werden, wobei jedoch nicht zu vergessen ist, dass $f(x)$ innerhalb der Grenzen $x = a$ und $x = b$ keine Unterbrechung der Continuität erleiden darf. Findet eine solche statt, so verlangt der eben ausgesprochene Satz eine Modifikation, die wir später erörtern werden.

§. 48.

Die Fundamentalformeln.

Der Definition des unbestimmten Integrales zufolge giebt jede Differenzialformel Gelegenheit zur Aufstellung einer Integralformel, indem es hierzu nur einer veränderten Darstellung der ersteren bedarf. Aus der Differenzialformel

$$d\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right) = x^\mu\, dx,$$

welche für alle μ, mit alleiniger Ausnahme des Falles $\mu = -1$, Gültigkeit besitzt, erhält man so

1) $$\int x^\mu\, dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + Const., \quad \mu \gtrless -1.$$

Geht man von der allgemeinen Formel

$$d\left\{\frac{(a+bx)^{\mu+1}}{(\mu+1)b}\right\} = (a+bx)^\mu\, dx$$

aus, so findet sich auf gleiche Weise

2) $$\int (a+bx)^\mu\, dx = \frac{(a+bx)^{\mu+1}}{(\mu+1)b} + Const., \quad \mu \gtrless -1.$$

Die Differenzialformel

$$d\,l\,x = \frac{1}{x}\,dx$$

giebt, in derselben Weise umgekehrt,

3) $$\int \frac{dx}{x} = l\,x + Const.;$$

allgemeiner folgt aus Formel 3) in §. 7:

4) $$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\, l\,(a+bx) + Const.,$$

womit für den Ausnahmefall $\mu = -1$ in den Formeln 1) und 2) die Entwickelung des Integrales gegeben ist. Mittelst desselben Verfahrens leitet man aus der Differenzialformel 4) des §. 7 die folgende Integralformel ab:

5) $$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b\,(a+bx)} + Const.,$$

welche nur den speziellen Fall $\mu = -2$ von Formel 2) darstellt; ferner

$$\int \frac{dx}{\alpha^2+\beta^2 x^2} = \frac{1}{\alpha\beta}\, Arctan\, \frac{\beta x}{\alpha} + Const.,$$

oder für $\alpha^2 = a$, $\beta^2 = b$, wo nun a und b nothwendig positiv sein müssen:

6) $$\int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \; Arctan \; \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + Const.$$

Die Formel 6) in §. 7 giebt bei gleicher Behandlung

$$\int \frac{dx}{\alpha^2 + \beta^2 x^2} = \frac{1}{2\alpha\beta} \; l \left(\frac{\alpha + \beta x}{\alpha - \beta x}\right) + Const.,$$

oder

7) $$\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \; l \left(\frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}\right) + Const.,$$

wobei a und b an sich positiv sein müssen.

Aus Formel 7) in §. 7 folgt

8) $$\int \frac{x\,dx}{a + bx^2} = \frac{1}{2b} \; l\,(a + bx^2) + Const.$$

und hiermit schliesst sich die Reihe derjenigen Fundamentalformeln, in denen algebraische von Wurzeln freie Ausdrücke unter dem Integralzeichen stehen.

Die Gleichung 8) in §. 7 liefert ferner die Integralformel

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}} = \frac{1}{\beta} \; l\,(\beta x + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}) + Const.,$$

oder für $\alpha^2 = a$, $\beta^2 = b$, wo nun a und b positiv sein müssen

9) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \; l\,(x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2}) + Const.,$$

aus der Gleichung 9) des §. 7 erhält man auf dieselbe Weise

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}} = \frac{1}{\beta} \; Arcsin \; \frac{\beta x}{\alpha} + Const.,$$

oder für positive a und b

10) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \; Arcsin \; \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + Const.$$

Die Differenzialformeln 10), 11) und 12) des §. 7 führen zu den entsprechenden Integralformeln:

11) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{\sqrt{a + bx^2}}{b} + Const.,$$

12) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}^3} = \frac{x}{a\sqrt{a + bx^2}} + Const.,$$

13) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a + bx^2}^3} = \frac{1}{b\sqrt{a + bx^2}} + Const.$$

Hiermit ist die Reihe derjenigen Grundformeln beendet, welche irrationale algebraische Ausdrücke unter dem Integralzeichen enthalten.

Aus der Gleichung 13) in §. 7 folgt weiter

14) $$\int lx\,dx = x\,(lx - 1) + Const.$$

Ferner aus der bekannten Formel

$$d\left(\frac{e^{ax}}{a}\right) = e^{ax}\,dx$$

umgekehrt

15) $$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + Const.$$

und damit sind zwei Formeln gewonnen, welche bei der Integration von logarithmischen oder Exponenzialfunktionen Anwendung finden.

Kehrt man ferner die vier Gleichungen um:

$$d\left(-\frac{\cos ax}{a}\right) = \sin ax\,dx, \quad d\left(\frac{\sin ax}{a}\right) = \cos ax\,dx,$$

$$d\left(-\frac{l\cos ax}{a}\right) = \tan ax\,dx, \quad d\left(\frac{l\sin ax}{a}\right) = \cot ax\,d$$

so ergeben sich unmittelbar die vier Integralformeln:

16) $$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + Const.$$

17) $$\int \cos ax\,dx = +\frac{\sin ax}{a} + Const.$$

18) $$\int \tan ax\,dx = -\frac{l\cos ax}{a} + Const.$$

19) $$\int \cot ax\,dx = +\frac{l\sin ax}{a} + Const.$$

Die Gleichungen 16) und 17) in §. 7 geben ferner

20) $$\int \frac{dx}{\alpha^2\cos^2 x - \beta^2\sin^2 x} = \frac{1}{2\,\alpha\,\beta}\,l\left(\frac{\alpha + \beta\tan x}{\alpha - \beta\tan x}\right) + Const.$$

21) $$\int \frac{dx}{\alpha^2\cos^2 x + \beta^2\sin^2 x} = \frac{1}{\alpha\,\beta}\,Arctan\left(\frac{\beta\tan x}{\alpha}\right) + Const.$$

Wir fügen endlich noch zwei Formeln bei, die aus den Differenzialgleichungen

$$d\left[x\,Arcsin\,ax + \frac{\sqrt{1 - a^2x^2}}{a}\right] = Arcsin\,ax\,dx,$$

$$d\left[x\,Arctan\,ax - \frac{l(1 + a^2x^2)}{2a}\right] = Arctan\,ax\,dx$$

entspringen, nämlich

22) $$\int Arcsin\, ax\, dx = x\, Arcsin\, ax + \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a} + Const.$$

23) $$\int Arctan\, ax\, dx = x\, Arctan\, ax - \frac{l\,(1+a^2x^2)}{2a} + Const.$$

§. 49.

Allgemeine Reduktionsformeln.

Sind die Differenziale, um deren Integration es sich handelt, nicht so einfach wie in den oben entwickelten Grundformeln, so muss man den gegebenen Ausdruck in Theile zu zerlegen suchen, welche, einzeln genommen, integrirt werden können, und nachher das Integral der complizirteren Grösse aus den Integralen ihrer Bestandtheile zusammensetzen. Hierzu dienen folgende Gesetze.

I. Es sei eine Funktion $F(x)$ aus zwei anderen Funktionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ auf die Weise zusammengesetzt, dass die Gleichung

1) $$F(x) = A\,\Phi(x) + B\,\Psi(x)$$

stattfindet, worin A und B gegebene Constanten bedeuten. Bezeichnen wir $F'(x)$, $\Phi'(x)$, $\Psi'(x)$ der Reihe nach mit $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, so zieht die Gleichung 1) durch Differenziation die folgende nach sich:

$$\begin{aligned} f(x)\,dx &= A\,\varphi(x)\,dx + B\,\psi(x)\,dx \\ &= [A\,\varphi(x) + B\,\psi(x)]\,dx \end{aligned}$$

und es folgt daraus durch Integration

2) $$\int f(x)\,dx = \int [A\,\varphi(x) + B\,\psi(x)]\,dx.$$

Andererseits hat man wegen $dF(x) = f(x)\,dx$ umgekehrt

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

und ebenso

$$\Phi(x) = \int \varphi(x)\,dx, \quad \Psi(x) = \int \psi(x)\,dx,$$

mithin durch Substitution in Nro. 1)

3) $$\int f(x)\,dx = A\int \varphi(x)\,dx + B\int \psi(x)\,dx.$$

Die Vergleichung der rechten Seiten von Nro. 2) und Nro. 3) führt nun zu der allgemeinen Formel

4) $$\int [A\,\varphi(x) + B\,\psi(x)]\,dx = A\int \varphi(x)\,dx + B\int \psi(x)\,dx,$$

oder kürzer, wenn u und v Funktionen von x bedeuten:

5) $$\int (Au+Bv)\,dx = A\int u\,dx + B\int v\,dx,$$

was vollkommen analog der Formel 3) in §. 6 (S. 29) ist. Zufolge der obigen Formel hat man z. B. für ein ganzes positives n

$$\int \frac{1-x^n}{1-x}\,dx$$

$$= \int (1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1})\,dx$$

$$= \int dx + \int x\,dx + \int x^2\,dx + \ldots + \int x^{n-1}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{1}x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \ldots + \frac{1}{n}x^n + Const.,$$

wo nun *Const.* die Summe aller der willkürlichen Constanten ist, die man den einzelnen Integralen beifügen kann.

II. Aus der Differenzialformel

$$d\,[\Phi(x)\,.\,\Psi(x)] = \Phi(x)\,.\,d\Psi(x) + \Psi(x)\,.\,d\Phi(x)$$

folgt durch Integration unter Anwendung der vorigen Regel und bei umgekehrter Anordnung

$$\int \Phi(x)\,d\Psi(x) + \int \Psi(x)\,d\Phi(x) = \Phi(x)\,\Psi(x).$$

Setzen wir

$$d\Psi(x) = \psi(x)\,dx, \text{ also } \Psi(x) = \int \psi(x)\,dx,$$

so geht die vorige Formel in die folgende über

$$\int \Phi(x)\,\psi(x)\,dx + \int \left[\int \psi(x)\,dx\right] d\Phi(x) = \Phi(x)\int \psi(x)\,dx,$$

oder wie man gewöhnlich schreibt

6) $$\int \Phi(x)\,\psi(x)\,dx = \Phi(x)\int \psi(x)\,dx - \int d\Phi(x)\int \psi(x)\,dx.$$

Sind also u und v Funktionen von x, so hat man

7) $$\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int du\int v\,dx$$

und dies ist die Formel der sogenannten **partiellen Integration**, welche eines der Hauptmittel zur Auffindung der Integrale zusammengesetzterer Ausdrücke bildet.

Hiernach ist beispielsweise für $u = l\,(1+x^2)$, $v = x$

$$\int l\,(1+x^2)\,x\,dx = l\,(1+x^2)\int x\,dx - \int \frac{2x\,dx}{1+x^2}\int x\,dx$$

$$= l\,(1+x^2)\,.\,\tfrac{1}{2}x^2 - \int \frac{x^3\,dx}{1+x^2},$$

und wenn man beachtet, dass weiter

$$\int \frac{x^3\,dx}{1+x^2} = \int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}l\,(1+x^2),$$

so ergiebt sich schliesslich

$$\int x\,l\,(1+x^2)\,dx = \tfrac{1}{2}\,(x^2+1)\;l\,(1+x^2) - \tfrac{1}{2}x^2 + Const.$$

III. Befindet sich unter dem Integralzeichen eine zusammengesetzte Funktion, handelt es sich also um ein Integral von der Form

$$\int f\,[\varphi(x)]\;dx,$$

so leistet die Substitution einer neuen Variabelen häufig gute Dienste; man kann nämlich $\varphi(x) = y$ setzen und nunmehr y als neue unabhängige Variabele ansehen. Zunächst hat man die Gleichung $\varphi(x) = y$ auf x zu reduziren, wodurch man zu einem Resultate von der Form $x = \psi(y)$ kommt, man drückt nachher dx durch dy aus, indem man durch Differenziation der vorigen Gleichung $dx = \psi'(y)\,dy$ erhält, und gelangt so zu der Gleichung

$$\int f\,[\varphi\,(x)]\;dx = \int f\,(y)\;\psi'(y)\;dy.$$

Lässt sich die Integration rechter Hand ausführen, wobei unter Anderm die partielle Integration von Nutzen sein kann, so entsteht zunächst ein Resultat von der Form

$$\int f\,(y)\;\psi'(y)\;dy = F(y) + Const.$$

und durch Wiedereinsetzung des Werthes von y

$$\int f\,[\varphi\,(x)]\,dx = F\,[\varphi\,(x)] + Const.,$$

womit die verlangte Integration ausgeführt ist. So z. B. wird man in dem Integrale

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$$

$e^x = y$ setzen, woraus $x = ly$, $dx = \dfrac{dy}{y}$ folgt; das Integral verwandelt sich jetzt in das folgende

$$\int \frac{1}{y + \dfrac{1}{y}}\,\frac{dy}{y} = \int \frac{dy}{y^2+1},$$

dessen Werth *Arctan* y + *Const.* ist; man hat daher

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = Arctan\,(e^x) + Const.$$

Hinsichtlich der vorhin erwähnten Auflösung der Gleichung $\varphi(x) = y$ müssen wir noch bemerken, dass dieselbe möglicherweise mehrere verschiedene Werthe für x geben kann (aus $\frac{x^2-1}{2x} = y$ z. B. folgt ebensowohl $x = y + \sqrt{y^2+1}$ als $x = y - \sqrt{y^2+1}$) und es wäre daher die Frage, welcher von diesen Werthen zu nehmen sei. Man sieht aber leicht, dass man jeden beliebigen dieser Werthe wählen kann, weil am Ende y wieder rückwärts durch x ausgedrückt wird und man also jedenfalls zu demselben $\varphi(x)$ zurückkommt, von welchem man ausgegangen war.

IV. Enthält ein Integral ausser der Variabelen, in Beziehung auf welche integrirt wird, noch eine willkürliche Constante, findet also eine Gleichung von der Form statt

8) $$\int f(x, r)\, dx = F(x, r) + C,$$

so würde die Aenderung des r die entsprechende Gleichung hervorrufen:

$$\int f(x, r + \Delta r)\, dx = F(x, r + \Delta r) + C',$$

wobei es nicht gerade nothwendig ist, dass die neue willkürliche Constante C' denselben Werth wie die frühere C habe. Durch Subtraktion erhält man mit Rücksicht auf die Lehren von Nro. I.:

$$\int [f(x,r+\Delta r) - f(x,r)]\, dx = F(x,r+\Delta r) - F(x,r) + C' - C,$$

setzt man noch beiderseits den Faktor $\frac{1}{\Delta r}$ zu und nimmt $C' - C = Const.\,\Delta r$, so folgt

$$\int \frac{f(x,r+\Delta r) - F(x,r)}{\Delta r}\, dx = \frac{F(x,r+\Delta r) - F(x,r)}{\Delta r} + Const.$$

Der unter dem Integralzeichen vorkommende Quotient ist nichts Anderes, als der partiell in Beziehung auf r genommene Differenzenquotient von $f(x, r)$; derselbe kann dem entsprechenden Differenzialquotienten beliebig nahe gebracht werden, wenn man Δr klein genug wählt; wir dürfen also setzen

$$\frac{f(x, r+\Delta r) - f(x, r)}{\Delta r} = \frac{\partial f(x, r)}{\partial r} + \varepsilon,$$

indem wir uns ε als willkürlich klein angenommene Zahl und Δr so bestimmt denken, dass die Gleichung besteht; wir haben dann

$$\int \frac{\partial f(x, r)}{\partial r}\, dx + \varepsilon \int dx = \frac{F(x, r+\Delta r) - F(x, r)}{\Delta r} + Const.$$

Lassen wir ε in Null übergehen, so wird auch $\Delta r = 0$, zugleich verschwindet $\varepsilon \int dx = \varepsilon x$, vorausgesetzt, dass x keine unendlich grossen Werthe erhält; die vorige Gleichung verwandelt sich nunmehr in die nachstehende:

$$9) \qquad \int \frac{\partial f(x, r)}{\partial r} dx = \frac{\partial F(x, r)}{\partial r} + Const.$$

Will man also eine Gleichung von der Form 8) in Beziehung auf eine willkürliche Constante differenziren, so kann linker Hand die Differenziation unter dem Integralzeichen vorgenommen werden.

Dieses Theorem bietet die Mittel, um aus jeder schon gewonnenen Integralformel beliebig viele neue Integralformeln abzuleiten. Aus der Gleichung

$$\int \frac{1}{r^2 + x^2} dx = \frac{1}{r} Arctan \frac{x}{r} + C$$

folgt z. B. durch beiderseitige Differenziation in Beziehung auf r

$$\int \frac{-2r}{(r^2 + x^2)^2} dx = -\frac{1}{r} \frac{x}{r^2 + x^2} - \frac{1}{r^2} Arctan \frac{x}{r} + C'$$

und wenn man den constanten Faktor $-2r$ vor das Integralzeichen, dann auf die rechte Seite bringt und $-\frac{C'}{2r} = Const.$ setzt:

$$\int \frac{1}{(r^2 + x^2)^2} dx = \frac{1}{2r^3} \left[\frac{rx}{r^2 + x^2} + Arctan \frac{x}{r}\right] + Const.$$

Begreiflicherweise könnte nun dasselbe Verfahren wiederum angewendet werden.

Cap. XI.

Integration rationaler algebraischer Differenziale.

§. 50.

Fixirung der Aufgabe; einfachste Fälle derselben.

Unter einer rationalen algebraischen Funktion versteht man einen Ausdruck von der Form

$$1)\qquad \varphi(x) = \frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots. + Mx^\mu}{a + bx + cx^2 + \ldots. + kx^n},$$

worin, wie sich von selbst versteht, μ und n ganze positive Zahlen sind, welche den Grad des Zählers und Nenners bestimmen. Ist $\mu \geqq n$, so heisst die Funktion unecht gebrochen und kann dadurch umgewandelt werden, dass man die Division so weit ausführt, bis der Rest niedrigere Potenzen von x als der Divisor enthält wie in dem Beispiele

$$\frac{4x^5 + 19x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 10x - 1}{x^3 + 5x^2 + 7}$$
$$= 4x^2 - x - 2 + \frac{x^2 - 3x + 13}{x^3 + 5x^2 + 7}.$$

Den Quotienten nennt man jetzt eine ganze und den Rest eine echt gebrochene algebraische Funktion. Für $\mu \geqq n$ darf man also immer setzen:

$$2)\qquad \varphi(x) = A' + B'x + C'x^2 + \ldots + M'x^{\mu-n}$$
$$+ \frac{A'' + B''x + C''x^2 + \ldots + H''x^{n-1}}{a + bx + cx^2 + \ldots + kx^n},$$

wobei sich die Werthe der mit A', B', C' ..., A'', B'', C'' ... bezeichneten Coeffizienten, die zum Theil auch der Null gleich sein können, durch Ausführung der angedeuteten Division von selbst ergeben. Wenn es nun auf die Entwickelung des Integrales von $\varphi(x)\,dx$ ankommt, so folgt aus Nro. 2), indem wir den echt gebrochenen Theil kurz mit $\frac{f(x)}{F(x)}$ bezeichnen:

$$\int \varphi(x)\,dx = \int \left\{ A' + B'x + \ldots + M'x^{\mu-n} + \frac{f(x)}{F(x)} \right\} dx$$

und durch Integration der einzelnen Theile

$$\int \varphi(x)\,dx = A'\frac{x}{1} + B'\frac{x^2}{2} + \ldots + M'\frac{x^{\mu-n+1}}{\mu-n+1} + \int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx.$$

Diese Gleichung giebt zu erkennen, dass die Integration gebrochener algebraischer Funktionen überhaupt auf die Integration echt gebrochener algebraischer Funktionen zurückkommt, dass wir uns also nur mit dieser näher zu beschäftigen haben.

Ist der Nenner vom ersten Grade, so wäre das Integral

$$\int \frac{A}{a+bx}\,dx = A\int \frac{dx}{a+bx},$$

dessen Werth unmittelbar mittelst der Grundformel 4) in §. 48 gefunden wird.

Ist der Nenner vom zweiten Grade, so handelt es sich um das Integral

$$\int \frac{A+Bx}{a+bx+cx^2}\,dx,$$

welches in zwei andere Integrale zerfällbar ist, nämlich

$$A\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} + B\int \frac{x\,dx}{a+bx+cx^2},$$

deren Entwickelung auf folgende Weise geschieht.

I. Man hat zunächst identisch

$$a + bx + cx^2 = \left(x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4c} - a\right)$$
$$= \left(x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right)^2 + \left(a - \frac{b^2}{4c}\right)$$

und man wird von diesen Gleichungen die erste oder zweite benutzen, je nachdem $\frac{b^2}{4c}$ grösser oder kleiner als a ist. Im ersten Falle wäre also

$$3)\qquad \int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \int \frac{dx}{\left(x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4c} - a\right)},$$

wobei wir zur Abkürzung

4) $$\frac{b^2}{4c} - a = \alpha^2, \quad \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{c}} = \alpha$$

setzen und zugleich eine neue Variabele y einführen wollen, indem wir

5) $$x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}} = y, \text{ also } dx = \frac{dy}{\sqrt{c}}$$

nehmen. Aus der Gleichung 3) wird jetzt die folgende

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dy}{y^2 - \alpha^2} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dy}{\alpha^2 - y^2},$$

auf welche sich die vor Nro. 7) in §. 48 vorhergehende Formel unmittelbar anwenden lässt; man erhält so

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{2\alpha} l\left(\frac{\alpha+y}{\alpha-y}\right) + Const.$$

und indem man die Werthe von α und y wieder einsetzt und überflüssige Brüche wegschafft

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = -\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} l\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}+b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}-b-2cx}\right) + Const.$$

$$\frac{b^2}{4c} > a.$$

Eine etwas andere Form erhält dieses Integral, wenn man von der identischen Gleichung

$$l\left(\frac{p}{q}\right) = l\left(\frac{p}{-q}\right) + l(-1)$$

Gebrauch macht und die constante Grösse $l(-1)$ in die willkürliche Constante der Integration einrechnet; so ist dann

6) $$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = -\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} l\left(\frac{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}\right) + Const.$$

$$(b^2 - 4ac \text{ positiv}).$$

Im zweiten der oben genannten Fälle wird man schreiben

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \int \frac{dx}{\left(x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right)^2 + \left(a - \frac{b^2}{4c}\right)}$$

und ähnlich wie vorhin setzen

$$a - \frac{b^2}{4c} = \alpha^2, \quad \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2\sqrt{c}} = \alpha$$

$$x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}} = y, \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{c}}.$$

Die vorige Gleichung 6) gestaltet sich jetzt wie folgt

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dy}{y^2+\alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{\alpha} \, Arctan \frac{y}{\alpha} + Const.,$$

wobei die vor Nro. 6) in §. 48 verzeichnete Formel sogleich angewendet worden ist; vermöge der Werthe von α und y erhält man aus der obigen Gleichung die Integralformel

$$7) \quad \int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \, Arctan \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}} + Const.$$

($4ac - b^2$ positiv).

Wäre endlich $4ac = b^2$, mithin $\alpha = 0$, so geben dieselben Substitutionen wie vorhin

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{y} + Const.,$$

oder vermöge des Werthes von y

$$8) \quad \int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = -\frac{2}{b+2cx} + Const.$$

($4ac - b^2 = 0$).

II. Um den Werth des zweiten Integrales zu finden, gehen wir von der Gleichung

$$d\, l\,(a+bx+cx^2) = \frac{b+2cx}{a+bx+cx^2}\, dx$$

aus, deren Umkehrung ist

$$\int \frac{b+2cx}{a+bx+cx^2}\, dx = l\,(a+bx+cx^2).$$

Zerlegen wir das Integral in die beiden folgenden

$$b \int \frac{dx}{a+bx+cx^2} + 2c \int \frac{x\,dx}{a+bx+cx^2}$$

und bringen das erste auf die rechte Seite, so wird

$$9) \quad \int \frac{x\,dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{2c}\, l\,(a+bx+cx^2) - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{a+bx+cx^2}$$

und hiermit ist das gesuchte Integral auf ein schon bekanntes zurückgeführt.

Vermöge der Gleichung 9) findet man noch

$$10) \quad \int \frac{A+Bx}{a+bx+cx^2}\, dx$$

$$= \frac{B}{2c}\, l\,(a+bx+cx^2) + \frac{2Ac-Bb}{2c} \int \frac{dx}{a+bx+cx^2}$$

und da man den Werth des rechter Hand verzeichneten Integrales mittelst einer der Formeln 6), 7), 8) jederzeit entwickeln kann, so liegt in der Gleichung 10) die Integration der echt gebrochenen algebraischen Funktionen mit quadratischem Nenner.

§. 51.

Unmittelbare Folgerungen aus dem Vorigen.

Bevor wir noch die Integration solcher echtgebrochener Funktionen betrachten, deren Nenner den zweiten Grad überschreiten, müssen wir die Folgerungen erwähnen, die sich mittelst des in §. 49 Nro. IV. entwickelten Prinzipes aus den Formeln des vorigen Paragraphen ziehen lassen. Setzen wir nämlich

1) $$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \psi\,(a,\,b,\,c,\,x) + Const.,$$

wo $\psi\,(a, b, c, x)$ oder auch nur ψ den Werth des Integrales bezeichnet, so giebt die wiederholte partielle Differenziation in Beziehung auf a

$$-\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^2} = \frac{\partial\,\psi}{\partial\,a}$$

$$+\,2\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^3} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\,a^2}$$

u. s. f.

Hieraus lassen sich die Werthe der links stehenden Integrale bestimmen und zwar hat man allgemein für ein ganzes positives μ

2) $$\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{\mu+1}} = \frac{(-1)^\mu}{1.2.3\ldots\mu}\cdot\frac{\partial^\mu\,\psi}{\partial\,a^\mu} + Const.$$

Differenzirt man diese Gleichung m mal in Beziehung auf b, so findet sich weiter

$$\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx+cx^2)^{\mu+m+1}} = \frac{(-1)^{\mu+m}}{1.2\ldots(\mu+m)}\,\frac{\partial^{m+\mu}\,\psi}{\partial\,b^m\,\partial\,a^\mu},$$

oder für $m+\mu = n$ also $\mu = n-m$, was voraussetzt, dass $n \geqq m$ sei,

3) $$\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx+cx^2)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n}\,\frac{\partial^n\,\psi}{\partial\,b^m\,\partial\,a^{n-m}}.$$

Diese Gleichung liesse sich wieder beliebig viele Male in Beziehung auf c differenziren, und bei jeder solchen Differenziation würde der Grad des Nenners um eine Einheit, der Grad des Zählers dagegen um zwei Einheiten steigen. Aus diesen Bemerkungen geht hervor, dass man durch mehrfache Differenziationen in Beziehung auf a, b und c den Werth des Integrales

$$\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx+cx^2)^{n+1}}$$

entwickeln kann.

Zu demselben Resultate führt noch ein anderer Weg. Bezeichnen wir das Trinom $a + bx + cx^2$ kurz mit T, so ist durch gewöhnliche Differenziation

$$d\left(\frac{b+2cx}{T^n}\right) = -n\frac{(b+2cx)^2}{T^{n+1}}dx + 2c\frac{dx}{T^n},$$

oder unter Anwendung der identischen Gleichung

$$(b+2cx)^2 = 4cT - (4ac-b^2)$$

und durch Vereinigung der gleichartigen Grössen

$$d\left(\frac{b+2cx}{T^n}\right) = (4ac-b^2)n\frac{dx}{T^{n+1}} - 2c(2n-1)\frac{dx}{T^n}.$$

Die Integration giebt jetzt

$$\frac{b+2cx}{T^n} = (4ac-b^2)n\int\frac{dx}{T^{n+1}} - 2c(n-1)\int\frac{dx}{T^n};$$

reduzirt man auf das erste Integral rechter Hand und setzt zur Abkürzung

4) $$4ac - b^2 = \lambda,$$

so gelangt man zu folgender Beziehung

5) $$\int\frac{dx}{T^{n+1}} = \frac{b+2cx}{n\lambda T^n} + \frac{(2n-1)2c}{n\lambda}\int\frac{dx}{T^n}.$$

Diese Reduktionsformel liefert der Reihe nach die Werthe von

$$\int\frac{dx}{T^2},\ \int\frac{dx}{T^3},\ \int\frac{dx}{T^4},\ \ldots.$$

indem man successive $n = 1, 2, 3, \ldots$ nimmt und jeden gewonnenen Werth in die nächste Gleichung einsetzt; der Anfang dieser Rechnung wäre

$$n = 1,\qquad \int\frac{dx}{T^2} = \frac{b+2cx}{\lambda T} + \frac{2c}{\lambda}\int\frac{dx}{T},$$

wo das Integral rechter Hand aus den Entwickelungen des vorigen Paragraphen bekannt ist; ferner

$$n = 2,\qquad \int\frac{dx}{T^3} = \frac{b+2cx}{2\lambda T^2} + \frac{3c}{\lambda}\int\frac{dx}{T^2}$$

$$= \frac{b+2cx}{2\lambda T^2} + \frac{3c(b+2cx)}{\lambda^2 T} + \frac{6c^2}{\lambda^2}\int\frac{dx}{T}$$

u. s. w.

Ist man auf diesem Wege zu einem Integrale von der Form 2) gekommen, so geht man folgendermaassen weiter. Mittelst gewöhnlicher Differenziation ergiebt sich

$$d\left(\frac{x^{m-1}}{T^n}\right) = (m-1)\frac{x^{m-2}}{T^n}dx - n\frac{x^{m-1}(b+2cx)}{T^{n+1}}dx,$$

oder, wenn man rechter Hand Alles auf gleichen Nenner bringt und das Gleichartige vereinigt

$$d\left(\frac{x^{m-1}}{T^n}\right) = (m-1)\,a\,\frac{x^{m-2}\,dx}{T^{n+1}} - (n-m+1)\,b\,\frac{x^{m-1}\,dx}{T^{n+1}}$$
$$- (2n-m+1)\,c\,\frac{x^{m-1}\,dx}{T^{n+1}}.$$

Umgekehrt ist die entsprechende Integralgleichung

$$\frac{x^{m-1}}{T^n} = (m-1)\,a\int\frac{x^{m-2}\,dx}{T^{n+1}} - (n-m+1)\,b\int\frac{x^{m-1}\,dx}{T^{n+1}}$$
$$- (2n-m+1)\,c\int\frac{x^m\,dx}{T^{n+1}}.$$

Sieht man das letzte Integral rechter Hand als Unbekannte an, so findet man:

$$6)\quad \int\frac{x^m\,dx}{T^{n+1}} = -\frac{1}{(2n-m+1)\,c}\cdot\frac{x^{m-1}}{T^n}$$
$$-\frac{(n-m+1)\,b}{(2n-m+1)\,c}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{T^{n+1}} + \frac{(m-1)\,a}{(2n-m+1)\,c}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{T^{n+1}}.$$

Geht man von dem Werthe $m = 1$ aus und sieht das Integral von $dx : T^{n+1}$ als bekannt an, was der Formel 5) zufolge erlaubt ist, so kann man der Reihe nach die Integrale

$$\int\frac{x\,dx}{T^{n+1}},\quad \int\frac{x^2\,dx}{T^{n+1}},\quad \int\frac{x^3\,dx}{T^{n+1}},\ \ldots$$

entwickeln; der Anfang dieser Rechnung wäre

$$m = 1,\quad \int\frac{x\,dx}{T^{n+1}} = -\frac{1}{2nc\,T^n} - \frac{b}{2c}\int\frac{dx}{T^{n+1}},$$

$$m = 2,\quad \int\frac{x^2\,dx}{T^{n+1}} = -\frac{x}{(2n-1)\,c\,T^n} - \frac{(n-1)\,b}{(2n-1)\,c}\int\frac{x\,dx}{T^{n+1}}$$
$$+\frac{a}{(2n-1)\,c}\int\frac{dx}{T^{n+1}},$$

wo rechter Hand noch der Werth des ersten Integrales aus der vorigen Gleichung zu nehmen ist u. s. w. — Durch successive Anwendung der Formeln 5) und 6) kann nun auch der Werth jedes Integrales von der Form

$$\int\frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots + Hx^h}{(a + bx + cx^2)^{n+1}}\,dx$$

vollständig ermittelt werden.

Es ist nicht überflüssig, zu bemerken, dass die Gleichung 6) für negative m gleichfalls gelten muss, weil sie die Umkehrung einer für alle möglichen m und n richtig bleibenden Differenzialformel darstellt. Lassen wir nun $-m+2$ an die Stelle von m treten, so nimmt die Gleichung 6) folgende Form an:

$$\int\frac{dx}{x^{m-2}\,T^{n+1}}=-\frac{1}{(2n+m-1)c}\,\frac{1}{x^{m-1}\,T^{n}}$$

$$-\frac{(n+m-1)b}{(2n+m-1)c}\int\frac{dx}{x^{m-1}\,T^{n+1}}-\frac{(m-1)a}{(2n+m-1)c}\int\frac{dx}{x^{m}\,T^{n+1}}$$

und wenn man das letzte Integral rechterseits als Unbekannte betrachtet, so ist

$$7)\qquad \int\frac{dx}{x^{m}\,T^{n+1}}=-\frac{1}{(m-1)\,a\,x^{m-1}\,T^{n}}$$

$$-\frac{(n+m-1)b}{(m-1)a}\int\frac{dx}{x^{m-1}\,T^{n+1}}-\frac{(2n+m-1)c}{(m-1)\,a}\int\frac{dx}{x^{m-2}\,T^{n+1}}.$$

Für $m=1$ ist diese Formel nicht brauchbar; man kann in diesem Falle die Substitution $x=\frac{1}{z}$ anwenden und erhält dadurch direkt

$$\int\frac{dx}{x(a+bx+cx^2)^{n+1}}=-\int\frac{z^{2n+1}\,dx}{(c+bz+az^2)^{n+1}},$$

wo man rechter Hand die Integration mittelst der Formeln 5) und 6) auszuführen und nachher rückwärts $z=\frac{1}{x}$ zu setzen hat. Nimmt man hierauf in Nro. 7) $m=2, 3, \ldots$, so kann man die Integrale

$$\int\frac{dx}{x^2\,T^{n+1}},\ \int\frac{dx}{x^3\,T^{n+1}},\ \ldots$$

der Reihe nach entwickeln, überhaupt nun auch den Werth jedes unter der Form

$$\int\left\{A+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+\ldots+\frac{H}{x^h}\right\}\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{n+1}}$$

stehenden Integrales ermitteln.

§. 52.

Integration beliebiger echtgebrochener Funktionen.

Wenn es darauf ankommt, den Werth eines Integrales von der Form

$$\int \frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots + Hx^{\varkappa-1}}{a + bx + cx^2 + \ldots + kx^{\varkappa}}\, dx$$

zu bestimmen, so ist zunächst die Bemerkung nicht überflüssig, dass man dafür schreiben darf:

$$\frac{1}{k}\int \frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots + Hx^{\varkappa-1}}{\frac{a}{k} + \frac{b}{k}x + \frac{c}{k}x^2 + \ldots + x^{\varkappa}}\, dx,$$

dass man also der höchsten Potenz von x im Nenner den Coefficienten 1 verschaffen kann, indem man $\frac{a}{k} = A_1$, $\frac{b}{k} = B_1$ etc. setzt. Demnach kommt es nur darauf an, einen Ausdruck von der Form

1) $$\int \frac{f(x)}{F(x)}\, dx$$

zu integriren, wobei $F(x)$ und $f(x)$ ganze rationale algebraische Funktionen von x sind, etwa

2) $$\begin{cases} f(x) = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Hx^{\varkappa-1} \\ F(x) = A_1 + B_1x + C_1x^2 + \ldots + H_1x^{\varkappa-1} + x^{\varkappa}. \end{cases}$$

Man weiss nun, dass ein Ausdruck der letzteren für $F(x)$ angenommenen Form jederzeit in Faktoren zerlegbar ist; nennen wir nämlich $x = p$, $x = q$ etc. die $\varkappa$ Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$, so sind $x - p$, $x - q$ etc. Faktoren von $F(x)$, und

$$F(x) = (x - p)(x - q)(x - r) \ldots .$$

Diese Wurzeln $p, q, r \ldots$ können entweder sämmtlich verschieden oder theilweise einander gleich, sie können auch reell oder imaginär sein und wir haben daher im Ganzen vier Fälle zu betrachten.

I. Sind sämmtliche Wurzeln $p, q, r, \ldots w$ verschieden und zugleich reell, so kann man die gebrochene Funktion

3) $$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots + Hx^{\varkappa-1}}{(x-p)(x-q)(x-r)\ldots(x-w)}$$

in eine Reihe einzelner Brüche zerlegen, deren Nenner die einzelnen Faktoren $x - p$, $x - q$, $\ldots x - w$ sind; in der That, wenn man

4) $$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{P}{x-p} + \frac{Q}{x-q} + \frac{R}{x-r} + \ldots + \frac{W}{x-w}$$

setzt, wo $P, Q, R, \ldots W$ noch unbekannte Coefficienten bedeuten, rechter Hand alle Brüche auf gleichen Nenner bringt und zuletzt die Coefficienten derselben Potenzen von x in beiden Zählern vergleicht, so erhält man $\varkappa$ Gleichungen ersten Grades zwischen den $\varkappa$ Unbekannten $P, Q, R, \ldots W$, welche letztere demnach jederzeit völlig bestimmte reelle Werthe besitzen. Hat man diese Werthe durch Auflösung jener Gleichungen ermittelt, so kann die verlangte Integration auf der Stelle ausgeführt werden, nämlich:

$$\begin{aligned}\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx &= \int \left\{\frac{P}{x-p} + \frac{Q}{x-q} + \ldots + \frac{W}{x-w}\right\} dx \\ &= P\int\frac{dx}{x-p} + Q\int\frac{dx}{x-q} + \ldots + W\int\frac{dx}{x-w} \\ &= Pl(x-p) + Ql(x-q) + \ldots + Wl(x-w) + Const.\end{aligned}$$

Als Beispiel hierzu diene die Integration des Falles

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^2-7}{x^3+2x^2-5x-6};$$

löst man zunächst die Gleichung $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ auf, so findet man die drei verschiedenen reellen Wurzeln $x = -1$, $x = +2$, $x = -3$ und es ist demnach

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-2)(x+3);$$

man setzt nun weiter

$$5) \qquad \frac{x^2-7}{x^3+2x^2-5x-6} = \frac{P}{x+1} + \frac{Q}{x-2} + \frac{R}{x+3}$$

und hier wird die rechte Seite durch Reduktion auf gemeinschaftlichen Nenner

$$= \frac{(P+Q+R)x^2 + (P+4Q-R)x - (6P-3Q+2R)}{(x+1)(x-2)(x+3)}.$$

Die Vergleichung der beiderseitigen Zähler liefert für P, Q, R die drei Gleichungen

$$P+Q+R = 1, \quad P+4Q-R = 0, \quad 6P-3Q+2R,$$

aus deren Auflösung die Werthe $P = 1$, $Q = -\frac{1}{5}$, $R = +\frac{1}{5}$ folgen; setzt man diese in Nro. 5) ein, multiplizirt darauf die Gleichung mit dx und integrirt, so erhält man

$$\begin{aligned}&\int \frac{x^2-7}{x^3+2x^2-5x-6}\,dx \\ &= l(x+1) - \tfrac{1}{5}\,l(x-2) + \tfrac{1}{5}\,l(x+3) + Const.\end{aligned}$$

Eine nicht zu verkennende Unbequemlichkeit bei diesem Verfahren liegt in der Auflösung der zur Bestimmung von $P, Q, \ldots W$

nöthigen Gleichungen; sie lässt sich auf folgendem Wege beseitigen. Es sei u irgend eine von den Wurzeln $p, q, \ldots w$ und U die entsprechende der Grössen $P, Q, \ldots W$, so stelle man die Gleichung

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{P}{x-p} + \frac{Q}{x-q} + \ldots + \frac{U}{x-u} + \ldots + \frac{W}{x-w}$$

unter der kurzen Form dar

$$6) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{U}{x-u} + \frac{\psi(x)}{\Psi(x)},$$

wo $\frac{\psi(x)}{\Psi(x)}$ die Summe aller der Brüche bezeichnet, in denen die Wurzel u nicht vorkommt. Diese Summe ist ein Bruch, dessen Nenner die Faktoren $x-p$, $x-q$, $\ldots$ $x-w$ mit Ausschluss von $x-u$ enthält, mithin

$$7) \qquad F(x) = (x-u)\,\Psi(x);$$

durch Substitution dieses Werthes von $F(x)$ geht die Gleichung 6) in die folgende über:

$$f(x) = U\,\Psi(x) + (x-u)\,\psi(x)$$

und für $x = u$ erhält man daraus spezieller

$$8) \qquad f(u) = U\,\Psi(u) \text{ oder } U = \frac{f(u)}{\Psi(u)}.$$

Um das unbekannte $\Psi(u)$ zu entfernen, differenziren wir die Gleichung 7), nehmen also

$$F'(x) = (x-u)\,\Psi'(x) + \Psi(x)$$

und setzen hier gleichfalls $x = u$; dies giebt

$$F'(u) = \Psi(u).$$

Nach Formel 8) wird nunmehr

$$U = \frac{f(u)}{F'(u)}$$

und die Coefficienten P, Q, R etc. sind also der Reihe nach

$$9) \qquad P = \frac{f(p)}{F'(p)}, \quad Q = \frac{f(q)}{F'(q)}, \quad R = \frac{f(r)}{F'(r)}, \ldots$$

was jedenfalls eine einfachere Bestimmungsweise der Coefficienten ist.

II. Die soeben auseinandergesetzte Integrationsmethode bleibt im Wesentlichen ungeändert, wenn einige oder alle der Wurzeln $p, q, r, \ldots$ von complexer Form sind. Da nämlich die Zerfällung nach dem Schema 4) auf identischen Gleichungen beruht, deren Behandlung ganz gleichförmig für reelle und imaginäre Zahlen ist, so erhellt unmittelbar, dass jene Zerlegung jetzt ebenso wie früher geschehen kann; nur findet der Unterschied statt, dass einige der Partialbrüche complexe Zähler und Nenner besitzen. Das Imaginäre lässt sich aber leicht vermeiden, wenn man immer je zwei solche Partialbrüche vereinigt, deren Nenner zwei conjugirte Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ enthalten. Um dies näher zu erläutern, wollen wir vorerst annehmen, die Gleichung $F(x) = 0$ habe nur zwei imaginäre Wurzeln $u = \lambda + \mu\sqrt{-1}$ und $v = \lambda - \mu\sqrt{-1}$, so ist ($\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet):

$$10)\quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{P}{x-p} + \frac{Q}{x-q} + \ldots + \frac{U}{x-\lambda-\mu i} + \frac{V}{x-\lambda+\mu i} + \ldots + \frac{W}{x-w}.$$

Durch Vereinigung der beiden Partialbrüche mit den Zählern U und V ergiebt sich für

$$U + V = U_1,\quad -U(\lambda-\mu i) - V(\lambda+\mu i) = V_1$$

die neue Form

$$11)\quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{P}{x-p} + \frac{Q}{x-q} + \ldots + \frac{U_1 x + V_1}{(x-\lambda)^2 + \mu^2} + \ldots + \frac{W}{x-w}.$$

Die beiden zu zwei conjugirten imaginären Wurzeln gehörenden Partialbrüche liefern also zusammen einen Partialbruch, dessen Nenner vom zweiten und dessen Zähler höchstens vom ersten Grade ist. In der Gleichung 11) hat man derartiger Partialbrüche so viele vorauszusetzen, als in der Gleichung $F(x) = 0$ Paare von conjugirten Wurzeln enthalten sind. Um nun die Coefficienten U_1 und V_1 zu bestimmen, kann man entweder die sämmtlichen Brüche rechter Hand in Nro. 11) über gleichen Nenner bringen und die Zähler auf ähnliche Weise wie früher vergleichen, oder man kann sich der Formeln 9) bedienen, um zunächst die Coefficienten U und V in der Gleichung 10) zu entwickeln; man erhält dann U_1 und V_1 von selbst durch Vereinigung der conjugirten Partialbrüche. Ist in jedem Falle die Zerlegung auf die Form 11) gebracht, so hat man nur noch mit dx zu multipliziren und zu integriren, wobei rechterseits alle Integrationen mittelst der Formeln des §. 50 ausführbar sind.

Als Beispiel diene die Entwickelung des Integrales

$$\int \frac{7x-3}{x^3-3x^2+x+5}\,dx;$$

man findet zunächst als Wurzeln der Gleichung $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$ die Werthe $x = -1$, $x = 2 + i$, $x = 2 - i$, es ist also

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + x + 5 &= (x+1)(x-2-i)(x-2+i) \\ &= (x+1)(x^2-4x+5), \end{aligned}$$

und mithin muss gesetzt werden:

$$\frac{7x-3}{x^3-3x^2+x+5}=\frac{P}{x+1}+\frac{Qx+R}{x^2-4x+5}.$$

Durch Reduktion auf denselben Nenner und Vergleichung der Zähler ergeben sich für P, Q, R die drei Gleichungen $P+Q=0$, $-4P+Q+R=7$, $5P+R=-3$, aus denen $P=-1$, $Q=+1$, $R=2$ folgt. Es ist daher

$$\int\frac{7x-3}{x^3-3x^2+x+5}=-\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{2+x}{5-4x+x^2}\,dx$$

und bei Ausführung der Integrationen rechter Hand:

$$\int\frac{7x-3}{x^3-3x^2+x+5}\,dx$$

$$=-l(x+1)+\tfrac{1}{2}l(x^2-4x+5)+4\,Arctan(x-2)+Const.$$

Einige allgemeinere Anwendungen dieses Verfahrens giebt der nächste Paragraph.

§. 53.

Fortsetzung.

I. Da nach §. 42 die Wurzeln der Gleichung $x^n-1=0$ bekannt sind, so kann der Bruch

$$\frac{x^{m-1}}{x^n-1}\qquad \text{für } m-1<n$$

jederzeit in Partialbrüche zerlegt werden, und zwar geschieht dies auf folgende Weise.

Ist n eine gerade Zahl und zur Abkürzung $\frac{\pi}{n}=\vartheta$, so sind die Wurzeln

$$+1,$$
$$\cos h\vartheta+i\sin h\vartheta,\quad \cos h\vartheta-i\sin h\vartheta$$
$$-1,$$

wenn man h der Reihe nach $=2, 4, 6, 8\ldots(n-2)$ setzt (Seite 166); jede Wurzel r der Gleichung $F(x)=0$ erzeugt nun einen Partialbruch von der Form

$$\frac{R}{x-r},\text{ wo } R=\frac{f(r)}{F'(r)},$$

mithin haben wir in unserem Falle für $f(x)=x^{m-1}$ und $F(x)=x^n-1$:

$$R=\frac{(\cos h\vartheta+i\sin h\vartheta)^{m-1}}{n(\cos h\vartheta+i\sin h\vartheta)^{n-1}}=\frac{1}{n}\Big\{\cos h(m-n)\vartheta+i\sin h(m-n)\vartheta\Big\},$$

wobei von dem Moivre'schen Satze Gebrauch gemacht wurde.

Mit Rücksicht auf den Umstand, dass $n\vartheta = \pi$ und h eine gerade Zahl ist, ergiebt sich einfacher

$$R = \frac{1}{n}\left\{\cos hm\vartheta + i\sin hm\vartheta\right\}.$$

Der Wurzel $x = \cos h\vartheta + i\sin h\vartheta$ entspricht also der Partialbruch

$$\frac{1}{n}\,\frac{\cos h\,m\vartheta + i\sin hm\vartheta}{x-(\cos h\vartheta + i\sin h\vartheta)};$$

ebenso würde die conjugirte Wurzel $x = \cos h\,\vartheta - i\sin h\,\vartheta$ den conjugirten Partialbruch liefern:

$$\frac{1}{n}\,\frac{\cos hm\vartheta - i\sin hm\vartheta}{x-(\cos h\vartheta - i\sin h\vartheta)}.$$

Vereinigt man diese beiden Partialbrüche, so geben sie den reellen Bruch

$$\frac{2}{n}\,\frac{\cos hm\vartheta(x-\cos h\vartheta) - \sin hm\vartheta\,\sin h\vartheta}{x^2 - 2x\cos h\vartheta + 1}$$

und dieser bildet in der Zerlegung von $x^{m-1} : (x^n - 1)$ den Bestandtheil, welcher den conjugirten Wurzeln $x = \cos h\vartheta + i\sin h\vartheta$ und $x = \cos h\vartheta - i\sin h\vartheta$ zusammen entspricht. Rechnen wir ferner hinzu, dass die Wurzel $x = +1$ den Partialbruch

$$\frac{1}{n}\,\frac{1}{x-1}$$

und die Wurzel $x = -1$ den Partialbruch

$$\frac{1}{n}\,\frac{(-1)^{m-1}}{(-1)^{n-1}}\,\frac{1}{x+1}$$

erzeugt, so ergiebt sich für gerade n folgende Zerlegung:

1)
$$\frac{x^{m-1}}{x^n-1}$$
$$= \frac{1}{n}\,\frac{1}{x-1} + \frac{2}{n}\,\Sigma\,\frac{\cos hm\vartheta(x-\cos h\vartheta) - \sin hm\vartheta\,\sin h\vartheta}{x^2-2x\cos h\vartheta+1}$$
$$+ \frac{(-1)^m}{n}\,\frac{1}{x+1},$$

wobei sich das Summenzeichen (Σ) auf die Werthe $h = 2, 4, 6 \ldots (n-2)$ bezieht.

Bei ungeraden n ändert sich wenig an dieser Rechnung, wie man daraus ersieht, dass in diesem Falle für x die Werthe gelten (S. 166)

$$+1,$$
$$\cos h\,\vartheta + i\sin h\,\vartheta, \quad \cos h\,\vartheta - i\sin h\,\vartheta$$
$$[h = 2, 4, 6, \ldots . (n-1)],$$

es kommt also nur die Wurzel $x = -1$ in Wegfall, mithin ist auch der entsprechende Partialbruch wegzulassen, so dass übrig bleibt:

2) $$\frac{x^{m-1}}{x^n-1}$$

$$=\frac{1}{n}\,\frac{1}{x-1}+\frac{2}{n}\,\Sigma\,\frac{\cos h m\vartheta\,(x-\cos h\vartheta)-\sin h m\vartheta\,\sin h\vartheta}{x^2-2x\cos h\vartheta+1},$$

wobei $h=2, 4, 6, \ldots (n-1)$ zu setzen ist.

Multiplizirt man nun die Gleichungen 1) und 2) mit dx und integrirt mit Hülfe der leicht zu prüfenden Formel

$$\int\frac{\cos h m\vartheta\,(x-\cos h\vartheta)-\sin h m\vartheta\,\sin h\vartheta}{x^2-2x\cos h\vartheta+1}\,dx$$

$$=\cos h m\vartheta\,.\,\tfrac{1}{2}\,l(x^2-2x\cos h\vartheta+1)-\sin h m\vartheta\,.\,Arctan\,\frac{x-\cos h\vartheta}{\sin h\vartheta}$$

die einzelnen Glieder der endlichen Reihen in 1) und 2), so ergeben sich die nachstehenden Integralformeln:

a. für gerade n und $\vartheta=\frac{\pi}{n}$:

3) $$\int\frac{x^{m-1}}{x^n-1}\,dx$$

$$=\frac{1}{n}\,l\,(x-1)+\frac{1}{n}\,\Sigma\,[\cos h m\vartheta\,.\,l(x^2-2x\cos h\vartheta+1)]$$

$$-\frac{2}{n}\,\Sigma\left[\sin h m\vartheta\,.\,Arctan\,\frac{x-\cos h\vartheta}{\sin h\vartheta}\right]+\frac{(-1)^m}{n}\,l(x+1),$$

wobei $h=2, 4, 6, \ldots (n-2)$ zu setzen ist;

b. für ungerade n und $\vartheta=\frac{\pi}{n}$:

4) $$\int\frac{x^{m-1}}{x^n-1}\,dx$$

$$=\frac{1}{n}\,l\,(x-1)+\frac{1}{n}\,\Sigma\,[\cos h m\vartheta\,.\,l(x^2-2x\cos h\vartheta+1)]$$

$$-\frac{2}{n}\,\Sigma\left[\sin h m\vartheta\,.\,Arctan\,\frac{x-\cos h\vartheta}{\sin h\vartheta}\right],$$

worin h die Werthe $2, 4, 6, \ldots (n-1)$ erhält.

II. Eine völlig analoge Rechnung führt zur Kenntniss des Integrales

$$\int\frac{x^{m-1}}{x^n+1}\,dx,$$

wobei wir wiederum die Fälle eines geraden und ungeraden n zu unterscheiden haben.

Für ein gerades n besitzt die Gleichung $x^n + 1 = 0$ nur imaginäre Wurzeln von den Formen

$$\cos h\vartheta + i \sin h\vartheta, \qquad \cos h\vartheta - i \sin h\vartheta,$$

wo $\vartheta = \frac{\pi}{n}$ und $h = 1, 3, 5, \ldots (n-1)$ zu setzen ist (§. 42, S. 167). Der Wurzel $x = \cos h\vartheta + i \sin h\vartheta$ entspricht wie früher ein Partialbruch, dessen Zähler

$$R = \frac{1}{n} \left\{ \cos h(m-n)\vartheta + i \sin h(m-n)\vartheta \right\}$$

ist, wofür man wegen $n\vartheta = \pi$ und wegen des ungeraden h schreiben kann

$$R = -\frac{1}{n} \left\{ \cos hm\vartheta + i \sin hm\vartheta \right\}.$$

Die beiden conjugirten Wurzeln $x = \cos h\vartheta + i \sin h\vartheta$ und $x = \cos h\vartheta - i \sin h\vartheta$ liefern also die beiden conjugirten Partialbrüche

$$-\frac{1}{n} \frac{\cos hm\vartheta + i \sin hm\vartheta}{x - (\cos h\vartheta + i \sin h\vartheta)} \text{ und } -\frac{1}{n} \frac{\cos hm\vartheta - i \sin hm\vartheta}{x - (\cos h\vartheta - i \sin h\vartheta)},$$

deren Summe ist:

$$\frac{2}{n} \frac{-\cos hm\vartheta\,(x - \cos h\vartheta) + \sin hm\vartheta \sin h\vartheta}{x^2 - 2x\cos h\vartheta + 1}.$$

Hieraus ergiebt sich die Zerlegung

$$5)\qquad \frac{x^{m-1}}{x^n - 1}$$

$$= \frac{2}{n} \Sigma \frac{-\cos hm\vartheta\,(x - \cos h\vartheta) + \sin hm\vartheta \sin h\vartheta}{x^2 - 2x\cos h\vartheta + 1},$$

wobei sich das Summenzeichen auf die Werthe $h = 1, 3, 5, \ldots (n-1)$ bezieht.

Für ein ungerades n sind die Wurzeln der Gleichung $x^n + 1 = 0$

$$-1,$$

$$\cos h\vartheta + i \sin h\vartheta, \qquad \cos h\vartheta - i \sin h\vartheta,$$

wobei $\vartheta = \frac{\pi}{n}$ und $h = 1, 3, 5, \ldots (n-2)$ zu setzen ist. Die Zerlegung geschieht also auf dieselbe Weise wie vorhin, nur kommt noch ein Partialbruch hinzu, welcher der Wurzel $x = 1$ entspricht; dieser Partialbruch würde sein

$$\frac{(-1)^{m-1}}{n(-1)^{n-1}} \frac{1}{x+1} = \frac{(-1)^{m-1}}{n} \frac{1}{x+1},$$

indem man beachtet, dass $n - 1$ gerade wird. Somit ist nun

6)
$$\frac{x^{m-1}}{x^n+1}$$
$$=\frac{2}{n}\,\Sigma\,\frac{-\cos h m\vartheta\,(x-\cos h\vartheta)+\sin h m\vartheta\,\sin h\vartheta}{x^2-2x\cos h\vartheta+1}$$
$$+\frac{(-1)^{m-1}}{n}\,\frac{1}{x+1}.$$

Aus den Zerlegungen 5) und 6) ergeben sich durch Multiplikation mit dx und Integration die nachstehenden Integralformeln:

c. für gerade n und $\vartheta=\frac{\pi}{n}$:

7)
$$\int\frac{x^{m-1}}{x^n+1}\,dx$$
$$=-\frac{1}{n}\,\Sigma\,[\cos h m\vartheta\,.\,l(x^2-2x\cos h\vartheta+1)]$$
$$+\frac{2}{n}\,\Sigma\left[\sin h m\vartheta\,.\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x-\cos h\vartheta}{\sin h\vartheta}\right],$$

wobei $h=1, 3, 5, \ldots (n-1)$ zu setzen ist;

d. für ungerade n und $\vartheta=\frac{\pi}{n}$:

$$\int\frac{x^{m-1}}{x^n+1}\,dx$$
$$=-\frac{1}{n}\,\Sigma\,[\cos h m\vartheta\,.\,l(x^2-2x\cos h\vartheta+1)]$$
$$+\frac{2}{n}\,\Sigma\left[\sin h m\vartheta\,.\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x-\cos h\vartheta}{\sin h\vartheta}\right]+\frac{(-1)^{m-1}}{n}\,l(x+1),$$

worin sich die Summenzeichen auf die Werthe $h=1, 3, 5, \ldots (n-2)$ beziehen.

Aus dieser Untersuchung geht hervor, dass man den Werth des Integrales
$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{x^n\pm 1}$$
jederzeit vollständig entwickeln kann; und es lassen sich aus diesem Resultate noch einige allgemeinere Folgerungen ziehen. Handelt es sich nämlich um das Integral
$$\int\frac{z^{m-1}\,dz}{a\,z^n\pm b},$$
so setzt man für z eine neue Variabele
$$z=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}x,\quad x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}z;$$

es verwandelt sich dann das obige Integral in das folgende

$$\frac{1}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{x^n \pm 1}$$

und ist also auf das frühere Integral zurückgeführt. — Endlich können wir noch bemerken, dass nunmehr auch jedes Integral von der Form

$$\int \frac{A + Bz + Cz^2 + \ldots + Mz^\mu}{az^n \pm b}\,dz,\ \mu < n$$

völlig entwickelbar ist, indem man auf die einzelnen Bestandtheile desselben die soeben beschriebene Substitution anwendet.

§. 54.

Fortsetzung und Schluss.

I. Das in §. 52 auseinandergesetzte Verfahren zur Zerlegung einer echtgebrochenen Funktion erleidet eine wesentliche Abänderung in dem Falle, wo die Wurzeln p, q, r . . . der Gleichung $F(x) = 0$ nicht sämmtlich verschieden sind. Wären z. B. auch nur zwei dieser Grössen gleich, etwa q und r, wäre ferner $F(x)$ vom dritten Grade, also $F(x) = (x-p)(x-q)(x-r) = (x-p)(x-q)^2$, und $f(x) = A + Bx + Cx^2$, so würde die Gleichung

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{P}{x-p} + \frac{Q}{x-q} + \frac{R}{x-r}$$

in die einfachere Gleichung übergehen:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{P}{x-p} + \frac{Q+R}{x-r},$$

wobei man $Q+R$ kürzer mit einem Buchstaben S bezeichnen könnte. Bringt man jetzt die beiden Seiten der Gleichung

$$\frac{A + Bx + Cx^2}{(x-p)(x-q)^2} = \frac{P}{x-p} + \frac{S}{x-q}$$

auf gleichen Nenner und vergleicht die Zähler, so würden sich drei Gleichungen zur Bestimmung von zwei Unbekannten, P und S, finden; man erkennt daraus die Unmöglichkeit einer Zerlegung dieser Form. Dieselbe Erscheinung würde sich in noch stärkerem Maasse wiederholen, wenn die Gleichung $F(x) = 0$ mehrere gleiche Wurzeln besässe und überhaupt

$$F(x) = (x-p)^\lambda (x-q)^\mu \ldots (x-s)^\sigma$$

wäre, wo λ, μ, . . . σ ganze positive Zahlen bedeuten. Man gelangt dann auf folgendem Wege zur Zerlegung von $f(x) : F(x)$.

Zunächst ist leicht einzusehen, dass man setzen darf:

1) $$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{(x-p)^\lambda} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-q)^\mu} + \dots$$

wo $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... ganze rationale Funktionen bedeuten, deren Grad niedriger als der Grad des Nenners ist, über welchem sie stehen. Man überzeugt sich hiervon leicht, indem man für $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... Ausdrücke von den Formen

$$a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + \dots + k_1 x^{\lambda-1}$$
$$a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + \dots + k_2 x^{\mu-1}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

einsetzt, Alles auf gleichen Nenner bringt und die Coefficienten der in beiden Zählern vorkommenden Potenzen von x vergleicht; man erhält $\lambda + \mu + \dots + \sigma$ Gleichungen ersten Grades zur Bestimmung der $\lambda + \mu + \dots \sigma$ Unbekannten $a_1, b_1, \dots k_1, a_2, b_2, \dots k_2$ u. s. w., also eine jederzeit mögliche Bestimmung dieser Unbekannten *). Bezeichnen wir mit

$$\frac{\varphi(x)}{(x-r)^\varrho}$$

irgend einen der auf der rechten Seite von Nro. 1) vorkommenden Brüche und wenden das Theorem von Taylor auf den Zähler an, so können wir die Zerlegung noch weiter treiben. Zufolge des genannten Theoremes ist nämlich (Seite 124, 5.)

$$\varphi(x) = \varphi[r + (x-r)]$$
$$= \varphi(r) + \frac{\varphi'(r)}{1}(x-r) + \frac{\varphi''(r)}{1.2}(x-r)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(\varrho-1)}(r)}{1.2..(\varrho-1)}(x-r)^{\varrho-1}$$
$$+ \frac{(1-\Theta)^{\varrho-1}(x-r)^\varrho}{1.2\dots(\varrho-1)}\,\varphi^{(\varrho)}[r + \Theta(x-r)],$$

*) Um z. B. den Bruch

$$\frac{8 - 3x + 9x^2}{1 - x - x^2 + x^3}$$

zu zerlegen, bemerke man zunächst, dass die Wurzeln der Gleichung $x^3 - x^2 - x + 1$ sind $x = -1$, $x = -1$, $x = +1$, dass also $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$ ist. Man setze nun

$$\frac{9x^2 - 3x + 8}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{a_1 + b_1 x}{(x-1)^2} + \frac{a_2}{x+1},$$

so ergeben sich nach dem obigen Verfahren die Gleichungen

$$a_2 + b_1 = 9, \quad a_1 + b_1 - 2a_2 = -3, \quad a_1 + a_2 = 8$$

und diesen entsprechen die Werthe $a_1 = 3$, $b_1 = 4$, $a_2 = 5$; demnach gilt die Zerlegung

$$\frac{9x^2 - 3x + 8}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{4x + 3}{(x-1)^2} + \frac{5}{x+1}.$$

wobei das letzte Glied den Rest der Reihe darstellt. Da nun aber $\varphi(x)$ von niedrigerem Grade als $(x-r)^\varrho$ ist, also unter der Form steht

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + kx^{\varrho-1},$$

so giebt die ϱ malige Differenziation $\varphi^{(\varrho)}(x) = 0$, mithin auch $\varphi^{(\varrho)}[r + \Theta(x-r)] = 0$; demnach bleibt, wenn wir die Coefficienten von $x-r$, $(x-r)^2$ etc. kurz mit R_1, R_2, ... bezeichnen:

$$\varphi(x) = R_0 + R_1(x-r) + R_2(x-r)^2 + \ldots + R_{\varrho-1}(x-r)^\varrho.$$

Der obige Partialbruch gestaltet sich nun wie folgt:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-r)^\varrho}$$
$$= \frac{R_0}{(x-r)^\varrho} + \frac{R_1}{(x-r)^{\varrho-1}} + \frac{R_2}{(x-r)^{\varrho-2}} + \ldots + \frac{R_{\varrho-1}}{x-r}.$$

Wenden wir diese Zerlegung auf alle in Nro. 1) vorkommenden Partialbrüche an, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$2)\qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{(x-p)^\lambda (x-q)^\mu \ldots (x-s)^\sigma}$$
$$= \frac{P_0}{(x-p)^\lambda} + \frac{P_1}{(x-p)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{P_{\lambda-1}}{x-p}$$
$$+ \frac{Q_0}{(x-q)^\mu} + \frac{Q_1}{(x-q)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{Q_{\mu-1}}{x-q}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{S_0}{(x-s)^\sigma} + \frac{S_1}{(x-s)^{\sigma-1}} + \ldots + \frac{S_{\sigma-1}}{x-s}.$$

Die Bestimmung der Coefficienten P_0, P_1, ... Q_0, Q_1, ... etc. kann auf dreierlei Weise geschehen; entweder hält man den bisher im Allgemeinen beschriebenen Weg auch in jedem speziellen Falle ein, oder man geht unmittelbar von der Gleichung 2) aus, bringt Alles auf gleichen Nenner und vergleicht darauf die Zähler*), oder

*) Wenn es sich z. B. um die Zerlegung von

$$\frac{8 - 3x + 9x^2}{1 - x - x^2 + x^3}$$

handelte, so könnte man entweder die Rechnung der vorigen Note benutzen und in der dadurch gewonnenen Zerlegung

$$\frac{3 + 4x}{(x-1)^2} + \frac{5}{x+1}$$

$3 + 4x = 7 + 4(x-1)$ setzen, wodurch man erhielte

$$\frac{7}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} + \frac{5}{x+1}.$$

man bedient sich folgenden Verfahrens. Sei r eine der Wurzeln $p, q, \ldots$ und $\frac{\psi(x)}{\Psi(x)}$ das Aggregat aller der Partialbrüche, in denen r nicht vorkommt, so ist

3) $$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{R_0}{(x-r)^\varrho} + \frac{R_1}{(x-r)^{\varrho-1}} + \ldots + \frac{R_{\varrho-1}}{x-r} + \frac{\psi(x)}{\Psi(x)},$$

$\psi(x)$ und $\Psi(x)$ sind zwei rationale ganze Funktionen und zwar besteht $\Psi(x)$ aus dem Produkte der Grössen $(x-p)^\lambda$, $(x-q)^\mu$ etc., mit Ausschluss von $(x-r)^\varrho$, so dass

4) $$F(x) = (x-r)^\varrho\, \Psi(x)$$

ist. Multipliziren wir die Gleichungen 3) und 4), indem wir zur Abkürzung

5) $$R_0 + R_1(x-r) + R_2(x-r)^2 + \ldots + R_{\varrho-1}(x-r)^\varrho = X$$

setzen, so folgt die Gleichung

6) $$f(x) = X\Psi(x) + (x-r)^\varrho\, \psi(x).$$

Wir differenziren dieselbe $(\varrho-1)$mal und setzen in jeder so gewonnenen Differenzialgleichung, so wie in Nro. 6) selbst, $x = r$, was durch ein angehangenes r bezeichnet werden möge; dies giebt

$$f(r) = X_r\, \Psi(r)$$

$$f'(r) = X_r\, \Psi'(r) + \left(\frac{dX}{dx}\right)_r \Psi(r)$$

$$f''(r) = X_r\, \Psi''(r) + 2\left(\frac{dX}{dx}\right)_r \Psi'(r) + \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_r \Psi(r)$$

u. s. w.

Andererseits hat man aus Nro. 5)

$$X_r = R_0,\ \left(\frac{dX}{dx}\right)_r = 1'R_1,\ \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_r = 2'R_2, \text{ etc.},$$

wenn überhaupt n' das Produkt $1.2.3\ldots n$ bezeichnet. Die vorigen Gleichungen gehen jetzt in die folgenden über:

---

oder man hat nach Nro. 2) unmittelbar

$$\frac{8 - 3x + 9x^2}{1 - x - x^2 + x^3} = \frac{P_0}{(x-1)^2} + \frac{P_1}{x-1} + \frac{Q_0}{x+1}$$

und durch Reduktion auf gleichen Nenner ergeben sich bei Vergleichung der Zähler die Bedingungen

$$P_0 - P_1 + Q_0 = 8,\quad P_0 - 2Q_0 = -3,\quad -P_1 + Q_0 = 9,$$

deren Auflösung $P_0 = 7$, $P_1 = 4$, $Q_0 = 5$ liefert. Dieses zweite Verfahren ist etwas kürzer als das erste und wird nicht selten benutzt.

$$
7)\quad \begin{cases}
f(r) = R_0\, \Psi(r) \\
f'(r) = R_0\, \Psi'(r) + 1' R_1 \Psi(r) \\
f''(r) = R_0\, \Psi''(r) + 2 \,.\, 1' R_1 \Psi'(r) + 2' R_2 \Psi(r) \\
f'''(r) = R_0\, \Psi'''(r) + 3 \,.\, 1' R_1 \Psi''(r) + 3 \,.\, 2' R_2 \Psi'(r) + 3' R_3 \Psi(r)
\end{cases}
$$

u. s. w.,

aus welchen R_0, R_1, R_2 etc. der Reihe nach bestimmbar sind.

Sobald die in der Gleichung 2) vorkommenden Coefficienten nach irgend einer der angegebenen Methoden ihre Bestimmung gefunden haben, kann die Integration unmittelbar vorgenommen werden; denn man erhält unter Benutzung der Formeln 2) und 4) in §. 48:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\, dx$$

$$= -\frac{P_0}{(\lambda-1)(x-p)^{\lambda-1}} - \frac{P_1}{(\lambda-2)(x-p)^{\lambda-2}} - \cdots - \frac{P_{\lambda-2}}{x-p} + P_{\lambda-1}\, l(x-p)$$

$$- \frac{Q_0}{(\mu-1)(x-q)^{\mu-1}} - \frac{Q_1}{(\mu-2)(x-q)^{\mu-2}} - \cdots - \frac{Q_{\mu-2}}{x-q} + Q_{\mu-1}\, l(x-q)$$

u. s. w.

Um das Verfahren an einem Beispiele zu zeigen, sei

$$\int \frac{1}{x^3(x-1)^2\,(x+1)}\, dx$$

das zu entwickelnde Integral, also $f(x) = 1$; das Schema der Zerlegung ist hier

$$\frac{1}{x^3\,(x-1)^2\,(x+1)}$$

$$= \frac{P_0}{x^3} + \frac{P_1}{x^2} + \frac{P_2}{x} + \frac{Q_0}{(x-1)^2} + \frac{Q_1}{x-1} + \frac{R_0}{x+1}.$$

Um zunächst P_0, P_1, P_2 zu bestimmen, hat man in den Formeln 7) P für R, $r = 0$ und

$$\Psi(x) = (x-1)^2\,(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

zu setzen, woraus folgt

$$\Psi'(x) = 3\,x^2 - 2\,x - 1, \quad \Psi''(x) = 6\,x - 2.$$

Die Gleichungen 7) werden jetzt:

$$1 = P_0, \quad 0 = P_0(-1) + P_1, \quad 0 = P_0(-2) + 2P_1(-1) + 2\,P_2$$

und geben $P_0 = 1$, $P_1 = 1$, $P_2 = 2$. — Um Q_0, Q_1 zu finden, ist in den Formeln 7) Q für R, $r = 1$ und ferner zu setzen

$$\Psi(x) = x^3(x+1) = x^4 + x^3$$

$$\Psi'(x) = 4\,x^3 + 3\,x^2,$$

folglich wird

$$1 = Q_0 \,.\, 2\,, \quad 0 = Q_0 \,.\, 7 + Q_1 \,.\, 2\,,$$

woraus man $Q_0 = \frac{1}{2}$, $Q_1 = -\frac{7}{4}$ findet. — Zur Bestimmung von R_0 endlich gehören die Substitutionen $r = -1$ und

$$\Psi(x) = x^3\,(x-1)^2;$$

die erste Gleichung in Nro. 7) giebt jetzt $1 = R_0\,(-4)$ oder $R_0 = -\frac{1}{4}$. Vermittelst dieser Werthe der Coefficienten hat man

$$\frac{1}{x^3\,(x-1)^2\,(x+1)}$$

$$= \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{1}{2\,(x-1)^2} - \frac{7}{4\,(x-1)} - \frac{1}{4\,(x+1)}$$

und durch Integration

$$\int \frac{dx}{x^3\,(x-1)^2\,(x+1)}$$

$$= -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + 2\,l\,x - \frac{1}{2\,(x-1)} - \tfrac{7}{4}\,l(x-1) - \tfrac{1}{4}\,l(x+1) + Const.$$

II. Das angegebene Verfahren bleibt der Hauptsache nach dasselbe, wenn die gleichen Wurzeln zum Theil imaginär sind; es werden in diesem Falle auch die Coefficienten P_0, P_1, ... Q_0, Q_1, ... imaginär; aber es lässt sich diese imaginäre Form dadurch vermeiden, dass man wie früher diejenigen Partialbrüche vereinigt, welche zu conjugirten Wurzeln gehören. Man erhält dadurch Ausdrücke von der Form

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots + Kx^k}{(a + bx + cx^2)^{n+1}},$$

deren Integration keinen Schwierigkeiten unterliegt (§. 51). Ein Beispiel wird hinreichen, um die Methode kennen zu lernen. Wenn es sich um die Entwickelung des Integrales

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+1)^2\,(x-1)}$$

handelt, so ist das Schema der Zerlegung, wenn $i = \sqrt{-1}$,

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2\,(x-1)} = \frac{x+1}{(x-i)^2\,(x+i)^2\,(x-1)}$$

$$= \frac{P_0}{(x-i)^2} + \frac{P_1}{x-i} + \frac{Q_0}{(x+i)^2} + \frac{Q_1}{x+i} + \frac{R_0}{x-1}.$$

Die Formeln 7) liefern nun zunächst, indem man P für R, i für r und $\Psi(x) = (x+i)^2\,(x-1)$ setzt, die Werthe

$$P_0 = \frac{i}{4}, \quad P_1 = -\frac{1-i}{4}.$$

Zur Auffindung von Q_0 und Q_1 ist keine neue Rechnung nöthig, denn es würde diese nur darin von der vorigen verschieden sein, dass überall $-i$ an der Stelle von i und Q für P stände; man hat daher unmittelbar

$$Q_0 = -\frac{i}{4}, \quad Q_1 = -\frac{1+i}{4}.$$

Die Substitution $r = 1$, $\Psi(x) = (x^2+1)^2$ giebt noch $R_0 = \frac{1}{2}$, und somit ist

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2\,(x-1)}$$
$$= \frac{i}{4}\left[\frac{1}{(x-i)^2} - \frac{1}{(x+i)^2}\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{1-i}{x-i} + \frac{1+i}{x+i}\right] + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}.$$

Durch Zusammenziehung der conjugirten Partialbrüche gelangt man zu der reellen Zerlegung:

$$\frac{x+1}{(x^2+1)^2\,(x-1)}$$
$$= -\frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1};$$

indem man endlich noch mit dx multiplizirt und integrirt, erhält man

$$\int \frac{x+1}{(x^2+1)^2\,(x-1)}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{4}\,l\,(x^2+1) - \frac{1}{2}\,\mathit{Arctan}\,x + \frac{1}{2}\,l\,(x-1) + \mathit{Const.}$$

Cap. XII.

Integration irrationaler algebraischer Differenziale.

§. 55.

Einfachste Fälle.

Unter den Fundamentalformeln des §. 48 befinden sich nur wenige, die zur Integration irrationaler Differenziale dienen können; bei genauerer Ansicht bemerkt man noch, dass die darin vorkommenden Wurzeln ausschliesslich Quadratwurzeln aus algebraischen Funktionen ersten oder zweiten Grades sind. Demnach haben wir uns zunächst auch mit derartigen Differenzialen zu beschäftigen.

Wenden wir auf das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

die schon in §. 50 gebrauchte Zerlegung

$$a+bx+cx^2 = \left(a-\frac{b^2}{4c}\right) + \left(x\sqrt{c}+\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)^2$$

an, und setzen zur Abkürzung

$$a-\frac{b^2}{4c} = \alpha^2,$$

ferner

$$x\sqrt{c}+\frac{b}{2\sqrt{c}} = y, \text{ also } dx = \frac{1}{\sqrt{c}}\,dy,$$

so erhalten wir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\int \frac{dy}{\sqrt{\alpha^2+y^2}}.$$

Durch Anwendung der vor Nro. 9) in §. 48 vorhergehenden Formel ergiebt sich weiter

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\,(y+\sqrt{\alpha^2+y^2}) + Const.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left(x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}} + \sqrt{a+bx+cx^2}\right) + Const.,$$

oder, wenn man sich die willkürliche Constante aus $\frac{1}{\sqrt{c}}\, l\,(2\sqrt{c})$ und einer neuen willkürlichen Constante zusammengesetzt denkt:

$$1)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\,(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}) + C.$$

Diese Formel wird direkt nicht mehr brauchbar, wenn c eine negative Zahl ist, also das zu entwickelnde Integral die Form

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}$$

besitzt. Für diesen Fall benutzt man die Zerlegung

$$a+bx-cx^2 = \left(a+\frac{b^2}{4c}\right) - \left(x\sqrt{c} - \frac{b}{2\sqrt{c}}\right)^2,$$

setzt analog dem Früheren

$$a+\frac{b^2}{4c} = \alpha^2, \quad x\sqrt{c} - \frac{b}{2\sqrt{c}} = y, \quad dx = \frac{1}{\sqrt{c}}\, dy$$

und hat dann

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dy}{\sqrt{\alpha^2-y^2}},$$

wo sich das Integral rechter Hand mittelst der vor Nro. 10) in §. 48 vorhergehenden Formel entwickeln lässt. Man erhält auf diese Weise

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, Arcsin\, \frac{y}{\alpha} + Const.,$$

oder vermöge der Werthe von α und y:

$$2)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, Arcsin\, \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}} + Const.$$

Wäre endlich $c = 0$, so würde man keine der Formeln 1) und 2), sondern die Fundamentalformel 2) in §. 48 für $\mu = -\frac{1}{2}$ in Anspruch nehmen.

Die soeben gewonnenen Resultate können wiederum als Ausgangspunkte für fernere Entwickelungen dienen, wenn man die in §. 51 unter 5), 6) und 7) entwickelten Reduktionsformeln damit in Verbindung bringt und berücksichtigt, dass die citirten Formeln die Umkehrungen zweier Differenzialgleichungen sind, die für beliebige m und n gelten. Setzen wir nämlich in der Formel

$$3)\qquad \int\frac{dx}{T^{n+1}} = \frac{b+2cx}{n\lambda T^n} + \frac{(2n-1)\,2c}{n\lambda}\int\frac{dx}{T^n}$$

$$[T = a + bx + cx^2,\quad \lambda = 4ac - b^2]$$

der Reihe nach $n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ etc., so gelangen wir zu folgenden Gleichungen:

$$4)\qquad \int\frac{dx}{T\sqrt{T}} = 2\,\frac{b+2cx}{\lambda\sqrt{T}},$$

$$5)\qquad \int\frac{dx}{T^2\sqrt{T}} = \frac{2}{3}\,\frac{b+2cx}{\lambda T\sqrt{T}} + \frac{8}{3\lambda}\int\frac{dx}{T\sqrt{T}}$$

u. s. w.,

aus denen hervorgeht, dass sich jedes Integral von der Form

$$\int\frac{dx}{T^k\sqrt{T}},$$

worin k eine positive ganze Zahl bezeichnet, vollständig entwickeln lässt und für $k > 0$ eine algebraische Funktion von x ist.

Kehrt man die Gleichung 3) um, drückt also das Integral rechter Hand durch das Integral linker Hand aus, so hat man weiter

$$6)\qquad \int\frac{dx}{T^n} = -\frac{b+2cx}{(2n-1)\,2cT^n} + \frac{n\lambda}{(2n-1)\,2c}\int\frac{dx}{T^{n+1}};$$

für $n = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$ etc. entspringen hieraus die Gleichungen

$$7)\qquad \int dx\sqrt{T} = \frac{b+2cx}{8c}\,T\sqrt{T} + \frac{\lambda}{8c}\int\frac{dx}{\sqrt{T}},$$

$$8)\qquad \int dx\,T\sqrt{T} = \frac{b+2cx}{4c}\quad\sqrt{T} + \frac{3\lambda}{16c}\int dx\sqrt{T}$$

u. s. w.,

durch deren wiederholte Anwendung sich jedes Integral von der Form

$$\int dx\; T^k\sqrt{T}$$

für ein ganzes positives k entwickeln lässt. — Ueberhaupt ist nach diesen Betrachtungen der Werth des Integrales

$$\int T^p\,dx = \int (a + bx + cx^2)^p\,dx$$

als bekannt anzusehen, wenn p unter die Form $\pm (k + \frac{1}{2})$ gehört.

Mittelst der Formeln 6) und 7) in §. 51 folgt hieraus unmittelbar, dass für jedes ganze positive m auch die Integrale

$$\int x^m T^p\,dx \text{ und } \int \frac{1}{x^m}\,T^p\,dx$$

entwickelt werden können, indem man $n + 1 = \pm (k + \frac{1}{2})$ setzt und im Uebrigen ganz so wie dort verfährt. So erhält man z. B. für $n = -\frac{1}{2}$:

$$9)\qquad \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{T}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{T}}{mc} - \frac{(2m-1)b}{2mc}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{T}} + \frac{(m-1)a}{mc}\int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{T}},$$

woraus die Werthe der Integrale

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{T}},\quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{T}},\quad \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{T}},\ \ldots$$

der Reihe nach leicht hergeleitet werden können.

§. 56.

Integration durch Wegschaffung des Wurzelzeichens.

Ein sehr brauchbares Verfahren zur Integration irrationaler Ausdrücke besteht in der Substitution einer neuen Variabeln von der Art, dass die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse zu einer vollständigen Potenz wird, aus welcher die Wurzel gezogen werden kann; das Integral erhält dadurch von selbst eine rationale Form und unterliegt dann den Methoden des vorigen Capitels. Man merke sich für den Gebrauch dieser Methode folgende Substitutionen:

1) $\sqrt{\alpha + \beta x}$ wird rational für $x = \dfrac{y^2 - \alpha}{\beta}$,

2) $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}$ „ „ „ $x = \dfrac{\alpha}{\beta}\,\dfrac{1 - y^2}{2y}$,

3) $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}$ „ „ „ $x = \dfrac{\alpha}{\beta}\,\dfrac{1 - y^2}{1 + y^2}$.

Das Detail der Rechnung wird man aus folgenden Beispielen ersehen.

I. Das zu entwickelnde Integral sei

4) $$J = \int \frac{1}{\varkappa + \lambda x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

so erhält man für

5) $$x = \frac{1-y}{2y},$$

woraus die Werthe

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{1+y^2}{2y}, \quad dx = -\frac{1+y^2}{2y^2}\,dy$$

folgen, für J die neue rationale Form:

$$J = -2\int \frac{dy}{\lambda + 2\varkappa y - \lambda y^2}$$

und nach Formel 6) in §. 50

$$J = \frac{1}{\sqrt{\varkappa^2+\lambda^2}}\; l\left(\frac{\varkappa - \lambda y + \sqrt{\varkappa^2+\lambda^2}}{\varkappa - \lambda y - \sqrt{\varkappa^2+\lambda^2}}\right) + Const.$$

Aus Nro. 5) ergiebt sich umgekehrt $y = -x + \sqrt{1+x^2}$ und zwar nehmen wir die positive Wurzel, weil in Nro. 4) der Ausdruck $\sqrt{1+x^2}$ als positiv angesehen wurde und mithin der gleichgeltende Bruch $\frac{1+y^2}{2y}$ ebenfalls positiv sein muss, wozu offenbar ein positives y gehört. Nach Substitution dieses Werthes und vermöge der ursprünglichen Bedeutung von J folgt nun die Integralformel:

6) $$\int \frac{1}{\varkappa + \lambda x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\varkappa^2+\lambda^2}}\; l\left(\frac{\varkappa + \lambda x - \lambda\sqrt{1+x^2} + \sqrt{\varkappa^2+\lambda^2}}{\varkappa + \lambda x - \lambda\sqrt{1+x^2} - \sqrt{\varkappa^2+\lambda^2}}\right) + Const.$$

II. Zur Entwickelung des Integrales

7) $$J = \int \frac{1}{\varkappa + \lambda x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

bedienen wir uns der Substitutionen

8) $$x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{2y}{1+y^2}, \quad dx = -\frac{4y\,dy}{(1+y^2)^2}$$

und erhalten mittelst derselben

$$J \quad -2\int \frac{dy}{\varkappa + \lambda + (\varkappa - \lambda)\,y^2}$$

Hier sind die Fälle $\varkappa < \lambda$, $\varkappa = \lambda$ und $\varkappa > \lambda$ zu unterscheiden; im ersten Falle wird nach Nro. 7) in §. 48

$$J = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\, l\left(\frac{\sqrt{\lambda+\varkappa}+y\sqrt{\lambda-\varkappa}}{\sqrt{\lambda+\varkappa}-y\sqrt{\lambda-\varkappa}}\right) + Const.,$$

und wenn man die ursprüngliche Bedeutung von J, sowie den Werth von y aus Nro. 8) einsetzt:

10) $$\int \frac{1}{\varkappa+\lambda x}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\, l\left(\frac{\sqrt{\lambda+\varkappa}\,\sqrt{1+x}+\sqrt{\lambda-\varkappa}\,\sqrt{1-x}}{\sqrt{\lambda+\varkappa}\,\sqrt{1+x}-\sqrt{\lambda-\varkappa}\,\sqrt{1-x}}\right) + Const.$$

Für $\lambda = \varkappa$ giebt die Formel 9) unmittelbar

$$J = -\frac{1}{\varkappa}\, y + Const.$$

oder mittelst der vorigen Substitutionen und nach Hebung von $\varkappa$:

11) $$\int \frac{1}{1+x}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + Const.$$

Für $\varkappa > \lambda$ lässt sich die Integration in Nro. 9) mittelst der Formel 6) in §. 48 ausführen und es ist dann

$$J = -\frac{2}{\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}}\, Arctan\left(\frac{y\sqrt{\varkappa-\lambda}}{\sqrt{\varkappa+\lambda}}\right) + Const.$$

oder vermöge der Werthe von J und y

12) $$\int \frac{1}{\varkappa+\lambda x}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}}\, Arctan\left(\frac{\sqrt{\varkappa-\lambda}\;\sqrt{1-x}}{\sqrt{\varkappa+\lambda}\;\sqrt{1+x}}\right) + Const.$$

III. Eine allgemeinere Integration ist noch folgende. Es bezeichne $F(z)$ eine rationale algebraische Funktion von z, so kann das Integral

$$\int F\left(\sqrt{a+bx+cx^2}\right) dx$$

bei wesentlich positivem c dadurch ermittelt werden, dass man

13) $$x = \frac{1}{2c}\left\{\sqrt{4ac-b^2}\;\frac{1-y^2}{2y} - b\right\}$$

setzt; denn man erhält mittelst dieser Substitution

14) $$\int F\left(\sqrt{a+bx+cx^2}\right) dx$$

$$= -\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{4c}\int F\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2\sqrt{c}}\;\frac{1+y^2}{2y}\right)\frac{1+y^2}{y^2}\,dy.$$

Hier ist das Integral rechter Hand nach den Lehren des vorigen Capitels entwickelbar und man hat am Ende nur noch den Werth von y aus Nro. 13) einzusetzen.

Handelt es sich dagegen um die Integration

$$\int F\left(\sqrt{a+bx-cx^2}\right) dx,$$

so setze man

15 $$x = \frac{1}{2c}\left\{\sqrt{4ac+b^2}\,\frac{1-y^2}{1+y^2}+b\right\}$$

und es ergiebt sich

16) $$\int F\left(\sqrt{a+bx-cx^2}\right) dx$$
$$= -\frac{2\sqrt{4ac+b^2}}{c}\int F\left(\frac{\sqrt{4ac+b^2}}{2\sqrt{c}}\,\frac{2y^2}{1+y^2}\right)\frac{y\,dy}{(1+y^2)^2},$$

wo man wiederum die Integration ausführen und den Werth von y der Gleichung 15) entnehmen kann. Auf diese Weise hätten sich auch die Formeln 1) und 2) des vorigen Paragraphen entwickeln lassen

§. 57.

Integration binomischer Differenziale.

Unter dem Namen der binomischen Differenziale versteht man Ausdrücke von der Form

$$x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\,dx,$$

worin m, n, p und q ganze positive Zahlen bezeichnen. Die Integration solcher Differenziale kann auf zweierlei Weise geschehen, entweder durch Wegschaffung des Wurzelzeichens, oder durch Reduktion auf ähnliche und einfachere Integrationen.

I. Setzt man erstlich

1) $$x = \left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ mithin } dx = \frac{q}{nb}z^{q-1}\left(\frac{z^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dz,$$

so gelangt man zu der Gleichung

2) $$\int x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\,dx$$
$$= \frac{q}{nb^{\frac{m}{n}}}\int (z^q-a)^{\frac{m}{n}-1} z^{p+q-1}\,dz$$

und hier ist rechter Hand ein rationales Differenzial vorhanden, sobald $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ausmacht. So z. B. hat man nach den obigen Formeln

$$\int x^5 (1-x^2)^{\frac{2}{7}}\, dx = -\frac{7}{2}\int (z^7-1)^2 z^8\, dz,$$

wo die Intégration in Beziehung auf z durch Entwickelung von $(z^7-1)^2$ ausgeführt werden kann, und am Schlusse derselben der Werth von z aus der Gleichung

$$x = \left(\frac{z^7-1}{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = (1-z^7)^{\frac{1}{2}}$$

zu nehmen, also

$$z = (1-x^2)^{\frac{1}{7}}$$

einzusetzen sein würde.

Eine zweite Substitution, welche ebenfalls zu einer rationalen Form führen kann, ist

$$3)\qquad x = \left(\frac{a}{z^q-b}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ also } dx = -\frac{qa^{\frac{1}{n}}}{n}\,\frac{z^{q-1}\,dz}{(z^q-b)^{\frac{1}{n}+1}};$$

man erhält durch dieselbe:

$$4)\int x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\, dx = -\frac{qa^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}}{n}\int\frac{z^{p+q-1}\,dz}{(z^q-b)^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+1}}$$

und hier wird das Differenzial rechter Hand rational, wenn $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl ist. So hat man beispielsweise

$$\int x\,(1+x^3)^{\frac{1}{3}}\, dx = -\int\frac{z^3\,dz}{(z^3-1)^2}$$

und darin

$$x = \left(\frac{1}{z^3-1}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ oder } z = \frac{(1+x^3)^{\frac{1}{3}}}{x},$$

nach welchen Angaben die Rechnung keinen weiteren Schwierigkeiten unterliegt.

II. Ist weder $\frac{m}{n}$ noch $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl, so lässt sich das binomische Differenzial im Allgemeinen nicht rational machen;

man benutzt dann die nachstehend entwickelten Reduktionsformeln, die übrigens allgemein für beliebige m und n gelten.

Bezeichnen wir $\frac{p}{q}$ kurz mit s und $a + bx^n$ mit X, so giebt die partielle Integration:

$$\int x^{m-1} X^s \, dx = X^s \int x^{m-1} \, dx - s \int X^{s-1} \, dX \int x^{m-1} \, dx$$
$$= X^s \frac{x^m}{m} - s \int X^{s-1} \, dX \frac{x^m}{m},$$

und weil $dX = bnx^{n-1} dx$ ist:

5) $$\int x^{m-1} X^s \, dx = \frac{x^m X^s}{m} - \frac{bns}{m} \int x^{m+n-1} X^{s-1} \, dx.$$

Dieser Formel wird man sich bedienen, wenn eine Vermehrung von m und eine gleichzeitige Verminderung von s wünschenswerth ist.

Durch Umkehrung der Formel 5) hat man noch

$$\int x^{m+n-1} X^{s-1} \, dx = \frac{x^m X^s}{bns} - \frac{m}{bns} \int x^{m-1} X^s \, dx$$

oder, wenn $m - n$ für m und $s + 1$ für s gesetzt wird,

6) $$\int x^{m-1} X^s \, dx = \frac{x^{m-n} X^{s+1}}{bn(s+1)} - \frac{m-n}{bn(s+1)} \int x^{m-n-1} X^{s+1} \, dx;$$

mittelst dieser Formel verkleinert man m und vergrössert gleichzeitig s.

Wenn man ferner die rechte Seite der identischen Gleichung

$$\int x^{m-1} X^s \, dx = \int x^{m-1} (a + bx^n) X^{s-1} \, dx$$
$$= a \int x^{m-1} X^{s-1} \, dx + b \int x^{m+n-1} X^{s-1} \, dx$$

mit der rechten Seite der Gleichung 5) zusammenhält, so ist zunächst

$$\frac{x^m X^s}{m} - \frac{bns}{m} \int x^{m+n-1} X^{s-1} \, dx$$
$$= a \int x^{m-1} X^{s-1} \, dx + b \int x^{m+n-1} X^{s-1} \, dx,$$

in dieser Gleichung schreiben wir $s + 1$ für s und sehen das erste Integral rechter Hand als Unbekannte an; es wird so:

7) $$\int x^{m-1} X^s \, dx = \frac{x^m X^{s+1}}{am} - \frac{b(m + ns + n)}{am} \int x^{m+n-1} X^s dx;$$

diese Reduktionsformel vergrössert m ohne s zu ändern. Drückt man das Integral rechter Hand durch die übrigen Grössen aus und schreibt nachher $m - n$ für m, so ist:

$$8)\int x^{m-1} X^s\,dx = \frac{x^{m-n} X^{s+1}}{b(m+ns)} - \frac{a(m-n)}{b(m+ns)}\int x^{m-n-1} X^s\,dx,$$

womit eine Verkleinerung von m ohne Aenderung von s herbeigeführt wird.

Gehen wir wiederum von der identischen Gleichung aus:

$$\int x^{m-1} X^s\,dx = a\int x^{m-1} X^{s-1}\,dx + b\int x^{m+n-1} X^{s-1}\,dx,$$

so giebt die Anwendung der Formel 6) auf das Integral rechter Hand:

$$\int x^{m-1} X^s\,dx$$

$$= a\int x^{m-1} X^{s-1}\,dx + b\left[\frac{x^m X^s}{bns} - \frac{m}{bns}\int x^{m-1} X^s\,dx\right].$$

Durch Vereinigung der gleichartigen Grössen folgt hieraus

$$9)\int x^{m-1} X^s\,dx = \frac{x^m X^s}{m+ns} + \frac{ans}{m+ns}\int x^{m-1} X^{s-1}\,dx,$$

welche Formel zur Verkleinerung von s ohne Aenderung von m dient. — Schreibt man noch $s+1$ für s und reduzirt die Gleichung 9) auf das Integral rechter Hand, so ergiebt sich

$$10)\int x^{m-1} X^s\,dx = -\frac{x^m X^{s+1}}{an(s+1)} + \frac{m+n+ns}{an(s+1)}\int x^{m-1} X^{s+1}\,dx,$$

und hiermit ist die Möglichkeit geboten, s ohne Störung des m zu vergrössern.

Es versteht sich von selbst, dass man von diesen sechs Reduktionsformeln die benutzen wird, welche im gegebenen speziellen Falle am raschesten auf ein bereits bekanntes Integral führt. Wäre z. B. das zu entwickelnde Integral

$$\int\frac{x^k\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \int x^{k-\frac{1}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx,$$

und darin k eine ganze positive Zahl, so liegt es am nächsten, durch successive Verkleinerung von k auf das Integral

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = Arcsin\,\frac{2x-a}{a} + Const.$$

zurückzugehen; in diesem Falle ist also die Anwendung der Formel 8) indicirt und man erhält dadurch

$$\int\frac{x^k\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -\frac{x^{k-1}\sqrt{ax-x^2}}{k} + \frac{a(2k-1)}{2k}\int\frac{x^{k-1}\,dx}{\sqrt{ax-x^2}},$$

wie man auch aus der Formel 9) in §. 55 finden kann. Aehnlicher Ueberlegungen bedarf es in jedem anderen Falle.

Zu bemerken ist noch, dass die obigen Reduktionsformeln für $m - n = 0$, sowie für $m + ns = 0$ nicht in Anspruch genommen werden dürfen, wie ein Rückblick auf ihre Herleitung leicht erkennen lässt. In diesen beiden Fällen können aber (nach I.) die Differenzialformeln rational gemacht werden und bedürfen der genannten Reduktionsformeln nicht.

§. 58.

Integration durch unendliche Reihen.

Wenn das zu integrirende Differenzial keiner von den bisher betrachteten Formen angehört, so bildet das Integral derselben eine Funktion von x, die weder algebraisch, noch durch Logarithmen oder Kreisbögen dargestellt werden kann. In diesem Falle muss man zur näherungsweisen Berechnung des Integrales schreiten, die darin besteht, dass man den unter dem Integralzeichen stehenden Faktor von x in eine unendliche Reihe verwandelt und deren einzelne Glieder integrirt. Setzen wir nämlich zufolge des Theoremes von Mac Laurin

$$f(x) - R_n = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{1.2} x^2 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{1.2.3\ldots(n-1)} x^{n-1},$$

wo R_n den Rest der Reihe bezeichnet, so ist

$$\int f(x)\,dx - \int R_n\,dx = Const. + f(0)\frac{x}{1} + \frac{f'(0)}{1}\frac{x^2}{2}$$
$$+ \frac{f''(0)}{1.2}\frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{1.2\ldots(n-1)}\frac{x^n}{n}.$$

Vorausgesetzt nun, dass für unendlich wachsende n der Rest R_n die Null zur Grenze hat, so wird auch $Lim \int R_n\,dx = 0$, und die vorigen Gleichungen gehen in die folgenden über:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{1.2} x^2 + \ldots\ldots$$

$$\int f(x)\,dx = Const. + \frac{f(0)}{1} x + \frac{f'(0)}{1.2} x^2 + \frac{f''(0)}{1.2.3} x^3 + \ldots\ldots,$$

wobei man noch bemerken kann, dass die zweite Reihe stärker als die erste convergirt.

Nach diesem Verfahren hat man z. B. für $x < 1$

$$1)\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}=\int\left[1+\frac{1}{2}x^3+\frac{1.3}{2.4}x^6+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^9+\ldots.\right]dx$$

$$=Const.+\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^4}{4}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^7}{7}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^{10}}{10}+\ldots..$$

Nicht immer bietet sich die Reihenentwickelung so von selbst dar, wie in dem vorstehenden Beispiele; im Gegentheil bedarf es häufig erst einiger Umwandlungen ehe man zu einer Reihe gelangt. Um z. B. das Integral

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-(\alpha^2+\beta^2)x^2+\alpha^2\beta^2x^4}}\,dx$$

zu entwickeln, kann man bemerken, dass dasselbe unter der Form

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2x^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2x^2}}\,dx$$

darstellbar ist, deren einzelne Faktoren leicht zu verwandeln sind. Unter den Voraussetzungen $\alpha x<1$ und $\beta x<1$ hat man nämlich

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2x^2}}=1+\tfrac{1}{2}\alpha^2x^2+\frac{1.3}{2.4}\alpha^4x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^6x^6+\ldots..,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2x^2}}=1+\tfrac{1}{2}\beta^2x^2+\frac{1.3}{2.4}\beta^4x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}\beta^6x^6+\ldots...$$

Durch Multiplikation ergiebt sich hieraus ein Resultat von der Form

$$2)\qquad\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2x^2)(1-\beta^2x^2)}}=1+C_2x^2+C_4x^4+C_6x^6+\ldots..,$$

worin zur Abkürzung gesetzt wurde

$$3)\qquad\begin{cases}C_2=\tfrac{1}{2}\alpha^2+\tfrac{1}{2}\beta^2\\ C_4=\dfrac{1.3}{2.4}\alpha^4+\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}\alpha^2\beta^2+\dfrac{1.3}{2.4}\beta^4\end{cases}$$

u. s. w.

Die Integration giebt nunmehr unter den genannten Voraussetzungen:

$$4)\int\frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha^2x^2)(1-\beta^2x^2)}}=\frac{x}{1}+\frac{C_2x^3}{3}+\frac{C_4x^5}{5}+\ldots.+Const.$$

$$1>\alpha x>-1;\quad 1>\beta x>-1.$$

Dasselbe Verfahren wird man in allen den Fällen benutzen, wo das zu integrirende Differenzial aus Faktoren besteht, die einzeln genommen in Reihen verwandelbar sind.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Integration

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+ax+bx^3}}\,dx.$$

Unter Benutzung des bekannten Satzes

$$\frac{1}{\sqrt{1+z}}=1-\tfrac{1}{2}z+\frac{1.3}{2.4}z^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}z^3+\ldots..$$

$$1>z>-1$$

ergiebt sich zunächst unter der Voraussetzung, dass $ax+bx^3 = x(a+bx^2)$ ein echter Bruch ist:

$$\frac{1}{\sqrt{1+ax+bx^3}}=1-\tfrac{1}{2}x(a+bx^2)+\frac{1.3}{2.4}x^2(a+bx^2)^2-\ldots..$$

Hier kann man die einzelnen Reihenglieder nach Potenzen von x entwickeln und darauf integriren; man erhält

5) $$\int\frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^3}}$$
$$=Const.+\frac{x}{1}-\tfrac{1}{2}a\frac{x^2}{2}-\frac{1.3}{2.4}a^2\frac{x^3}{3}$$
$$-\left(\tfrac{1}{2}b+\frac{1.3.5}{2.4.6}a^3\right)\frac{x^4}{4}+\ldots..,$$

wobei jedoch $1>x(a+bx^2)>-1$ sein muss.

Nicht immer glückt es, die unter dem Integralzeichen stehende Funktion von x in eine nach Potenzen von x selbst fortschreitende Reihe zu verwandeln, weil bekanntlich das Theorem von Mac Laurin nicht auf alle Funktionen anwendbar ist; in solchen Fällen muss man versuchen, die gegebene Funktion in eine Reihe umzusetzen, die nach Potenzen einer anderen Funktion fortschreitet, wobei man darauf zu sehen hat, dass die einzelnen Glieder dieser Reihe wiederum integrirbar sind. Die folgenden zwei Beispiele werden dies deutlich machen.

Unter der Voraussetzung eines echtgebrochenen x würde es sehr leicht sein, den Werth des Integrales

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx$$

in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu verwandeln; ist aber der absolute Werth von $x>1$, so wird jene Entwickelung unrichtig und lässt sich durch die folgende ersetzen:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}=\int\frac{1}{x\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}dx$$

$$=\int\frac{1}{x\sqrt{x}}\left\{1-\tfrac{1}{2}\frac{1}{x^3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{x^6}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{x^9}+\ldots..\right\}dx$$

und diese hat in unserem Falle Gültigkeit, weil für $x>1$ der umgekehrte Werth $\frac{1}{x} < 1$, also um so mehr $\frac{1}{x^3} < 1$ ist. Die Integration giebt jetzt:

6) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

$$= Const. - \frac{2}{\sqrt{x}} \left\{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{7x^3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{13x^6} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{19x^9} + \ldots\right\}.$$

Auf ähnliche Weise wie das Integral in Nro. 5) würde sich auch das folgende

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2\varkappa x^2+x^4}}$$

in eine Reihe entwickeln lassen, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass $2\varkappa x^2 + x^4$ ein echter Bruch ist; bei einigermaassen grossen x kann aber dieser Bedingung nicht genügt werden, und man benutzt dann eine Transformation, welche auf der identischen Gleichung

$$1+2\varkappa x^2+x^4 = (1+x^2)^2 \left\{1 + \frac{2(\varkappa-1)}{(1+x^2)^2}\right\}$$

beruht. Sobald nun $(1 + x^2)^2$ mehr als der absolute Werth von $2(\varkappa - 1)$ beträgt, tritt folgende Entwickelung ein:

7) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2\varkappa x^2+x^4}} = \int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2(\varkappa-1)}{(1+x^2)^2}}} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \int \left\{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1}\frac{\varkappa-1}{(1+x^2)^3} + \frac{1.3}{1.2}\frac{(\varkappa-1)^2}{(1+x^2)^5} - \ldots\ldots\right\} dx,$$

deren einzelne Glieder leicht integrirt werden können; die entstehende Reihe würde namentlich dann von Vortheil sein, wenn $\varkappa$ nahe an 1 liegt und x eine grosse Zahl ist.

Es versteht sich von selbst, dass man die Integration mittelst unendlicher Reihen auch in den Fällen anwenden könnte, wo man bereits auf anderem Wege die Werthe der Integrale in geschlossener Form entwickelt hat; die nach diesen zwei Methoden abgeleiteten Werthe eines und desselben Integrales können nur um eine Constante differiren und lassen daher eine Vergleichung zu, welche jederzeit auf ein zur Theorie der Reihen gehörendes Resultat führt. So hat man z. B. einerseits

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = l(1+x) + C_1;$$

andererseits ist der Werth desselben Integrales:

$$\int (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots\ldots) dx$$
$$= \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots\ldots + C_2,$$

jedoch nur unter der Voraussetzung eines echtgebrochenen x, weil ausserdem die für $1 : (1 + x)$ gesetzte Reihe diesem Bruche nicht gleich wäre. Die Vergleichung beider Resultate giebt

$$l(1+x) + Const. = \tfrac{1}{1}x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots\ldots$$
$$1 > x > -1.$$

Der Werth von *Const.* bestimmt sich durch die Spezialisirung $x = 0$; man findet $Const. = 0$ und kommt somit auf ein bekanntes Resultat zurück. — Nach demselben Verfahren würde man die Reihe für *Arctan* x aus der Gleichung

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots) dx$$
$$1 > x > -1$$

ableiten können, ebenso die Reihe für *Arcsin* x aus

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \left\{1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 + \ldots\ldots\right\} dx$$
$$1 > x > -1.$$

Ein weniger bekanntes Resultat ergiebt sich aus der für $1 > x > -1$ geltenden Gleichung

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \left\{1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 - \ldots\ldots\right\} dx,$$

nämlich

$$l(x + \sqrt{1+x^2}) + Const. = \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \ldots\ldots$$

Für $x = 0$ erhält man $Const. = 0$; mithin:

8) $$l(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \ldots\ldots$$

Man findet dieselbe Gleichung auch dadurch, dass man in der Reihe für *Arcsin* x den Ausdruck $x\sqrt{-1}$ an die Stelle von x treten lässt und die Formel 7) in §. 45 (S. 172) benutzt.

Cap. XIII.

Integration transcendenter Differenziale.

§. 59.

Differenziale mit Exponenzialgrössen.

Enthält die zu integrirende Funktion nur Exponenzialgrössen, ist also das Integral von der Form

$$\int f\,(e^{ax})\,dx,$$

so kann es mittelst der Substitution

1) $$e^{ax}=z,\ \text{mithin}\ x=\frac{lz}{a},\ dx=\frac{1}{a}\,\frac{dz}{z}$$

auf ein anderes zurückgeführt werden, worin keine Exponenzialgrösse vorkommt; denn man hat jetzt

2) $$\int f(e^{ax})\,dx=\frac{1}{a}\int f(z)\,\frac{dz}{z},$$

also z. B.

3) $$\int\frac{1}{e^{ax}+e^{-ax}}\,dx=\frac{1}{a}\int\frac{1}{z+\frac{1}{z}}\,\frac{dz}{z}=\frac{1}{a}\int\frac{dz}{z^2+1}$$

$$=\frac{1}{a}\,Arctan\ z+Const.=\frac{1}{a}\,Arctan\,(e^{ax})+Const.;$$

als zweites Beispiel betrachten wir die Gleichung:

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+e^{ax}}}\,dx=\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{1+z}}\,\frac{dz}{z}$$

für $1+z=u^2$, woraus $\sqrt{1+z}=u$, $z=u^2-1$ und $dz=2u\,du$ folgen, verwandelt sich dieses Integral in das folgende

$$\frac{2}{a}\int\frac{du}{u^2-1}=\frac{1}{a}\,l\left(\frac{u-1}{u+1}\right)+Const.,$$

mithin ist durch Restitution der Werthe von u und z

4) $$\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{ax}}}=\frac{1}{a}\,l\left(\frac{\sqrt{1+e^{ax}}-1}{\sqrt{1+e^{ax}}+1}\right)+Const.$$

Betrachten wir nun den Fall, wo das Differenzial Exponenzialgrössen und Potenzen enthält. Die einfachste Form eines solchen Integrales ist,

$$\int x^m e^{ax} dx,$$

und es liegt nahe, die Regel der partiellen Integration

$$\int u v dx = u\int v dx - \int du\int v dx$$

darauf anzuwenden, indem man von der Fundamentalformel

5) $$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}+Const.$$

Gebrauch macht. Man findet so

6) $$\int x^m e^{ax} dx = \frac{x^m e^{ax}}{a}-\frac{m}{a}\int x^{m-1} e^{ax} dx.$$

Ist nun m eine ganze positive Zahl, so kann man durch wiederholte Anwendung dieser Formel, den Exponenten von x fortwährend verkleinernd, zuletzt auf das Integral 5) zurückkommen; in der That erhalt man unter der gemachten Voraussetzung:

7) $$\int x^m e^{ax} dx$$

$$=\left[\frac{x^m}{a}-\frac{mx^{m-1}}{a^2}+\frac{m(m-1)x^{m-2}}{a^3}-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^m\frac{m(m-1)..2.1}{a^{m+1}}\right]e^{ax}+Const.$$

Zu derselben Gleichung würde man auch dadurch gelangen, dass man die Fundamentalformel 5) $m$mal in Beziehung auf a differenzirte. Aus Nro. 7) erhellt die Möglichkeit, das Integral

$$\int\varphi(x)\, e^{ax} dx$$

entwickeln zu können, wenn $\varphi(x)$ unter der Form $A+Bx+Cx^2+etc.$ enthalten ist.

Lässt man in der Gleichung 6) $-m+1$ an die Stelle von m treten und reduzirt auf das Integral rechter Hand, so kommt die Reduktionsformel:

$$8) \int \frac{1}{x^m} e^{ax}\, dx = -\frac{e^{ax}}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{a}{m-1} \int \frac{1}{x^{m-1}} e^{ax}\, dx$$

zum Vorschein, welche für ganze m mit Ausnahme von $m = 1$ benutzt werden kann. Im letzteren Falle giebt die Formel ein unbrauchbares Resultat und es bleibt dann nichts übrig als eine Reihenverwandlung vorzunehmen; vermöge der für alle x geltenden Gleichung

$$\frac{e^{ax}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{a}{1} + \frac{a^2 x}{1.2} + \frac{a^3 x^2}{1.2.3} + \ldots.$$

erhält man

$$(9 \quad \int \frac{1}{x} e^{ax}\, dx = Const. + lx$$
$$+ \tfrac{1}{1} \frac{ax}{1} + \tfrac{1}{2} \frac{(ax)^2}{1.2} + \tfrac{1}{3} \frac{(ax)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

und nunmehr lassen sich aus der Formel 8) für $m = 2, 3, \ldots$ die Werthe der Integrale

$$\int \frac{1}{x^2} e^{ax}\, dx, \quad \int \frac{1}{x^3} e^{ax}\, dx, \ldots.$$

der Reihe nach ableiten. Eine weitere Folgerung hiervon ist, dass das Integral

$$\int \psi(x)\, e^{ax}\, dx, \text{ worin } \psi(x) = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \ldots.$$

jederzeit auf das in Nro. 9) entwickelte Integral zurückgeführt werden kann.

Ist der Exponent von x ein Bruch, so kann man ihn zwar verkleinern, indem man die Formeln 6) oder 8) anwendet, je nachdem er positiv oder negativ ist; aber man wird zuletzt immer wieder zu einer Reihenentwickelung genöthigt. Desselben Mittels muss man sich in allen übrigen Fällen bedienen, wo Integrale von anderen als den hier betrachteten Formen vorkommen. Ein Beispiel wird genügen, um dies zu zeigen.

Das gegebene Integral sei

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^x\, dx,$$

so kann man für den Fall eines echtgebrochenen x die Umwandlung

$$\int \left\{ 1 - \tfrac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6} x^6 + \ldots \right\} e^x\, dx$$

vornehmen und die einzelnen Glieder mittelst der Formel 7) integriren; wäre aber $x > 1$, so wird man $x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ für $\sqrt{1+x^2}$ setzen und dem Integrale die Form:

$$\int \frac{1}{x}\left[1-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{x^4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{x^6}+\ldots\right]e^x\,dx,$$

geben, wo die Formeln 9) und 8) anwendbar sind.

§. 60.

Logarithmische Differenziale.

Enthält das zu integrirende Differenzial nur Logarithmen in der Weise, dass

$$\int f(lx)\,dx$$

das fragliche Integral ist, so leistet die Substitution

1) $$lx = y,\ \text{also } x = e^y,\ dx = e^y\,dy$$

gute Dienste; man erhält nämlich

2) $$\int f(lx)\,dx = \int f(y)\,e^y\,dy,$$

wo nun die Entwickelungen des vorigen Paragraphen benutzt werden können. So hat man z. B. für ein ganzes positives m

$$\int (lx)^m\,dx = \int y^m e^y\,dy$$

$$=\left[y^m - my^{m-1}+m(m-1)y^{m-2}-\ldots+(-1)^m m(m-1..2.1\right]e^y,$$

und indem man den Werth von y wieder einsetzt:

3) $$\int (lx)^m\,dx = \Big[(lx)^m - m(lx)^{m-1}+m(m-1)(lx)^{m-2}-\ldots$$
$$\ldots\ldots+(-1)^m m(m-1)\ldots 2.1\Big]x + Const.$$

Auf gleiche Weise erhält man mittelst der Formel 9) des vorigen Paragraphen:

4) $$\int\frac{dx}{lx} = Const. + l(lx)$$
$$+\frac{1}{1}\frac{lx}{1}+\frac{1}{2}\frac{(lx)^2}{1.2}+\frac{1}{3}\frac{(lx)^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

und aus der Formel 8):

5) $$\int\frac{dx}{(lx)^m} = -\frac{x}{(m-1)(lx)^{m-1}}+\frac{1}{m-1}\int\frac{dx}{(lx)^{m-1}}.$$

Die unter Nro. 1) angegebene Substitution ist auch bei dem allgemeineren Integrale

$$\int x^{\mu} f(lx)\,dx$$

vortheilhaft anwendbar, sie giebt nämlich

6) $$\int x^{\mu} f(lx)\,dx = \int e^{(\mu+1)y} f(y)\,dy.$$

So ist z. B. für den speziellen Fall $\mu = -1$, $f(lx) = (lx)^m$:

7) $$\int \frac{1}{x}(lx)^m\,dx = \int y^m\,dy = \frac{y^{m+1}}{m+1} + Const.$$
$$= \frac{(lx)^{m+1}}{m+1} + Const. \left(m \gtrless -1\right),$$

und in dem Ausnahmefalle $m = -1$:

8) $$\int \frac{1}{x\,lx}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy = ly + Const.$$
$$= l(lx) + Const.$$

Für ein von -1 verschiedenes μ und ein ganzes positives m giebt die Gleichung 6) zunächst:

$$\int x^{\mu}(lx)^m\,dx = \int e^{(\mu+1)y} y^m\,dy,$$

nachher durch Anwendung der Formel 7) des vorigen Paragraphen und durch Wiedereinsetzung des Werthes von y:

9) $$\int x^{\mu}(lx)^m\,dx = \left[\frac{(lx)^m}{\mu+1} - \frac{m(lx)^{m-1}}{(\mu+1)^2} + \frac{m(m-1)(lx)^{m-2}}{(\mu+1)^3} - \dots \right.$$
$$\left. \dots + (-1)^m \frac{m(m-1)\dots 2.1}{(\mu+1)^{m+1}}\right] x^{\mu+1} + Const.$$

In allen übrigen Fällen müssen die Integrationen logarithmischer Differenziale durch Reihenentwickelungen ausgeführt werden.

§. 61.

Goniometrische Differenziale.

Differenziale, in denen nur goniometrische Funktionen vorkommen, lassen sich leicht in algebraische Differenziale umwandeln; setzt man nämlich

1) $$\sin x = z, \text{ mithin } \cos x = \sqrt{1-z^2},\ dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

so hat man auf der Stelle, wenn $f(\sin x, \cos x)$ eine nur aus $\sin x$ und $\cos x$ gebildete Funktion bezeichnet:

2) $$\int f(\sin x, \cos x)\,dx = \int f(z, \sqrt{1-z^2})\,\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Nach dieser Formel ist z. B.

$$\int \sin^p x \cos^q x \, dx = \int z^p (1-z^2)^{\frac{1}{2}(q-1)} dz.$$

Auf das Integral rechter Hand sind die sechs Reduktionsformeln des §. 57 anwendbar, indem man $a=1$, $b=-1$, $m=p+1$, $n=2$, $s=\frac{1}{2}(q-1)$ setzt, z an die Stelle des dortigen x und $1-z^2$ an die von X treten lässt; führt man nachher die Werthe von z und dz aus Nro. 1) wieder ein, so gelangt man zu folgenden sechs Reduktionsformeln:

3)
$$\int \sin^p x \cos^q dx$$
$$= \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+1} + \frac{q-1}{p+1} \int \sin^{p+2} x \cos^{q-2} x \, dx$$
$$= -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{q+1} + \frac{p-1}{q+1} \int \sin^{p-2} x \cos^{q+2} x \, dx$$
$$= \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q+1} x}{p+1} + \frac{p+q+2}{p+1} \int \sin^{p+2} x \cos^q x \, dx$$
$$= -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{p+q} + \frac{p-1}{p+q} \int \sin^{p-2} x \cos^q x \, dx$$
$$= \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+q} + \frac{q-1}{p+q} \int \sin^p x \cos^{q-2} x \, dx$$
$$= -\frac{\sin^{p+1} x \cos^{q+1} x}{q+1} + \frac{p+q+2}{q+1} \int \sin^p x \cos^{q+2} x \, dx.$$

Mittelst dieser Formeln bringt man das ursprüngliche Integral auf ein anderes derselben Art zurück, worin p oder q, oder beide neue um 2 grössere oder kleinere Werthe besitzen; die fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens führt zuletzt auf ein Integral, in welchem die Exponenten von $\sin x$ und $\cos x$ nicht ausserhalb der Zahlen -1 bis $+1$ liegen; sind nun p und q positive oder negative ganze Zahlen, so muss man schliesslich auf eines der folgenden Integrale kommen:

$$\int dx = x + C, \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C,$$
$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x \cos x \, dx = \tfrac{1}{2}\sin^2 x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sin x} = l \tan \frac{x}{2} + C, \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = l \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C,$$
$$\int \tan x \, dx = -l \cos x + C, \qquad \int \cot x \, dx = l \sin x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = l \tan x + C,$$

welche sämmtlich mittelst der Substitution in Nro. 1) leicht entwickelbar sind. Nach diesen Angaben wird man sich ohne Mühe von der Richtigkeit der folgenden Formeln überzeugen, die wir ihres öfteren Gebrauches wegen hier zusammenstellen:

Für gerade positive p ist:

4) $$\int sin^p x\, dx$$

$$= -\frac{cos x}{p}\left\{sin^{p-1} x + \frac{p-1}{p-2} sin^{p-3} x + \frac{(p-1)(p-3)}{(p-2)(p-4)} sin^{p-5} x + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{(p-1)(p-3)\ldots 3}{(p-2)(p-4)\ldots 2} sin x\right\} + \frac{(p-1)(p-3)\ldots 3.1}{p(p-2)(p-4)\ldots 4.2} x + C.$$

Dagegen für ungerade p:

5) $$\int sin^p x\, dx$$

$$= -\frac{cos x}{p}\left\{sin^{p-1} x + \frac{p-1}{p-2} sin^{p-3} x + \frac{(p-1)(p-3)}{(p-2)(p-4)} sin^{p-5} x + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{(p-1)(p-3)\ldots 4.2}{(p-2)(p-4)\ldots 3.1}\right\} + C.$$

Ferner bei geraden positiven p:

6) $$\int tan^p x\, dx$$

$$= \frac{tan^{p-1} x}{p-1} - \frac{tan^{p-3} x}{p-3} + \frac{tan^{p-5} x}{p-5} - \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}p-1} \frac{tan x}{1}$$
$$+ (-1)^{\frac{1}{2}p} x + Const.$$

und für ungerade p:

7) $$\int tan^p x\, dx$$

$$= \frac{tan^{p-1} x}{p-1} - \frac{tan^{p-3} x}{p-3} + \frac{tan^{p-5} x}{p-5} - \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}(p+1)} \frac{tan^2 x}{2}$$
$$+ (-1)^{\frac{1}{2}(p+1)}\, l\, cos x + Const.$$

Hinsichtlich der in den Formeln 4) und 5) ausgeführten Integration von $sin^p x\, dx$ wollen wir noch bemerken, dass dieselbe auch auf anderem Wege bewerkstelligt werden kann. Zufolge der Formel 13) in §. 43 ist nämlich für $2n = m$, also für gerade m

$$(-1)^{\frac{1}{2}m} 2^{m-1} sin^m x$$
$$= m_0 cos mx - m_1 cos(m-2)x + m_2 cos(m-4)x - \ldots\ldots$$
$$+ (-1)^{\frac{1}{2}m-1} m_{\frac{1}{2}m-1} cos 2x + (-1)^{\frac{1}{2}m} \tfrac{1}{2} . m_{\frac{1}{2}m},$$

mithin durch Multiplikation mit dx und Integration:

8) $$\int \sin^m x\, dx$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}m}}{2^{m-1}} \left\{ \frac{m_0 \sin mx}{m} - \frac{m_1 \sin(m-2)x}{m-2} + \frac{m_2 \sin(m-4)x}{m-4} - \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}m-1} \frac{m_{\frac{1}{2}m-1} \sin 2x}{2} + (-1)^{\frac{1}{2}m} m_{\frac{1}{2}m} \cdot \tfrac{1}{2} x \right\} + C;$$

ferner ist nach Nro. 14) in §. 43 für $2n+1=m$, also ungerade m:

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\, 2^{m-1} \sin^m x$$

$$= m_0 \sin mx - m_1 \sin(m-2)x + m_2 \sin(m-4)x - \ldots\ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} m_{\frac{1}{2}(m-1)} \sin x;$$

folglich durch Multiplikation mit dx und Integration:

9) $$\int \sin^m x\, dx$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(m+1)}}{2^{m-1}} \left\{ \frac{m_0 \cos mx}{m} - \frac{m_1 \cos(m-2)x}{m-2} + \frac{m_2 \cos(m-4)x}{m-4} \cdot \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} m_{\frac{1}{2}(m-1)} \frac{\cos x}{1} \right\} + C.$$

In ähnlicher Weise lässt sich die Integration von $\cos^m x\, dx$ mittelst der Formeln 11) und 12) in §. 43 ausführen.

Das in Nro. 2) besprochene Integral von $f(\sin x, \cos x)\, dx$ kann auch dadurch auf ein algebraisches Integral zurückgeführt werden, dass man

10) $$\cos x = u, \text{ mithin } \sin x = \sqrt{1-u^2},\ dx = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

setzt, wodurch man erhält

$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx = -\int f(\sqrt{1-u^2}, u) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Im Wesentlichen ist diese Reduktion von der früheren nicht verschieden, jedoch dann bequemer, wenn nur der Cosinus vorkommt. So hat man z. B.

$$\int \frac{1}{a+b\cos x}\, dx = -\int \frac{1}{a+bu} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}};$$

für $a < b$ ist nach Formel 10) in §. 56 der Werth des Integrales

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\, l \left(\frac{\sqrt{b+a}\sqrt{1+u} + \sqrt{b-a}\sqrt{1-u}}{\sqrt{b+a}\sqrt{1+u} - \sqrt{b-a}\sqrt{1-u}} \right) + C,$$

mithin nach Substitution von $u = \cos x$ und nach einer kleinen goniometrischen Umwandlung

$$11)\quad \int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\, l\left(\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\tan\frac{1}{2}x}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\tan\frac{1}{2}x}\right) + C,$$
$$a < b.$$

Für die übrigen Fälle $a = b$ und $a > b$ erhält man auf gleiche Weise mittelst der Formeln 11) und 12) des §. 56:

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \tan\tfrac{1}{2}x + C$$

und

$$12)\quad \int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\, Arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\tfrac{1}{2}x\right) + C,\ a>b.$$

Durch mehrmalige Differenziation der Gleichungen 11) und 12) in Beziehung auf a und b lassen sich hieraus noch die Werthe der unter den Formen

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n+1}} \quad \text{und} \quad \int \frac{x^m\,dx}{(a+b\cos x)^{n+1}}$$

stehenden Integrale ableiten, wenn m und n ganze positive Zahlen sind.

Kann man die Funktion $f(\sin x, \cos x)$ so darstellen, dass sie als Funktion der Tangente erscheint, also die Form $\varphi(\tan x)$ annimmt, so ist es von Vortheil, die Substitution

$$13)\qquad \tan x = t, \text{ also } dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

eintreten zu lassen, denn man erhält dadurch sehr einfach

$$14)\qquad \int \varphi(\tan x)\,dx = \int \varphi(t)\,\frac{dt}{1+t^2};$$

so ist z. B.

$$\int \frac{\cos^m x}{a\cos^m x + b\sin^m x}\,dx = \int \frac{1}{a+b\tan^m x}\,dx = \int \frac{1}{a+bt^m}\,\frac{dt}{1+t^2}.$$

Bei ganzen positiven m kann man den Werth des auf t bezüglichen Integrales ermitteln (Cap. XI.), hat also nachher nur noch $t = \tan x$ einzusetzen.

§. 62.

Fortsetzung.

I. Wendet man das Prinzip der partiellen Integration auf das häufig vorkommende Integral

$$\int x^m \sin x \, dx$$

an, so erhält man sehr leicht

$$\int x^m \sin x \, dx = -x^m \cos x + m \int x^{m-1} \cos x \, dx,$$

und indem man dasselbe Verfahren wieder für das Integral rechter Hand benutzt:

$$\int x^{m-1} \cos x \, dx = x^{m-1} \sin x - (m-1) \int x^{m-2} \sin x \, dx.$$

Durch Substitution dieser Gleichung in die vorhergehende ergiebt sich die Reduktionsformel

1)
$$\int x^m \sin x \, dx = -x^m \cos x + m x^{m-1} \sin x - m(m-1) \int x^{m-2} \sin x \, dx,$$

mittelst deren das gesuchte Integral auf ein anderes von derselben Form zurückgeführt wird, in welchem der Exponent von x um 2 vermindert ist. Wendet man die obige Formel in dem Falle eines ganzen positiven m mehrmals nach einander an, so gelangt man auf eines der beiden Integrale

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C,$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + C,$$

von denen das erste unmittelbar bekannt ist und das zweite sich aus Nro. 1) selbst für $m = 1$ ergiebt.

Lassen wir in Nro. 1) $-m+2$ an die Stelle von m treten und reduziren auf das Integral rechter Hand, so folgt:

2)
$$\int \frac{\sin x}{x^m} \, dx = -\frac{\sin x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{\cos x}{(m-1)(m-2)x^{m-2}} - \frac{1}{(m-1)(m-2)} \int \frac{\sin x}{x^{m-2}} \, dx.$$

Für $m = 1$ und $m = 2$ ist diese Formel unbrauchbar und es bleibt dann nichts übrig, als mit Hülfe unendlicher Reihen zu integriren;

im ersten Falle erhält man mittelst der unendlichen Reihe für $\sin x$:

3) $$\int \frac{\sin x}{x}\, dx = Const. + \tfrac{1}{1}\frac{x}{1} - \tfrac{1}{3}\frac{x^3}{1.2.3} + \tfrac{1}{5}\frac{x^5}{1.2..5} - \ldots,$$

im zweiten Falle hat man zunächst durch theilweise Integration:

4) $$\int \frac{\sin x}{x^2}\, dx = -\frac{\sin x}{x} + \int \frac{\cos x}{x}\, dx,$$

und nachher vermöge der Cosinusreihe:

5) $$\int \frac{\cos x}{x}\, dx = Const. + lx - \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}\frac{x^4}{1.2..4} - \ldots.$$

Die Formel 2) kann nun dienen, um die Integrale

$$\int \frac{\sin x}{x^3}\, dx, \qquad \int \frac{\sin x}{x^4}\, dx, \ldots.$$

auf die Integrale in 3) und 5) zurückzuführen.

Ist der Exponent von x weder eine positive noch negative ganze Zahl, so lässt sich derselbe mittelst der Formeln 1) und 2) zwar verkleinern oder vergrössern, man wird aber schliesslich immer zur Integration durch Reihen seine Zuflucht nehmen müssen.

Dieselben Betrachtungen gelten fast wörtlich für das Integral

$$\int x^m \cos x\, dx,$$

man findet dafür zunächst die Reduktionsformel

6) $$\int x^m \cos x\, dx = x^m \sin x + m x^{m-1} \cos x - m(m-1)\int x^{m-2} \cos x\, dx,$$

welche bei ganzen positiven m anwendbar ist und zuletzt auf eines der beiden Integrale

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C,$$

$$\int x \cos x\, dx = x \sin x + \cos x + C$$

zurückführt. — Ersetzt man m durch $-m+2$, so ergiebt sich durch Umkehrung der Gleichung 4):

7) $$\int \frac{\cos x}{x^m}\, dx = -\frac{\cos x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{\sin x}{(m-1)(m-2)x^{m-2}} - \frac{1}{(m-1)(m-2)}\int \frac{\cos x}{x^{m-2}}\, dx.$$

Für $m = 1$ und $m = 2$ ist die Formel nicht anwendbar; im ersten dieser Fälle benutzt man die in Nro. 5) angegebene Reihe, im zweiten Falle hat man durch partielle Integration

8) $$\int \frac{\cos x}{x^2}\,dx = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

wo der Werth des rechter Hand befindlichen Integrales aus Nro. 3) zu nehmen ist. — Die Gleichung 7) kann nun dienen, um die Integrale

$$\int \frac{\cos x}{x^3}\,dx, \qquad \int \frac{\cos x}{x^4}\,dx, \ldots.$$

auf die in 3) und 5) entwickelten Integrale zurückzuführen. Für andere Exponenten von x muss man jedenfalls die Integration durch Reihen bewerkstelligen. — Als Gesammtresultat dieser Betrachtungen ergiebt sich, dass Integrationen von den Formen

$$\int f(x)\,\sin x\,dx \text{ und } \int f(x)\,\cos x\,dx$$

in geschlossener Gestalt ausführbar sind, wenn $f(x)$ unter der Form $A + Bx + Cx^2 +$ etc. steht, und dass sie auf die zwei Integrale 3) und 5) zurückkommen, wenn $f(x)$ der Form $A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} +$ etc. angehört.

Wir beschäftigen uns noch mit den beiden Integralen

$$P = \int e^{\alpha x} \cos^m \beta x\,dx \text{ und } Q = \int e^{\alpha x} \sin^m \beta x\,dx,$$

in denen m eine ganze positive Zahl bezeichnen möge. Durch theilweise Integration wird zunächst

$$P = \cos^m \beta x \int e^{\alpha x}\,dx - \int d\cos^m \beta x \int e^{\alpha x}\,dx$$

$$= \cos^m \beta x\,\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + \frac{m\beta}{\alpha}\int \cos^{m-1}\beta x\,\sin\beta x\,dx\,e^{\alpha x},$$

und wenn wir das Integral rechter Hand kurz mit P_1 bezeichnen:

9) $$\alpha P = e^{\alpha x} \cos^m \beta x + m\beta\,.\,P_1.$$

Die partielle Integration giebt ferner, auf P_1 angewendet:

$$P_1 = \cos^{m-1}\beta x\,\sin\beta x\,\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \int d\,[\cos^{m-1}\beta x\,\sin\beta x]\,\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\,e^{\alpha x}\cos^{m-1}\beta x\,\sin\beta x$$

$$-\frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x}\,[\cos^m\beta x - (m-1)\cos^{m-2}\beta x\,\sin^2\beta x]\,dx,$$

oder wenn man $\sin^2\beta x = 1 - \cos^2\beta x$ setzt und die einzelnen Theile integrirt:

$$\alpha P_1 = e^{\alpha x} \cos^{m-1} \beta x \sin \beta x$$
$$- m\beta \int e^{\alpha x} \cos^m \beta x\, dx + (m-1)\, \beta \int e^{\alpha x} \cos^{m-2} \beta x\, dx,$$

wobei man bemerken möge, dass das erste Integral rechter Hand wiederum P ist. Substituiren wir nun die vorstehende Gleichung in Nro. 9), nachdem wir letztere mit α multiplizirt haben, so ergiebt sich

$$\alpha^2 P = \alpha e^{\alpha x} \cos^m \beta x + m\beta e^{\alpha x} \cos^{m-1} \beta x \sin \beta x$$
$$- m^2 \beta^2 P + m(m-1)\, \beta^2 \int e^{\alpha x} \cos^{m-2} \beta x\, dx.$$

Durch Reduktion auf die Unbekannte P und durch Einsatz ihrer ursprünglichen Bedeutung folgt schliesslich:

$$10) \quad \int e^{\alpha x} \cos^m \beta x\, dx = \frac{\alpha \cos \beta x + m\beta \sin \beta x}{\alpha^2 + m^2 \beta^2}\, e^{\alpha x} \cos^{m-1} \beta x$$
$$+ \frac{m(m-1)\beta^2}{\alpha^2 + m^2\beta^2} \int e^{\alpha x} \cos^{m-2} \beta x\, dx.$$

Für das Integral Q erhält man nach demselben Verfahren eine ähnliche Reduktionsformel, nämlich:

$$11) \quad \int e^{\alpha x} \sin^m \beta x\, dx = \frac{\alpha \sin \beta x - m\beta \cos \beta x}{\alpha^2 + m^2 \beta^2}\, e^{\alpha x} \sin^{m-1} \beta x$$
$$+ \frac{m(m-1)\beta^2}{\alpha^2 + m^2\beta^2} \int e^{\alpha x} \sin^{m-2} \beta x\, dx.$$

Je nachdem m gerade oder ungerade ist, führen diese Formeln auf eines der folgenden drei Integrale zurück:

$$\int e^{\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha x} + C,$$

$$12) \quad \int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx = \frac{\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2}\, e^{\alpha x} + C,$$

$$13) \quad \int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx = \frac{\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2}\, e^{\alpha x} + C,$$

von denen das erste unmittelbar bekannt ist, das zweite und dritte aber aus den Formeln 10) und 11) selbst für $m = 1$ entspringen.

Umgekehrt kann man auch von den Formeln 12) und 13) ausgehen, um die vorhin mit P und Q bezeichneten Integrale in etwas anderer Gestalt zu entwickeln. Man wendet dann die Formeln 11), 12), 13) und 14) in §. 43 für $u = \beta x$, $m = 2n$ oder $m = 2n + 1$ an und integrirt die einzelnen Glieder; so ist z. B:

$$\int e^{\alpha x} \cos^{2n} \beta x \, dx$$

$$= \frac{1}{2^{2n-1}} \int e^{\alpha x} [(2n)_0 \cos 2n\beta x + (2n)_1 \cos (2n-2)\beta x + \ldots + \tfrac{1}{2}(2n)_n] \, dx$$

$$= \frac{1}{2^{2n-1}} e^{\alpha x} \Big\{ (2n)_0 \frac{\alpha \cos 2n\beta x + \beta \sin 2n\beta x}{\alpha^2 + (2n)^2\beta^2}$$

$$+ (2n)_1 \frac{\alpha \cos (2n-2)\beta x + \beta \sin (2n-2)\beta x}{\alpha^2 + (2n-2)^2\beta^2} + \ldots$$

$$\ldots + \tfrac{1}{2}(2n)_n \frac{1}{\alpha} \Big\} + C;$$

und ähnlich in allen übrigen Fällen.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass sich das Integral

$$\int e^{\alpha x} F(x) \, dx$$

vollständig mittelst der Formeln 8) bis 11) entwickeln lässt, sobald $F(x)$ in eine Reihe der Form

$$A + B \sin \beta x + C \sin^2 \beta x \quad \ldots$$

umgewandelt werden kann.

§. 63.

Cyklometrische Differenziale.

Enthält das gegebene Differenzial eine cyklometrische Funktion allein, so ist es leicht auf ein goniometrisches Differenzial zurückzuführen; mittelst der Substitution

1) $$Arcsin\, x = z, \quad x = \sin z, \quad dx = \cos z \, dz$$

erhält man nämlich ohne Weiteres

2) $$\int f(Arcsin\, x) \, dx = \int f(z) \cos z \, dz;$$

nicht minder einfach ist die Ableitung der folgenden Formeln:

3) $$\int f(Arccos\, x) \, dx = -\int f(z) \sin z \, dz, \quad z = Arccos\, x,$$

4) $$\int f(Arctan\, x) \, dx = \int f(z) \sec^2 z \, dz, \quad z = Arctan\, x,$$

5) $$\int f(Arccot\, x) \, dx = -\int f(z) \csc^2 z \, dz, \quad z = Arccot\, x.$$

So hat man z. B. nach der Formel 2) und nach Nro. 12) des vorigen Paragraphen

$$\int e^{\alpha \, Arcsin\, x}\, dx = \int e^{\alpha z} \cos z \, dz$$
$$= \frac{\alpha \cos z + \sin z}{\alpha^2 + 1} e^{\alpha z} + Const.,$$

mithin rückwärts für $\sin z = x$, $\cos z = \sqrt{1-x^2}$:

$$\int e^{\alpha \, Arcsin\, x}\, dx = \frac{\alpha\sqrt{1-x^2} + x}{\alpha^2 + 1} e^{\alpha \, Arcsin\, x} + Const.$$

Auf gleiche Weise würden sich die beiden Integrale

$$\int Arc^m \sin x \, dx \quad \text{und} \quad \int Arc^m \cos x \, dx$$

mittelst der Formeln 10) und 11) des vorigen Paragraphen entwickeln lassen.

Leicht integrabel sind auch die Differenziale von der Form $f(x)\,\psi(x)\,dx$, wenn $\psi(x)$ eine cyklometrische Funktion und $f(x)$ so beschaffen ist, dass das Integral von $f(x)\,dx$ eine algebraische Funktion bildet; in der That genügt unter diesen Voraussetzungen die theilweise Integration des gegebenen Differenziales, um sogleich auf das Integral eines algebraischen Ausdruckes zu kommen. Man hat nämlich für $\psi(x) = Arcsin\, x$:

$$\int Arcsin\, x\, f(x)\, dx$$
$$= Arcsin\, x \int f(x)\, dx - \int d\, Arcsin\, x \int f(x)\, dx$$

oder

$$1) \quad \int f(x)\, Arcsin\, x\, dx = Arcsin\, x \int f(x)\, dx - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int f(x)\, dx;$$

mit gleicher Leichtigkeit sind die folgenden Formeln entwickelbar:

$$2) \quad \int f(x)\, Arccos\, x\, dx = Arccos\, x \int f(x)\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int f(x)\, dx,$$

$$3) \quad \int f(x)\, Arctan\, x\, dx = Arctan\, x \int f(x)\, dx - \int \frac{dx}{1+x^2} \int f(x)\, dx,$$

$$4) \quad \int f(x)\, Arccot\, x\, dx = Arccot\, x \int f(x)\, dx + \int \frac{dx}{1+x^2} \int f(x)\, dx.$$

So ist z. B. in dem speziellen Falle $f(x) = 1$ nach Nro. 1):

$$5) \quad \int Arcsin\, x\, dx = Arcsin\, x \,.\, x - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\, x$$
$$= x\, Arcsin\, x + \sqrt{1-x^2} + Const.,$$

und nach Nro. 3):

$$6) \quad \int Arctan\, x\, dx = Arctan\, x \,.\, x - \int \frac{dx}{1+x^2}\, x$$
$$= x\, Arctan\, x - \tfrac{1}{2} l(1+x^2) + Const.;$$

überhaupt allgemeiner für $f(x) = x^{m-1}$:

7) $$\int x^{m-1}\, Arcsin\, x\, dx = \frac{x^m\, Arcsin\, x}{m} - \frac{1}{m}\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

8) $$\int x^{m-1}\, Arctan\, x\, dx = \frac{x^m\, Arctan\, x}{m} - \frac{1}{m}\int \frac{x^m\, dx}{1+x^2},$$

wo die rechter Hand vorkommenden Integrationen bei ganzem positiven m jederzeit ausführbar sind.

Ein etwas zusammengesetzteres Beispiel ist folgendes. Man hat zunächst nach Nro. 3)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} Arctan\, x\, dx = -Arctan\, x\,.\, \sqrt{1-x^2} + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\, dx,$$

ferner

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\, dx &= \int \frac{1-x^2}{1+x^2}\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int \left\{\frac{2}{1+x^2} - 1\right\} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 2\int \frac{1}{1+x^2}\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - Arcsin\, x.\end{aligned}$$

Schafft man das Wurzelzeichen in dem rechter Hand befindlichen Integrale weg (§. 56) und integrirt nachher, so findet sich:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, Arctan\, \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

und durch Substitution dieses Werthes:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, Arcsin\, x\, dx = &-\sqrt{1-x^2}\, Arctan\, x \\ &+ \sqrt{2}\, Arctan\, \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} - Arcsin\, x + C.\end{aligned}$$

Lässt sich keine der erwähnten Methoden anwenden, so muss man wie immer die Integration durch unendliche Reihen zu bewerkstelligen suchen.

Cap. XIV.

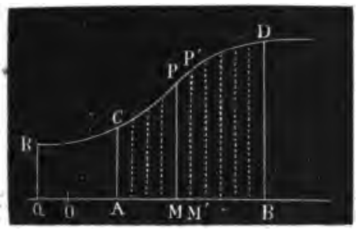
Die Ausmessung der Linien, Flächen und Körper.

§. 64.

Die Quadratur ebener Curven.

Schon in §. 47 haben wir darauf hingewiesen, dass ein Integral als die ebene Fläche angesehen werden kann, welche unterhalb von der Abscissenachse, oberhalb von einer beliebigen Curve einfacher Krümmung und zu beiden Seiten von ein paar beliebigen Ordinaten dieser Linie begrenzt wird; wir haben dies nun etwas näher auszuführen.

Fig. 28.



In Figur 28 sei $OM = x$, die Fläche $QMPR = F(x)$ oder auch kürzer $= F$, die Ordinate $MP = y = f(x)$, so ist nach dem Früheren

$$\frac{dF}{dx} = f(x) = y,$$

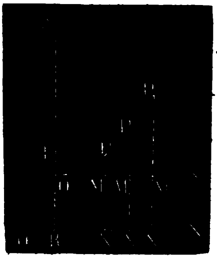
mithin umgekehrt durch Integration

1) $$F = \int f(x)\,dx + Const. = \int y\,dx + Const.$$

Die Bedeutung der willkürlichen Constante besteht darin, dass es für die letzte Ordinate y gleichgültig ist, von welcher Anfangsordinate QR aus die Fläche gemessen wird, dass mithin so lange eine Unbestimmtheit in der Aufgabe liegt, als jene Anfangsordinate nicht besonders angegeben ist. Rechnen wir aber die Fläche von der Ordinate aus, welche einer bekannten Abscisse x_0 entspricht, so muss für $x = x_0$ die Fläche $F = 0$ werden, und hieraus bestimmt sich die Constante von selbst, wie die folgenden Beispiele zeigen werden.

α. Die Parabel. Aus der bekannten Gleichung dieser Curve

Fig. 29.



$$y = \frac{x^2}{q} = \frac{1}{q}\, x^2$$

ergiebt sich nach Nro. 1) sogleich

$$F = \frac{1}{q}\, \frac{x^3}{3} + Const.$$

Soll die Fläche vom Scheitel der Parabel aus gerechnet werden, ist also in Fig. 29 die Fläche $OMP = F$, so muss für $x = 0$ auch $F = 0$ werden; dies giebt $0 = 0 +$ *Const.*, also

2) $$F = \tfrac{1}{3}\, \frac{x^3}{q} = \tfrac{1}{3} xy;$$

daraus folgt weiter der Archimedische Satz, dass die Fläche $OLP = \frac{2}{3} xy$ sein muss, wenn $LP \parallel OM$ gezogen wird.

Eine elegante und später brauchbare Erweiterung des Theoremes 2) ist folgende. Man ziehe noch zwei Ordinaten $M'P'$ und $M''P''$, in den Abständen $MM' = M'M'' = \varepsilon$, so ist die zwischen der ersten und letzten Ordinate enthaltene Fläche:

$$\begin{aligned} MM''P''P &= OM''P'' - OMP \\ &= \frac{(x+2\varepsilon)^3}{3q} - \frac{x^3}{3q} = \tfrac{1}{3}\varepsilon\, \frac{6x^2 + 12x\varepsilon + 8\varepsilon^2}{q}, \end{aligned}$$

wofür man auch schreiben kann:

$$MM''P''P = \tfrac{1}{3}\varepsilon \left[\frac{x^2}{q} + 4\,\frac{(x+\varepsilon)^2}{q} + \frac{(x+2\varepsilon)^2}{q}\right].$$

Bezeichnen wir die drei Ordinaten MP, $M'P'$, $M''P''$ mit y, y', y'', so ist die vorige Beziehung einerlei mit der folgenden:

$$MM''P''P = \tfrac{1}{3}\varepsilon\,(y + 4y' + y'').$$

Durch einen beliebigen Punkt Q legen wir ein neues Coordinatensystem parallel dem früheren und setzen $OR = b$, $NP = \eta = y + b$, $N'P' = \eta' = y' + b$, $N''P'' = \eta'' = y'' + b$, so ist

$$\begin{aligned} \text{Fläche } NN''P''P &= \text{Rechteck } NN''M''M + \text{Fläche } MM''P''P \\ &= 2\varepsilon b + \tfrac{1}{3}\varepsilon[\eta - b + 4(\eta' - b) + \eta'' - b], \end{aligned}$$

oder bei gehöriger Reduktion

3) $$\text{Fläche } NN''P''P = \tfrac{1}{3}\varepsilon(\eta + 4\eta' + \eta'').$$

Legt man also durch drei Punkte P, P', P'', deren Ordinaten gleiche Abstände halten, eine Parabel, deren Achse der Ordinatenachse parallel ist, so kann man die Fläche dieses parabolischen

Streifens aus den drei Ordinaten und ihrer gegenseitigen Entfernung berechnen, ohne den Scheitel und den Parameter der Parabel erst aufsuchen zu müssen.

β. **Die Ellipse**, deren Gleichung wir in der Form

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

darstellen, giebt

$$F = \frac{b}{a} \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{b}{a}\left[\tfrac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2} a^2 \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a}\right] + Const.;$$

wenn die Fläche von der kleinen Halbachse aus gerechnet wird, so muss F mit x gleichzeitig verschwinden, also $Const. = 0$ sein; es bleibt dann

4) $$F = \tfrac{1}{2} xy + \tfrac{1}{2} ab \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a}.$$

Für $x = a$, $y = 0$ erhält man die Fläche des elliptischen Quadranten $= \frac{1}{2}ab \cdot \frac{1}{2}\pi$, mithin $ab\pi$ als ganze Ellipsenfläche. In dem speziellen Falle $b = a$ geht die Ellipse in einen Kreis über und man wird dann die Formel 4) leicht auf geometrischem Wege und zwar dadurch prüfen können, dass man die über der Abscisse x stehende Kreisfläche in ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten x und y und in einen Kreisausschnitt zerlegt.

γ. **Die Hyperbel.** Stellen wir die Gleichung dieser Curve in ihrer gewöhnlichen Form dar, nämlich

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

so wird

$$F = \frac{b}{a} \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$$

$$= \frac{b}{a} \left[\tfrac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \tfrac{1}{2} a^2\, l(x + \sqrt{x^2 - a^2})\right] + Const.$$

Das Natürlichste ist, die Fläche vom Scheitel an zu rechnen, so dass $F = 0$ wird, wenn $x = a$; dies giebt

$$0 = \frac{b}{a} \left[- \tfrac{1}{2} a^2\, l\,(a)\right] + Const.$$

Hieraus bestimmt sich die Constante und es kann nachher ihr Werth in die vorige Gleichung substituirt werden; dasselbe erlangt man kürzer durch Subtraktion der beiden Gleichungen, nämlich

$$F = \tfrac{1}{2} x \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \tfrac{1}{2} ab\, l \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right),$$

oder in eleganterer Form

5) $$F = \tfrac{1}{2} xy - \tfrac{1}{2} ab\, l \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

δ. **Die Cycloide.** Nehmen wir, wie in §. 18 (auf S. 66) den Scheitel der Cycloide zum Anfangspunkt der Coordinaten, so ist die Differenzialgleichung der Curve

$$dy = \sqrt{\frac{2r-x}{x}}\,dx;$$

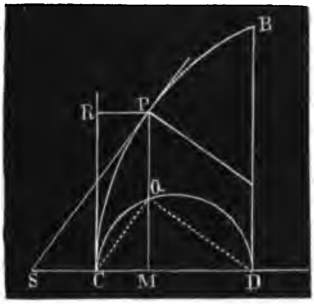
um von derselben Gebrauch zu machen, ersetzen wir die Gleichung 1) durch die folgende

$$F = yx - \int x\,dy,$$

welche durch partielle Integration entsteht; es wird dann

$$F = xy - \int dx\sqrt{2rx - x^2}.$$

Fig. 30.



Die geometrische Bedeutung des rechter Hand befindlichen Integrales ist unmittelbar einleuchtend, wenn man sich erinnert, dass in dem Halbkreise CQD (Figur 30) $\sqrt{2rx - x^2} = CQ$, also

$$\int dx\sqrt{2rx - x^2}$$

$$= \text{Fläche } CMQ + Const.$$

sein muss; wir haben daher

$$F = xy - \text{Fläche } CMQ + Const.$$

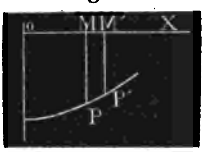
Verstehen wir unter F die Fläche CMP, so wird für $x = 0$ gleichzeitig $F = 0$ und $CMQ = 0$, mithin auch $Const. = 0$, also

$$F = xy - \text{Fläche } CMQ \text{ oder } xy - F = \text{Fläche } CMQ;$$

geometrisch heisst dies, dass die Flächen CPR und CMQ stets gleich sind; hierin liegt unmittelbar die Quadratur der Cycloide.

Besondere Aufmerksamkeit verdient der Fall, wenn die zu quadrirende Curve die Abscissenachse durchschneidet, wenn also die gesuchte Fläche aus zwei Theilen besteht, von denen der eine über, der andere unter der jener Achse liegt. Für ein negatives y, etwa $y = -\varphi(x)$, wird nämlich F negativ $= -\int\varphi(x)\,dx$, was auch geometrisch leicht zu constatiren ist *); geht nun y aus dem Nega-

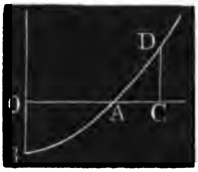
Fig. 31.



*) Ein Rechteck $MM'P'P$ (Fig. 31), dessen Basis MM' positiv und dessen Höhe MP negativ ist, hat zur Fläche das Produkt $-MM'.MP$, gilt also für negativ, wie dies auch durch seine entgegengesetzte Lage angezeigt wird. Dieselbe Bemerkung muss sich auf krummlinig begrenzte unterhalb der Abscissenachse liegende Flächen erstrecken, weil eine Fläche immer als Grenze einer Rechtecksumme angesehen werden darf (§. 47).

tiven ins Positive über, so wechselt F gleichzeitig sein Vorzeichen und die Formel 1) giebt in diesem Falle die algebraische Summe der beiden über und unter der Abscissenachse liegenden Flächentheile. Gewöhnlich will man aber die arithmetische Summe; diese erlangt man leicht, indem man jene Flächentheile einzeln berechnet und mit gleichem Vorzeichen zusammennimmt. Wählt man z. B. die durch den Brennpunkt O (Fig. 32) einer Parabel auf deren Achse senkrecht gelegte Gerade zur Abscissenachse, so ist die Gleichung der Parabel

Fig. 32.



$$y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2}{p} - p\right),$$

mithin

$$F = \tfrac{1}{2}x\left(\frac{x^2}{3p} - p\right) + Const., \tag{6}$$

und wenn die Fläche F von der Ordinatenachse abgerechnet wird, ist $Const. = 0$. Ueber der Abscisse $OC = p\sqrt{3}$ steht demnach die Fläche

$$F = \tfrac{1}{2}p\sqrt{3}\left(\frac{p^2 . 3}{3p} - p\right) = 0.$$

Dieses Resultat sagt, dass die beiden Flächen OAB und ACD gleich gross und von entgegengesetztem Zeichen sein müssen; man hat in der That für die erste Fläche wegen $OA = p$:

$$\text{Fläche } OAB = -\tfrac{1}{3}p^2 = -\tfrac{2}{3} . OB . OA,$$

was mit dem Archimedischen Satze übereinstimmt. Um die zweite Fläche ACD zu finden, rechnen wir in Nro. 6) die Fläche F vom Punkte A aus, so dass F für $x = p$ verschwindet; dies giebt zur Constantenbestimmung $0 = -\tfrac{1}{3}p^2 + Const.$, also

$$F = \tfrac{1}{2}x\left(\frac{x^2}{3p} - p\right) + \tfrac{1}{3}p^2;$$

für $x = p\sqrt{3}$ erhalten wir hieraus

$$\text{Fläche } ACD = \tfrac{1}{3}p^2,$$

dem Werthe nach mit OAB übereinstimmend, dem Zeichen nach entgegengesetzt. Die algebraische Summe der Flächen OAB und ACD ist also Null, die arithmetische Summe $= \tfrac{2}{3}p^2$.

Einer ähnlichen Vorsicht bedarf es in dem Falle, wo die Curve sich sprungweise innerhalb der gesuchten Fläche ändert; auch hier besteht die Fläche aus zwei gesonderten Theilen, welche einzeln berechnet werden müssen. Wollte man z. B. die über der Abscisse $x = 2a$ stehende Fläche der Curve

$$y = \frac{b^3}{(a-x)^2} \quad (b \text{ und } a \text{ positiv})$$

ermitteln, so erhielte man ohne jene Rücksicht

$$F = b^3 \int \frac{dx}{(a-x)^2} = \frac{b^3}{a-x} + Const.,$$

und weil vom Anfange der Coordinaten her $F = 0$ wird für $x = 0$:

$$0 = \frac{b^3}{a} + Const.,$$

also

$$F = \frac{b^3}{a-x} - \frac{b^3}{a},$$

und endlich für $x = 2a$

$$F = -\frac{b^3}{a} - \frac{b^3}{a} = -\frac{2b^3}{a}.$$

Die Unrichtigkeit dieses Resultates erkennt man schon daraus, dass die Curve keine negative Fläche haben kann, weil die Ordinate y stets positiv ist. Nun besteht aber die über der Abscisse $x = 2a$ liegende Fläche aus zwei getrennten aber congruenten Theilen, indem y für $x = a$ discontinuirlich wird und zu $x = a + u$ und zu $x = a - u$ immer dieselben Ordinaten gehören; die gesuchte Fläche ist demnach das Doppelte der über der halben Abscisse $x = a - 0$ stehenden Fläche und letztere

$$= \frac{b^3}{a-(a-0)} - \frac{b^3}{a} = +\infty - \frac{b^3}{a},$$

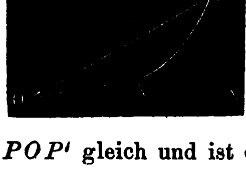
also überhaupt unendlich gross und positiv; daher ist auch $F = \infty$.

§. 65.

Quadratur in Polarcoordinaten.

Wenn die Gleichung einer Curve in Polarcoordinaten ausgedrückt wird, so kommt es darauf an, die Fläche eines Sectors, wie z. B. AOP, Fig. 33, zu ermitteln; nennen wir sie S und bezeichnen wie folgt:

Fig. 33.



$$\angle XOP = u, \ \angle POP' = \Delta u,$$
$$OP = r, \quad OP' = r + \Delta r,$$

so ist $\Delta S =$ der Fläche POP'; gehen wir von den Differenzen zu den Diffenrenzialen über, so gilt dS (bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnungen) einem Dreiecke POP' gleich und ist daher $dS = \frac{1}{2} r (r + dr) \sin(du)$, ferner, weil

$\sin(du)$ mit derselben Genauigkeit $= du$ ist, $dS = \frac{1}{2} r(r+dr)\, du$ und mit Weglassung der unendlich kleinen Grösse zweiter Ordnung $dr\, du$:

$$1) \qquad dS = \tfrac{1}{2} r^2 du, \quad S = \tfrac{1}{2}\int r^2 du + Const.$$

Die Constante bestimmt sich dadurch, dass man festsetzt, von welchem Radiusvector aus der Sector S gerechnet werden soll; nennen wir u_0 den Winkel AOX, welchen dieser Anfangsradius mit OX bildet, so wird $S = 0$ für $u = u_0$.

Als Beispiel nehmen wir die Quadratur eines Ellipsensectors, indem wir den einen Brennpunkt der Ellipse als Anfangspunkt der Polarcoordinaten und die Gerade von diesem Punkte nach dem nächstliegenden Endpunkte der grossen Achse als Anfangslage des Radiusvector ansehen; die Gleichung der Ellipse ist dann

$$2) \qquad r = \frac{p}{1+\varepsilon \cos u},$$

wobei p den Halbparameter (die Ordinate im Brennpunkte) und ε die numerische Excentricität < 1 bezeichnet. Für den Sector hat man

$$3) \qquad S = \tfrac{1}{2} p^2 \int \frac{du}{(1+\varepsilon \cos u)^2}.$$

Den Werth des Integrales kann man entweder dadurch finden, dass man die Gleichung

$$\int \frac{du}{a + b\cos u} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\, Arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan \tfrac{1}{2} u\right)$$

in Beziehung auf a differenzirt und nachher $a = 1$, $b = \varepsilon$ setzt, oder auf die Weise, dass man die Differenzialformel algebraisch und rational macht. Hierzu dient die Substitution

$$\cos u = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad \sin u = \frac{2x}{1+x^2},$$

$$\sin u\, du = \frac{4x\,dx}{(1+x^2)^2}, \quad du = \frac{2\,dx}{1+x^2},$$

mittelst deren man erhält

$$\int \frac{du}{(1+\varepsilon\cos u)^2} = 2\int \frac{(1+x^2)\,dx}{[(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)x^2]^2}$$

$$= \frac{2}{1-\varepsilon}\int \frac{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)x^2 - 2\varepsilon}{[(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)x^2]^2}\,dx$$

$$= \frac{2}{1-\varepsilon}\int \frac{dx}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)x^2} - \frac{4\varepsilon}{1-\varepsilon}\int \frac{dx}{[(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)x^2]^2},$$

die Integration hat nun keine Schwierigkeiten; führt man sie aus und setzt nachher für x seinen Werth, nämlich $\tan \frac{1}{2} u$, so ergiebt sich

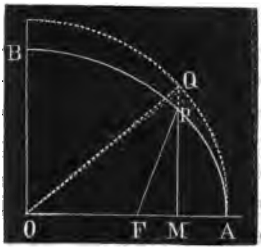
$$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}^3} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \tan \tfrac{1}{2} u\right) - \frac{1}{1-\varepsilon^2} \frac{\varepsilon \sin u}{1+\varepsilon \cos u}$$

als Werth des in Nro. 3) vorkommenden Integrales und mithin wird

$$4)\ S = \frac{p^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}^3} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \tan \tfrac{1}{2} u\right) - \frac{p^2}{2(1-\varepsilon^2)} \frac{\varepsilon \sin u}{1+\varepsilon \cos u},$$

wo keine Constante hinzuzufügen ist, wenn der Sector S von der grossen Achse an gerechnet wird, also mit u gleichzeitig verschwinden muss. Man kann der obigen Formel eine sehr elegante Gestalt verleihen, wenn man p durch die grosse Halbachse a ausdrückt und einen neuen Winkel w einführt, welcher dadurch entsteht, dass die Ordinate MP (Fig. 34) verlängert wird, bis sie den mit a beschriebenen Kreis in Q schneidet und Q mit dem Mittelpunkte O der Ellipse verbunden wird. Für $AOQ = w$ ist nämlich

Fig. 34.



$$a \cos w - a\varepsilon = r \cos u,$$

oder wegen $a = p : (1-\varepsilon^2)$ und vermöge des Werthes von r

$$\frac{\cos w - \varepsilon}{1-\varepsilon^2} = \frac{\cos u}{1+\varepsilon \cos u}.$$

Aus dieser Beziehung zwischen w und u leitet man ohne Mühe noch folgende Gleichungen ab:

$$\cos u = \frac{\cos w - \varepsilon}{1-\varepsilon \cos w}, \qquad \sin u = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin w}{1-\varepsilon \cos w},$$

$$\tan \tfrac{1}{2} u = \frac{1-\cos u}{1+\cos u} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \tan \tfrac{1}{2} w,$$

mittelst deren die Formel S in die folgende übergeht:

$$S = \tfrac{1}{2} a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot (w - \varepsilon \sin w),$$

oder endlich, weil $a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ die kleine Halbachse b der Ellipse bedeutet:

$$5) \qquad S = \tfrac{1}{2} ab\,(w - \varepsilon \sin w),$$

von welcher Formel in der Theorie der Planetenbewegung eine Anwendung vorkommt.

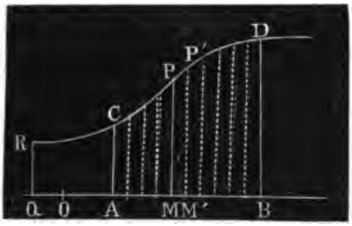
Aendert sich der Radiusvector der krummen Linie sprungweise innerhalb des zu quadrirenden Sectors, so besteht letzterer aus zwei getrennten Sectoren, deren Flächen einzeln zu berechnen sind.

§. 66.

Näherungsweise Quadraturen.

Unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten sei in Fig. 35 AB die Basis einer Fläche, $OM = x$, $MP = y = f(x)$; theilen wir AB in eine beliebige Anzahl, etwa m, gleicher Theile und ziehen durch jeden Theilpunkt eine Ordinate, so zerfällt die Fläche $ABDC$ in m Streifen, welche näherungsweise als Rechtecke gelten können, sobald m eine grosse Zahl ist. Bezeichnen wir die Ordinaten der Reihe nach mit $y_0, y_1, y_2, \ldots y_m$, den $m$ten Theil von AB mit δ und die Fläche $ABDC$ mit F, so erhalten wir die näherungsweise richtige Gleichung:

Fig. 35.



1) $$F = \delta\,(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{m-1}).$$

Eine etwas grössere Genauigkeit erreicht man dadurch, dass man die einzelnen Streifen als Trapeze berechnet, was darauf hinauskommt, die m einzelnen Stücke des Bogens CPD als gerade Linien, mithin den Bogen selbst als gebrochene Linie anzusehen; dies giebt

$$F = \delta\,\frac{y_0 + y_1}{2} + \delta\,\frac{y_1 + y_2}{2} + \ldots\ldots + \delta\,\frac{y_{m-1} + y_m}{2},$$

oder durch Vereinigung der gleichartigen Grössen

2) $$F = \delta\,(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{m-1} + \tfrac{1}{2}y_m).$$

Bedeutender wird die Annäherung, wenn man sich die einzelnen Stücke des Bogens CPD als krumme Linien und zwar am einfachsten als parabolische Bögen denkt. Dass eine solche Voraussetzung keine Unmöglichkeit in sich schliesst, sieht man auf folgende Weise. Wenn überhaupt drei Punkte $\xi\eta$, $\xi'\eta'$, $\xi''\eta''$ gegeben sind und die Gleichung

$$y - \beta = \frac{(x-\alpha)^2}{q}$$

die Gleichung einer beliebigen Parabel bezeichnet, deren Achse der Ordinatenachse parallel ist, so würde diese Parabel durch jene drei Punkte gehen, wenn die Gleichungen

$$\eta-\beta=\frac{(\xi-\alpha)^2}{q},\ \eta'-\beta=\frac{(\xi'-\alpha)^2}{q},\ \eta''-\beta=\frac{(\xi''-\alpha)^2}{q}$$

zusammen stattfänden; die Auflösung dieser Gleichungen in Beziehung auf α, β und q liefert aber reelle Werthe für dieselben und daher ist es jederzeit möglich, durch jene drei Punkte eine Parabel der genannten Art zu legen. Wenden wir dies auf unseren Fall an, indem wir uns durch je drei Theilpunkte des Bogens CPD eine Parabel gelegt denken, wobei m eine gerade Zahl $= 2n$ sein muss, so können wir die Fläche jedes parabolischen Streifens nach Formel 4) in §. 64 ermitteln und erhalten

$$F=\tfrac{1}{3}\delta\,(y_0+4y_1+y_2)+\tfrac{1}{3}\delta\,(y_2+4y_3+y_4)+\dots\dots$$
$$\dots+\tfrac{1}{3}\delta\,(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}).$$

oder durch Vereinigung der gleichartigen Grössen

$$3)\qquad F=\tfrac{1}{3}\delta\,\Big\{\,y_0+y_{2n} \\ +4\,(y_1+y_3+y_5+\dots\dots+y_{2n-1}) \\ +2\,(y_2+y_4+y_6+\dots\dots+y_{2n-2})\Big\},$$

welche Formel unter dem Namen der Simpson'schen Regel bekannt ist und schon bei mässig grossen n sehr genaue Resultate liefert.

Diese näherungsweisen Quadraturen enthalten zugleich die näherungsweise Berechnung beliebiger bestimmter Integrale; denn die Fläche $ABDC$ ist nach §. 47 dem bestimmten Integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

gleich, wenn man $OA=a$, $OB=b$ setzt; man kann daher die Formeln 1), 2) und 3) unmittelbar anwenden und zwar ist dabei $\delta=\frac{b-a}{m}$ und $y_0, y_1, y_2, \dots$ sind die Werthe von $f(x)$, welche den Werthen $x=a,\ a+\delta,\ a+2\delta, \dots$ entsprechen, nämlich $y_0=f(a)$, $y_1=f(a+\delta)$, $y_2=f(a+2\delta)$ u. s. w. *).

§. 67.

Die Rektifikation der Curven.

I. Für eine ebene Curve, auf rechtwinklige Coordinaten x und y bezogen, gilt nach §. 17, Nro. 4) die Relation

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

*) Man vergleiche hiermit §. 78, I.

in welcher ds das Bogendifferenzial bedeutet; für den ganzen Bogen s ergiebt sich hieraus die Rektifikationsformel:

$$1)\qquad s = \int dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Die willkürliche Constante, welche dem Integrale beigefügt werden kann, findet ihre Bestimmung dadurch, dass man festsetzt, von welchem Anfangspunkte aus der Bogen gerechnet werden soll; heisst x_0 die Abscisse dieses Punktes, so muss $s = 0$ werden für $x = x_0$. Will man sich polarer statt rechtwinkliger Coordinaten bedienen, so ist nach §. 19 Nro. 8):

$$ds = \sqrt{r^2 du^2 + dr^2} = du \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{du}\right)^2}$$

und mithin durch Integration:

$$2)\qquad s = \int du \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{du}\right)^2},$$

wo sich die Integralconstante durch die Polarcoordinaten des Bogenanfanges bestimmt.

α. Für die Parabel, deren Gleichung wir in der Form

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

darstellen, ergiebt sich nach Nro. 1):

$$s = \int dx \sqrt{1+\left(\frac{x}{p}\right)^2} = \frac{1}{p}\int dx \sqrt{p^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{p}\left\{\tfrac{1}{2}x\sqrt{p^2+x^2} + \tfrac{1}{2}p^2\, l(x+\sqrt{p^2+x^2})\right\} + Const.$$

Wenn der Bogen im Scheitel anfangen soll, so muss $s = 0$ werden für $x = 0$; man hat demnach

$$0 = \frac{1}{p}\left\{\tfrac{1}{2}p^2\, l(p)\right\} + Const.;$$

mithin durch Elimination der Constante:

$$3)\qquad s = \frac{1}{2}\,\frac{x\sqrt{p^2+x^2}}{p} + \tfrac{1}{2}p\, l\left(\frac{x+\sqrt{p^2+x^2}}{p}\right).$$

Nicht ohne Interesse ist es, diese Rektifikation der Parabel mit der Quadratur der Hyperbel zu vergleichen. Construirt man nämlich eine gleichseitige Hyperbel mit der Halbachse p und nimmt die Nebenachse derselben zur Abscissenachse, so ist die Gleichung der Curve

$$y^2 - x^2 = p^2 \text{ oder } y = \sqrt{p^2+x^2};$$

mithin die Fläche derselben

$$F = \int dx\sqrt{p^2 + x^2},$$

wobei für $x = 0$ auch $F = 0$ werden muss, wenn die Fläche von der Ordinatenachse ab gerechnet wird; mit dem Vorigen verglichen, giebt dies

$$s = \frac{F}{p} \text{ oder } F = ps$$

als Relation zwischen dem Parabelbogen über x und der über demselben x stehenden hyperbolischen Fläche. — Man wird übrigens leicht bemerken, dass sich jede Rektifikation einer ebenen Curve durch ähnliche Bemerkungen auf die Quadratur einer anderen Curve zurückführen lässt und zwar ohne vorherige Ausführung der Integration.

β. Die Ellipse. Aus der Gleichung

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

erhält man ohne Mühe die folgende:

$$s = \int dx\sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}},$$

worin ε die numerische Excentricität $\sqrt{a^2 - b^2} : a$ bezeichnet. Da die postulirte Integration in geschlossener Form nicht möglich ist, so stellen wir s in Form einer unendlichen Reihe dar. Zunächst bringen wir den in §. 65 benutzten Winkel $MOQ = w$ wieder in Rechnung, d. h. wir substituiren

$$x = a\cos w, \quad dx = -a\sin w\,dw,$$

woraus sich ergiebt:

$$s = -a\int dw\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 w},$$

und weil $\varepsilon\cos w$ ein echter Bruch ist:

$$s = -a\int dw\left\{1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2 w - \frac{1}{2.4}\varepsilon^4\cos^4 w - \ldots\ldots\right\}.$$

Die Integration der einzelnen Theile ist hier sehr leicht; denn man hat nach §. 43, Formel 11)

$$\int \cos^{2n} w\,dw$$

$$= \frac{1}{2^{2n-1}}\int\left\{\tfrac{1}{2}(2n)_n + (2n)_{n-1}\cos 2w + (2n)_{n-2}\cos 4w + \ldots\right\}dw$$

$$= \frac{1}{2^{2n-1}}\left\{\tfrac{1}{2}(2n)_n w + \tfrac{1}{2}(2n)_{n-1}\sin 2w + \tfrac{1}{4}(2n)_{n-2}\sin 4w + \ldots\right\},$$

mithin ist

$$\frac{s}{a} = Const. - w + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 . \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2} . 2_1 w + \tfrac{1}{2} . 2_0 \sin 2w)$$
$$+ \frac{1}{2.4}\varepsilon^4 . \frac{1}{2^3}(\tfrac{1}{2} . 4_2 w + \tfrac{1}{2} . 4_1 \sin 2w + \tfrac{1}{4} . 4_0 \sin 4w)$$
$$+ \cdots\cdots$$

Die Vereinigung der gleichartigen Grössen giebt ein Resultat von der Form

4) $$\frac{s}{a} = Const. - A_0 w + A_2 \sin 2w + A_4 \sin 4w + \ldots,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

5) $$\begin{cases} A_0 = 1 - \frac{1}{1}(\frac{1}{2})^2\varepsilon^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\varepsilon^4 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\varepsilon^6 - \ldots \\ A_2 = \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \frac{1}{4.8}\varepsilon^4 + \ldots \\ A_4 = \frac{1}{8.8.4}\varepsilon^4 + \ldots\ldots \end{cases}$$

Um die Constante zu bestimmen, rechnen wir den Bogen s vom Endpunkte der kleinen Halbachse aus; es ist dann $s = 0$ für $x = 0$, d. h. für $w = \frac{1}{2}\pi$, mithin

$$0 = Const. - A_0\frac{\pi}{2},$$

folglich durch Elimination der Constante:

6) $$s = a[A_0(\tfrac{1}{2}\pi - w) + A_2 \sin 2w + A_4 \sin 4w + \ldots].$$

Für $w = 0$ folgt die Länge des elliptischen Quadranten $= aA_0\frac{1}{2}\pi$ oder:

7) $$Q = \tfrac{1}{2}a\pi\left\{1 - \tfrac{1}{1}(\tfrac{1}{2})^2\varepsilon^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\varepsilon^4 - \tfrac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\varepsilon^6 - \ldots\right\}.$$

γ. Für die Hyperbel ist die Rechnung sehr ähnlich; aus der Gleichung

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

erhält man nämlich, wenn ε die Excentricität $\sqrt{a^2+b^2} : a$ bezeichnet:

$$s = \int dx \sqrt{\frac{\varepsilon^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}},$$

oder für $x = \dfrac{a}{\cos u}$:

$$s = a\int \frac{du}{\cos^2 u}\sqrt{\varepsilon^2 - \cos^2 u} = a\varepsilon \int \frac{du}{\cos^2 u}\sqrt{1 - \frac{\cos^2 u}{\varepsilon^2}}.$$

Wegen $\varepsilon > 1$ ist der Quotient $\dfrac{\cos u}{\varepsilon}$ ein echter Bruch und man kann daher eine Reihenverwandlung vornehmen; sie giebt

$$s = a\varepsilon\int\frac{du}{\cos^2 u}\left\{1 - \tfrac{1}{2}\frac{\cos^2 u}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2.4}\frac{\cos^4 u}{\varepsilon^4} - \dots\dots\right\},$$

und durch Integration der einzelnen Glieder gelangt man zu einem Resultate von der Form:

$$\frac{s}{a} = Const. + \varepsilon\tan u - B_0 u - B_2 \sin 2u - B_4 \sin 4u - \dots\dots,$$

worin zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$8)\qquad \begin{cases} B_0 = \dfrac{1}{\varepsilon}\left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\dfrac{1}{\varepsilon^2} + \tfrac{1}{6}\left(\dfrac{1.3}{2.4}\right)^2\dfrac{1}{\varepsilon^4} + \dots\dots\right] \\ B_2 = \dfrac{1}{32}\,\dfrac{1}{\varepsilon^8} + \dfrac{1}{6^4}\,\dfrac{1}{\varepsilon^5} + \dots\dots \\ B_4 = \dfrac{1}{512}\,\dfrac{1}{\varepsilon^5} + \dots\dots \end{cases}$$

Rechnen wir den Bogen s vom Scheitel der Hyperbel aus, so wird $s = 0$ für $x = a$, d. h. für $u = 0$; es ist also $Const. = 0$ und

$$9)\qquad s = a\,[\varepsilon\tan u - B_0 u - B_2 \sin 2u - B_4 \sin 4u - \dots\dots].$$

Die Verlängerung der zum Endpunkte des Bogens gehörenden Ordinate schneidet von der Asymptote ein Stück ab, dessen Grösse z heissen möge, und es ist

$$z = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}x = \varepsilon x = \frac{a\varepsilon}{\cos u};$$

die Differenz zwischen diesem Stücke und dem darunter liegenden Bogen ergiebt sich mittelst der obigen Werthe von z und s, nämlich

$$z - s = a\varepsilon\frac{1 - \sin u}{\cos u} + aB_0 u + aB_2 \sin 2u + \dots\dots$$

Lässt man x unendlich werden, wobei $\cos u = 0$ mithin $u = \frac{1}{2}\pi$ wird, so wachsen zwar z und s ins Unendliche, ihre Differenz aber nähert sich einer endlichen Grenze; denn man erhält $Lim\,(z - s) = aB_0\frac{1}{2}\pi$, oder

$$Lim\,(z - s) = \frac{a\pi}{4\varepsilon}\left\{1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{\varepsilon^2} + \tfrac{1}{8}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{1}{\varepsilon^4} + \dots\dots\right\}.$$

δ. Die Cycloide. Der Scheitel der Curve sei der Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten (wie in §. 17); es ist dann:

$$10)\qquad s = \int dx\sqrt{1 + \frac{2r - x}{x}} = \sqrt{2r}\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{2rx}.$$

Rechnen wir den Bogen gleichfalls vom Scheitel aus, so ist keine Constante hinzuzufügen, weil s mit x gleichzeitig verschwinden muss. Für $x = 2r$ folgt, dass die obere Hälfte der Cycloide dem vierfachen Halbmesser des erzeugenden Kreises, also die ganze Cycloide dem Achtfachen dieses Radius an Länge gleichkommt.

II. Für Curven doppelter Krümmung ist nach Nro. 5) in §. 20

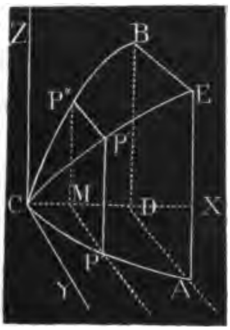
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2};$$

mithin durch Integration:

11) $$s = \int dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

wobei die unter dem Wurzelzeichen stehenden Differenzialquotienten den beiden Gleichungen der Curve zu entnehmen sind. Die Bestimmung der Integrationsconstante geschieht wie früher dadurch, dass man eine Abscisse x_0 festsetzt, für welche der Bogen in Null übergeht, d. h. sich auf seinen Anfangspunkt reduzirt.

Fig. 36.



Beispielsweise betrachten wir die Linie, welche den Durchschnitt eines vertikal stehenden parabolischen und eines horizontalen cycloidischen Cylinders bildet, Fig. 36; es sei nämlich

$$y = 2\sqrt{ax}, \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a}{x}}$$

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{2r - x}{x}},$$

wobei a die Entfernung des Brennpunktes der Parabel vom Scheitel bezeichnet, so wird

$$s = \int dx\sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{2r - x}{x}}$$

$$= \sqrt{a + 2r}\int\frac{dx}{\sqrt{x}},$$

oder:

12) $$s = 2\sqrt{(a + 2r)x} = 2\sqrt{2(\tfrac{1}{2}a + r)x},$$

wobei keine Constante hinzuzufügen ist, wenn der Bogen im gemeinschaftlichen Scheitel C der Parabel $CP'A$ und der Cycloide $CP''B$ anfangen soll. Die geometrische Bedeutung des gefundenen Werthes von s wird man durch Vergleichung mit der Formel 10) leicht erkennen.

§. 68.

Die Cubatur begrenzter Volumina.

Bereits in §. 2 haben wir gesehen, dass der Differenzialquotient eines Volumens, genommen in Beziehung auf eine Coordinate x, der letzte Querschnitt desselben ist; bezeichnen wir also ein Volumen mit V, den durch den Endpunkt von x senkrecht auf die Achse der x gelegten letzten Querschnitt desselben mit Q, so gelten die Gleichungen:

1) $$dV = Q\,dx, \qquad V = \int Q\,dx + Const.,$$

die Constante bestimmt sich dadurch, dass man festsetzt, von welcher auf der x Achse senkrechten Ebene aus das Volumen gerechnet, für welchen Werth von x also V in Null übergehen soll. Als Beispiel mag die Cubatur der Flächen zweiten Grades dienen.

α. Das **Ellipsoid**. Die Gleichung dieser Fläche ist bekanntlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,$$

der Querschnitt am Ende von x senkrecht zur x Achse gelegt, bildet bekanntlich eine Ellipse, deren Halbachsen $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ und $\frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ sind, deren Fläche mithin ist:

$$Q = \pi\,\frac{bc}{a^2}\,(a^2 - x^2).$$

Nach Nro. 1) wird nun:

2) $$V = \pi\,\frac{bc}{a^2}\,(a^2 x - \tfrac{1}{3}x^3),$$

wo keine Constante hinzuzufügen ist, wenn das Volumen von der yz Ebene an gerechnet wird, d. h. für $x = 0$ verschwinden muss. Die Formel 2) giebt das Volumen einer Zone, welche, vom Mittelpunkte des Ellipsoides aus auf der x Achse gerechnet, die Dicke x besitzt. Für $x = a$ geht dieselbe in das halbe Ellipsoid über $= \frac{2}{3}\pi\,a\,b\,c$; das Volumen des ganzen Ellipsoides ist demnach $= \frac{4}{3}\pi abc$. Ist $c = b < a$, so erhält man $\frac{4}{3}\pi\,a b^2$ für den Inhalt des gestreckten Rotationsellipsoides, $c = a > b$ giebt $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ als Inhalt des abgeplatteten Rotationsellipsoides, für $c = b = a$ endlich ergiebt sich das Volumen einer mit dem Halbmesser a beschriebenen Kugel.

β. Das einfache Hyperboloid, dessen Gleichung

$$-\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

sein möge, hat zum Querschnitt eine mit den Halbachsen $\frac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2}$ und $\frac{c}{a}\sqrt{a^2+x^2}$ beschriebene Ellipse, daher ist:

$$3)\qquad V=\int\pi\,\frac{bc}{a^2}\,(a^2+x^2)\,dx=\pi\,\frac{bc}{a^2}(a^2x+\tfrac{1}{3}x^3),$$

wo keine Constante beigefügt werden darf, wenn wir das Volumen von der yx Ebene aus rechnen. Für $x=a$ ergiebt sich das bemerkenswerthe Resultat, dass die Zone von der Dicke a mit einem aus den Halbachsen a, b, c beschriebenen Ellipsoide gleichen Inhalt besitzt.

γ. Das getheilte Hyperboloid, dessen Gleichung in der Form

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

dargestellt werden kann, hat zum Querschnitt eine aus den Halbachsen $\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ und $\frac{c}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ beschriebene Ellipse, welche für $x<a$ imaginär ist; daher wird

$$V=\int\pi\,\frac{bc}{a^2}\,(x^2-a^2)\,dx=\pi\,\frac{bc}{a^2}\,(\tfrac{1}{3}x^3-a^2x)+Const.;$$

rechnen wir das Volumen V vom Scheitel der Fläche aus, so wird $V=0$ für $x=a$, mithin $0=-\tfrac{2}{3}abc+Const.$ und:

$$4)\qquad V=\pi\,\frac{bc}{a^2}\,(\tfrac{1}{3}x^3-a^2x+\tfrac{2}{3}a^3).$$

Die Formel giebt jetzt das Volumen einer Kappe von der Höhe $x-a$; für $x=2a$ erhält man das bemerkenswerthe Resultat, dass die Kappe von der Höhe a gleichen Inhalt mit einem aus den Halbachsen a, b, c construirten Ellipsoide besitzt.

δ. Das elliptische Paraboloid hat zur Gleichung

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x,$$

und der Querschnitt ist eine Ellipse aus den Halbachsen $\sqrt{2px}$ und $\sqrt{2qx}$, mithin:

$$5)\qquad V=\int 2\pi\sqrt{pq}\;x\,dx=\pi\sqrt{pq}\,x^2,$$

und zwar bedarf es keiner Constante, wenn man das Volumen vom

Scheitel aus rechnet, V also den Inhalt einer Kappe von der Höhe x bedeuten soll.

ε. Das hyperbolische Paraboloid mag durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

charakterisirt werden; der in der Entfernung x senkrecht zur x Achse gelegte Querschnitt ist eine Parabel, von welcher die xy Ebene ein begrenztes Stück abschneidet; betrachten wir nur das über der xy Ebene liegende Volumen, so ist Q jenes Stück und

$$Q = 2 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{2p} \cdot x\sqrt{\frac{q}{p}},$$

mithin:

$$6)\qquad V = \tfrac{2}{3}\,\frac{\sqrt{q}}{p\sqrt{p}}\int x^3\,dx = \tfrac{1}{6}\,\frac{\sqrt{q}}{p\sqrt{p}}\,x^4,$$

und es bedarf hier keiner Constante, wenn V mit x gleichzeitig verschwinden, V also den Inhalt des Raumes bedeuten soll, welcher nach unten von der xy Ebene, seitwärts von dem genannten Querschnitte und oberhalb durch die sattelförmige Fläche begrenzt wird. Stellt man V in der Form

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot x \cdot \frac{x^2}{2p} \cdot x\sqrt{\frac{q}{p}}$$

dar, so wird man die geometrische Bedeutung des Ausdruckes leicht erkennen.

Sehr einfach gestaltet sich die Formel 1) in dem Falle, wo die Begrenzungsfläche des Volumens durch Umdrehung einer ebenen Curve um die x Achse entstanden ist; der Querschnitt Q bildet hier einen Kreis, der die Ordinate der Curve zum Radius hat, und wenn wir diese zur Abscisse x gehörige Ordinate wie gewöhnlich mit y bezeichnen, so wird aus der Formel 1) die folgende:

$$7)\qquad V = \pi\int y^2\,dx + Const.,$$

deren Anwendung leicht genug ist.

Im Allgemeinen verlangt die Cubatur eines begrenzten Raumes jederzeit zwei Integrationen; die eine dient, um vorerst den Querschnitt Q zu ermitteln, die zweite leitet hieraus das Volumen V her; diese Bemerkung liesse sich auch in die Zeichensprache der Analysis übertragen, indem man V unter der Form eines Doppelintegrales darstellte, doch versparen wir das Nähere hierüber bis dahin, wo von den mehrfachen bestimmten Integralen und ihrer geometrischen Bedeutung die Rede sein wird.

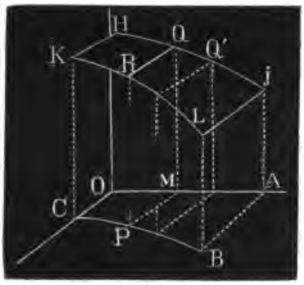
§. 69.

Die Complanation der Flächen.

Wenn nicht besondere Umstände die Aufgabe vereinfachen, so erfordert die Inhaltsbestimmung einer gekrümmten Fläche im Allgemeinen eine doppelte Integration, zu deren Ausführung oftmals besondere Kunstgriffe nöthig sind; wir beschäftigen uns daher vorläufig nur mit der Complanation solcher Flächen, bei welchen mit einer einfachen Integration auszukommen ist.

I. Die Cylinderflächen. In Fig. 37 sei $OM = x$, $MP = y$, $MQ = PR = z$, ferner $z = \psi(x)$ die Gleichung der Leitlinie HQJ eines horizontal parallel zur Achse der y liegenden Cylinders und $y = \varphi(x)$ die Gleichung der Leitlinie CPB eines vertikal stehenden Cylinders; beide Cylinderflächen durchschneiden sich in der doppelt gekrümmten Linie KRL, und es entsteht zugleich auf dem horizontalen Cylinder eine begrenzte Fläche $HKRQ$, deren Grösse f ermittelt werden soll. Lassen wir x um dx wachsen, so nimmt f um einen Streifen df zu, der als ein Rechteck angesehen werden kann, von welchem $QR = MP = y$ die eine Seite und QQ', das Bogendifferenzial der Linie HJ, die andere Seite ausmacht; der hierbei begangene Fehler (nämlich die dreieckige Fläche, welche von einer Linie durch R parallel zu QQ' abgeschnitten würde), besteht nur aus Grössen zweiter und höherer Ordnung und fällt deshalb weg; so ist nun für $HQ = s$:

Fig. 37.



$$df = y\,ds = y\,dx\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

mithin:

$$f = \int y\,dx\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}. \tag{1}$$

Als Anwendung hiervon geben wir die Berechnung der cylindrischen

Gewölbflächen, für welche die Linie HQJ die sogenannte Wölbungscurve ist.

α. Kreisförmiges Klostergewölbe. Es sei in Fig. 38 die Wölbungslinie HQA ein Stück eines Kreises, der Halbmesser desselben $= r$, ferner die halbe Spannweite $OA = a$, der Pfeil $OH = h$, $AB = b$, ferner in Fig. 39 $OE = g$, $O'E = k$, so ist die Gleichung der Wölbungscurve

$$z = -g + \sqrt{r^2 - (x+k)^2},$$

Fig. 38.

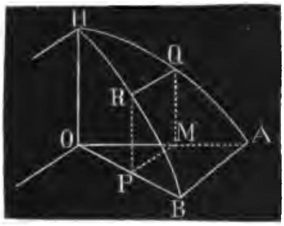
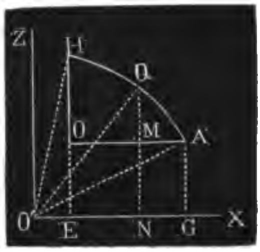


Fig. 39.



woraus man findet

$$\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-(x+k)^2}},$$

der Bogen s wäre, wenn wir ihn des Folgenden wegen anmerken:

$$s = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-(x+k)^2}}.$$

Die Horizontalprojektion des Gewölbgrathes BRH bildet eine Gerade, deren Gleichung $y = \frac{b}{a}x$ ist, und man hat daher nach Nro. 1):

$$f = \frac{br}{a}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{r^2-(x+k)^2}}$$

$$= \frac{br}{a}\int \frac{(x+k)\,dx}{\sqrt{r^2-(x+k)^2}} - \frac{bk}{a}\int \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-(x+k)^2}}$$

$$= -\frac{br}{a}\sqrt{r^2-(x+k)^2} - \frac{bk}{a}s + Const.$$

Für $x = 0$ wird $f = 0$ und $s = 0$, mithin

$$0 = -\frac{br}{a}\sqrt{r^2-k^2} + Const.,$$

und durch Wegschaffung der Constante:

$$f = \frac{br}{a}\left[\sqrt{r^2-k^2} - \sqrt{r^2-(x+k)^2}\right] - \frac{bk}{a}s.$$

Da es weniger auf die Fläche $HQR = f$, als vielmehr auf die ganze Fläche ABH ankommt, so setzen wir $x = a$, wobei $ABH = F$ und der Bogen $AH = S$ sein möge; wir erhalten so:

$$F = \frac{br}{a}\left[\sqrt{r^2 - k^2} - \sqrt{r^2 - (a+k)^2}\right] - \frac{bk}{a} S.$$

Aus Fig. 39 erkennt man leicht die geometrische Bedeutung der eingeklammerten Differenz; sie ist $h + g - g$, und so hat man die elegante Formel:

$$2) \qquad F = \frac{b}{a}\left(hr - kS\right),$$

wo a, b, h, k, r unmittelbar bekannt sind und der Bogen S leicht genug berechnet werden kann. Für Stichbögen wird $k = 0$ und die Formel dadurch einfacher, bei gothischen Bögen ist $g = 0$, doch giebt dies keine Abkürzung, weil g in der Gleichung 2) nicht vorkommt.

β. Elliptisches Klostergewölbe. Ist die Wölbungslinie HQA ein Ellipsenquadrant, dessen Halbachsen $a = OA$ und $h = OH$ heissen mögen, so ist

$$z = \frac{h}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

und im Uebrigen wie vorhin $y = \frac{b}{a} x$. Hinsichtlich des ds sind zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich $a > h$ oder $a < h$, das Gewölbe also ein gedrücktes oder ein überhöhtes ist; im ersten Falle hat man

$$dx\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{a}}$$

und im zweiten Falle

$$dx\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + \lambda^2 x^2}{a^2 - x^2}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{h^2 - a^2}{a}};$$

mithin entsprechend diesen zwei Fällen:

$$f = \frac{b}{a}\int x\, dx\sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}},$$

$$f = \frac{b}{a}\int x\, dx\sqrt{\frac{a^2 + \lambda^2 x^2}{a^2 - x^2}}.$$

Mittelst der Substitution $a^2 - x^2 = a^2 u^2$ verwandeln sich diese Gleichungen in die folgenden:

$$f = -ab\int du\sqrt{1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 u^2},$$

$$f = -ab\int du\sqrt{1 + \lambda^2 - \lambda^2 u^2},$$

und hier ist die Integration ohne Schwierigkeit ausführbar. Bestimmt man die Constante so, dass f für $x = 0$ verschwindet, und setzt nachher $x = a$, so erhält man für die Fläche $ABHA$:

$$3) \qquad F = \tfrac{1}{2}\, ab \left\{ 1 + \frac{1-\varepsilon^2}{2\,\varepsilon}\, l\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) \right\}, \quad a > h,$$

$$4) \qquad F = \tfrac{1}{2}\, ab \left\{ 1 + \frac{1+\lambda^2}{\lambda}\, Arctan\, \lambda \right\}, \quad a < h.$$

γ. Kreuzgewölbe bestehen bekanntlich aus den Stücken, welche übrig bleiben, wenn die Flächen der Klostergewölbe von den Flächen vollständiger Tonnengewölbe abgezogen werden; ist z. B. in Fig. 40 $ABHA$ ein Theil von einem Klostergewölbe und $ABKH$ ein vollständiges Tonnengewölbe, so ist der Rest BHK ein Stück von einem Kreuzgewölbe, dessen übrige Stücke diesem entweder congruent oder auf ganz ähnliche Weise entstanden sind. Bezeichnen wir die Fläche BHK mit F^{+}, ABH mit F, die Länge der Wölbungscurve mit S, und AB mit b, so ist in jedem Falle:

$$5) \qquad F^{+} = bS - F,$$

wo man für F einen der früheren Werthe zu substituiren hat.

Fig. 40.

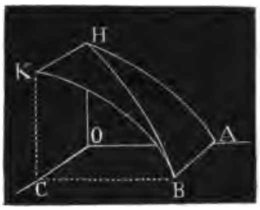
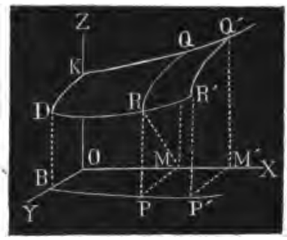


Fig. 41.



II. Umdrehungsflächen. Eine ebene Curve KQQ', Fig. 41, deren Gleichung $z = \psi(x)$ sein möge, werde um die Achse der x herumgedreht und die entstandene Fläche durch einen vertikalen Cylinder geschnitten, dessen Leitlinie BPP' die Gleichung $y = \varphi(x)$ haben soll. Die gebildete Fläche $KDRQ$ heisse f, so entspricht der Aenderung dx eine Flächenänderung $df = QQ'R'R$, deren Betrag, abgesehen von unendlich kleinen Grössen höherer Ordnungen, mit dem Inhalte eines Rechtecks aus den Seiten QR und QQ' übereinstimmt. Aus der Natur der Umdrehungsfläche folgt aber $MQ = MR$, ferner

$$\cos PMR = \sin QMR = \frac{MP}{MR} = \frac{y}{z};$$

mithin

$$\angle\, QMR = Arcsin\, \frac{y}{z},$$

und da QR ein mit dem Halbmesser MQ beschriebener Kreisbogen ist:

$$QR = z\, Arcsin\, \frac{y}{z}.$$

Für die andere Seite QQ' des betreffenden Rechtecks hat man

$$QQ' = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Durch Substitution der Werthe von QR und QQ' in die Gleichung $df = QR \,.\, QQ'$ und durch nachherige Integration folgt nun:

6) $$f = \int z\, Arcsin\, \frac{y}{z} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Als Beispiel diene die Bestimmung der Fläche von einem Kugelgewölbe (böhmischen Gewölbe). Die Umdrehungsfläche ist hier eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten und deren Halbmesser r sei, Fig. 42; es ist dann $z = \sqrt{r^2 - x^2}$ und man findet daraus:

Fig. 42.

$$z \,.\, \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = r.$$

Die Curve BP ist eine Gerade parallel zur Abscissenachse, also $y = OB = b$; aus der Gleichung 6) wird jetzt die folgende:

$$f = r \int Arcsin\, \frac{b}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx,$$

oder bei theilweiser Integration:

$$f = rx\, Arcsin \frac{b}{\sqrt{r^2 - x^2}} - br \int \frac{x^2\, dx}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - b^2 - x^2}}$$

$$= rx\, Arcsin \frac{b}{\sqrt{r^2 - x^2}} - br \int \left[\frac{r^2}{r^2 - x^2} - 1\right] \frac{dx}{\sqrt{r^2 - b^2 - x^2}},$$

wo sich wieder eine Integration ausführen lässt, so dass man erhält:

$$f = rx\, Arcsin \frac{b}{\sqrt{r^2 - x^2}} + br\, Arcsin\, \frac{x}{\sqrt{r^2 - b^2}}$$

$$- br^3 \int \frac{dx}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - b^2 - x^2}}.$$

Setzt man in dem noch übrigen Integrale $x = \sqrt{r^2 - b^2} \sin u$, so wird

$$\int \frac{dx}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - b^2 - x^2}} = \int \frac{du}{r^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}$$

$$= \frac{1}{br} \operatorname{Arctan}\left(\frac{b}{r} \tan u\right) = \frac{1}{br} \operatorname{Arctan} \frac{bx}{r\sqrt{r^2 - b^2 - x^2}}.$$

Demnach ist durch Substitution in die vorige Gleichung:

$$f = rx \operatorname{Arcsin} \frac{b}{\sqrt{r^2 - x^2}} + br \operatorname{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{r^2 - b^2}}$$

$$- r^2 \operatorname{Arctan} \frac{bx}{r\sqrt{r^2 - b^2 - x^2}},$$

wo es keiner Integrationsconstante bedarf, weil die Fläche $HKRQ = f$ mit x gleichzeitig verschwinden muss. Schreiben wir endlich um grösserer Symmetrie willen $a = OA$ für x und F für f, und bemerken, dass

$$\operatorname{Arctan} \frac{ba}{r\sqrt{r^2 - b^2 - a^2}} = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{b}{\sqrt{r^2 - a^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{r^2 - b^2}}\right)$$

ist, so können wir dem Endresultate in sofern eine elegante Gestalt ertheilen, als wir sagen: es ist

7) $$F = r\,(aA + bB - rC),$$

wobei die drei Bögen A, B, C mittelst der Gleichungen

8) $$\sin A = \frac{b}{\sqrt{r^2 - a^2}},\ \sin B = \frac{a}{\sqrt{r^2 - b^2}},\ \sin C = \sin A \sin B$$

zu bestimmen sind.

Die allgemeine Formel 6) vereinfacht sich sehr wesentlich in dem Falle, wo der zwischen den positiven Seiten der drei Coordinatenebenen liegende Octant der Rotationsfläche selbst betrachtet wird, die Curve BP also congruent mit KQ ist. Es wird dann $z = y$, folglich:

9) $$f = \tfrac{1}{2}\pi \int y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

und wenn es sich um die ganze ringsherum liegende Fläche handelt:

10) $$F = 2\pi \int y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Hiernach findet man z. B. die Oberfläche einer von der yz Ebene aus gerechneten Zone des abgeplatteten Rotationsellipsoides, indem man $y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$ nimmt und F mit x gleichzeitig verschwinden lässt; die sehr einfache Rechnung giebt:

11) $$F = \pi \frac{ax}{k} \sqrt{k^2 + x^2} + \pi a k l \left(\frac{x + \sqrt{k^2 + x^2}}{k}\right),$$

worin zur Abkürzung

$$k = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

gesetzt worden war. Für $x = b$ und durch Verdoppelung des entstehenden Werthes folgt noch:

12) $$E = 2a^2\pi + \frac{2ab^2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \, l\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)$$

als Oberfläche des ganzen abgeplatteten Rotationsellipsoides.

Cap. XV.

Die einfachen bestimmten Integrale.

§. 70.

Fundamentaleigenschaften einfacher bestimmter Integrale.

I. Wir knüpfen an die Betrachtungen des §. 47 wieder an, denen zufolge unter dem Symbole

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

der Grenzwerth verstanden wird, gegen welchen die Summe

1) $$f(a)\delta_1 + f(a+\delta_1)\delta_2 + f(a+\delta_1+\delta_2)\delta_3 + \dots\dots \dots\dots + f(a+\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_{n-1})\,\delta_n$$

convergirt, wenn die Grössen $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n$ der Null näher und näher kommen, während sie immer der Bedingung $\delta_1+\delta_2+\delta_3+\dots+\delta_n$ genügen müssen; zugleich erkannten wir die geometrische Bedeutung dieser Definition für den Fall, dass x als Abscisse und $y = f(x)$ als zugehörige Ordinate einer Curve angesehen wird; es war nämlich das obige bestimmte Integral gleich der Fläche, welche die Strecke $b-a$ der Abscissenachse zur Basis hat, seitwärts durch die Ordinaten $f(a)$, $f(b)$ und oberhalb durch die genannte Curve begrenzt wird (Fläche $ABDC$ in Fig. 28). Später ergab sich, dass das bestimmte Integral auch als Differenz zweier Spezialwerthe des unbestimmten Integrales

2) $$\int f(x)\,dx = F(x) + Const.$$

betrachtet werden konnte, und es war

3) $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

unter der Voraussetzung, dass die Funktion $f(x)$ innerhalb des Intervalles von $x = a$ bis $x = b$ keine Unterbrechung der Continuität erleidet. — Welche von diesen zwei Definitionen des bestimmten Integrales man als die primäre wählen will, ist an sich gleichgültig, wenn man an den Begriffen festhält; wir entscheiden uns für die erste, weil sie in gewisser Rücksicht die allgemeinere ist. Die zweite Definition setzt nämlich voraus, dass man das unbestimmte Integral von $f(x)\,dx$ bereits kenne, und hierin liegt wiederum die Voraussetzung, dass die Natur der Funktion $f(x)$ bekannt sei; eine solche Beschränkung findet bei der ersten Definition nicht statt, es reicht bei ihr hin, wenn das jedem x von $x = a$ bis $x = b$ entsprechende y angebbar ist, gleichgültig, wo man es herbekommen hat. Wer z. B. mit dem Bleistift einen beliebigen regellosen (nur wenigstens zusammenhängenden) Zug auf das Papier wirft, weiss nach der ersten Definition recht gut die Bedeutung des bestimmten Integrales, da mit dem Zuge selbst eine Fläche entstanden ist, er kann den Werth desselben nach §. 66 oder auf eine mechanische Weise*) mit vieler Genauigkeit auffinden, während dies nach der zweiten Definition erst dann geschehen könnte, wenn die (vielleicht gar nicht angebbare) Gleichung der entstandenen Curve bekannt wäre.

II. Behält die Funktion $f(x)$ innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ dasselbe Vorzeichen, so kommt letzteres den Grössen $f(a)$, $f(a+\delta_1)$, ... $f(a+\delta_1+..+\delta_{n-1})$ gemeinschaftlich, mithin auch dem ganzen Integrale zu; geometrisch heisst dies, eine Curve mit durchaus positiven oder durchaus negativen Ordinaten besitzt eine positive, resp. negative Fläche.

Wendet man die Definition des bestimmten Integrales auf einen Ausdruck von der Form

$$f(x) = A\Phi(x) + B\Psi(x)$$

an, so entsteht eine Doppelsumme, die sich zu einer einfachen zusammenziehen lässt; man erhält nämlich

$$4)\quad \int_a^b \Big\{ A\Phi(x) + B\Psi(x) \Big\}\, dx = A\int_a^b \Phi(x)\,dx + B\int_a^b \Psi(x)\,dx,$$

was sich mittelst der Gleichung 3) verifiziren liesse.

Aus den beiden soeben gemachten Bemerkungen zusammen folgt noch ein Satz, der von häufigem Gebrauche ist. Setzen wir nämlich

*) Unter den mechanischen Vorrichtungen zur Ermittelung des Flächeninhaltes ganz beliebiger Figuren empfiehlt sich das Planimeter von Weltli nach seiner Verbesserung durch Hansen.

voraus, es sei $f(x)$ ein Produkt zweier stetigen Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, deren erste innerhalb des Intervalles a bis b für $x = \alpha$ ihren grössten und für $x = \beta$ ihren kleinsten Werth annehmen möge, so ist für jenes Intervall $\varphi(\alpha) - \varphi(x)$ positiv, $\varphi(\beta) - \varphi(x)$ negativ, ferner, wenn $\psi(x)$ von a bis b positiv bleibt, auch $[\varphi(\alpha) - \varphi(x)]\psi(x)$ positiv, dagegen $[\varphi(\beta) - \varphi(x)]\psi(x)$ negativ; hieraus folgt nach dem Obigen

$$\int_a^b [\varphi(\alpha) - \varphi(x)]\psi(x)\,dx \text{ positiv}; \int_a^b [\varphi(\beta) - \varphi(x)]\psi(x)\,dx \text{ negativ}.$$

Durch Integration der einzelnen Theile giebt dies

$$\varphi(\alpha)\int_a^b \psi(x)\,dx > \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx > \varphi(\beta)\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Will man aus dieser Ungleichung eine Gleichung bilden, so lasse man in dem Ausdrucke

$$\varphi(\xi)\int_a^b \psi(x)\,dx$$

die willkürliche Grösse ξ das Intervall a bis b durchlaufen und beachte, dass derselbe einmal kleiner und einmal grösser als das Integral

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx$$

wird; wegen der Stetigkeit von $\varphi(\xi)$ muss es daher einen zwischen a und b liegenden Werth von ξ geben, für welchen beide Ausdrücke gleich werden. Diesen Werth von ξ können wir mit $a + \vartheta(b - a)$ bezeichnen, wo ϑ ein positiver echter Bruch ist; wir haben daher die Gleichung

$$5) \qquad \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \varphi[a + \vartheta(b-a)]\int_a^b \psi(x)\,dx,$$

und zwar unter der Determination, dass $\varphi(x)$ stetig und $\psi(x)$ stetig und zugleich positiv bleibt von $x = a$ bis $x = b$. Beispielsweise ist nach diesem Satze

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin x \,.\, x^{m-1}\,dx = \sin\frac{\vartheta\pi}{4} \,.\, \frac{(\frac{1}{4}\pi)^m}{m},$$

woraus u. A. folgt, dass der Werth des Integrales für unendlich wachsende m gegen die Null convergirt, was man auf anderem Wege nicht so leicht finden würde.

Nimmt man einfach $\psi(x) = 1$, so wird aus Nro. 5)

$$6)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = (b-a)\,\varphi[a+\vartheta(b-a)],$$

was eine sehr einfache geometrische Deutung zulässt.

III. Betrachten wir nun die Veränderungen, welche im bestimmten Integrale entstehen, wenn das Integrationsintervall zu- oder abnimmt. Aus der in Nro. I. gegebenen Definition folgt die nachstehende auch geometrisch leicht zu erklärende Gleichung:

$$7)\qquad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

und umgekehrt.

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Setzt man in Nro. 5) $c = a$ und berücksichtigt, dass jederzeit

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

sein muss, so folgt noch

$$8)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

und es würde sehr leicht sein, diese Eigenschaften mittelst der Gleichung 3) zu verifiziren.

Von besonderem Nutzen ist oft folgende Bemerkung. Nach Nro. 5) hat man

$$\int_{\mu-\gamma}^{\mu+\gamma} f(x)\,dx = \int_{\mu-\gamma}^{\mu} f(x)\,dx + \int_{\mu}^{\mu+\gamma} f(x)\,dx;$$

entwickelt man die Integrale der rechten Seite nach Nro. 2), indem man der Einfachheit wegen $\delta_1 = \delta_2 \ldots = \delta_n = \delta$ setzt, so ist in jedem Falle $\delta = \dfrac{\gamma}{n}$ und die rechte Seite der vorigen Gleichung bildet den Grenzwerth von:

$$f(\mu-\gamma)\delta + f(\mu-\gamma+\delta)\delta + f(\mu-\gamma+2\delta)\delta + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + f(\mu-\gamma+\overline{n-1}\,\delta)\delta$$
$$+ f(\mu+\gamma)\delta + f(\mu+\gamma-\delta)\delta + f(\mu+\gamma-2\delta)\delta + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + f(\mu+\gamma-\overline{n-1}\,\delta)\delta,$$

wobei die dem zweiten Integrale entsprechende Reihe die umgekehrte Anordnung erhalten hat. Ist nun für jedes ξ

9) $$f(\mu-\xi) = f(\mu+\xi),$$

so wird die zweite Reihe der ersten gleich und es folgt daraus:

10) $$\int_{\mu-\gamma}^{\mu+\gamma} f(x)\,dx = 2\int_{\mu-\gamma}^{\mu} f(x)\,dx.$$

Wäre dagegen

11) $$f(\mu-\xi) = -f(\mu+\xi),$$

so heben sich alle Glieder der obigen Reihen gegenseitig auf und es bleibt:

12) $$\int_{\mu-\gamma}^{\mu+\gamma} f(x)\,dx = 0.$$

Die geometrische Bedeutung dieser Ergebnisse ist folgende: wenn $f(\mu-\xi) = f(\mu+\xi)$, so besteht die zu quadrirende Curve aus zwei congruenten Theilen von gleicher Lage CN und DN, Fig. 43, wo $OM = \mu$ und $AM = \gamma$. Die Fläche $ABDNC$ beträgt daher das Doppelte von der Fläche $AMNC$; wenn dagegen $f(\mu-\xi) = -f(\mu+\xi)$, so sind jene Theile zwar ebenfalls congruent, aber von entgegengesetzter Lage; die entsprechenden Flächen $AMNC$

Fig. 43.

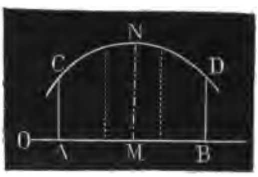
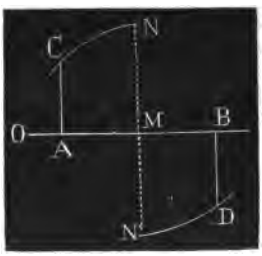


Fig. 44.



und $BMN'D$ besitzen dann gleiche Grösse und entgegengesetzte Vorzeichen (Fig. 44), es ist mithin die Fläche $ABDN'NC = 0$. Mittelst dieser Bemerkungen findet man z. B. ohne alle Rechnung, dass

$$\int_0^{\pi} sin^m x\, dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} sin^m x\, dx,$$

ebenso, dass

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} cos^m x\, dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} cos^m x\, dx$$

sein muss, ferner bei ganzen und positiven n:

$$\int_0^{\pi} cos^{2n-1} x\, dx = 0, \quad \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} sin^{2n-1} x\, dx = 0.$$

IV. Hier ist zugleich der Ort, um die Bedeutung des bestimmten Integrales

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

für den Fall zu erörtern, dass die Funktion $f(x)$ innerhalb des Integrationsintervalles eine Unterbrechung der Continuität erleidet. Träte eine solche ein für $x = \varkappa$, wo $b > \varkappa > a$, so kann man nach Nro. 5) die Zerlegung

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{\varkappa-0} f(x)\, dx + \int_{\varkappa+0}^b f(x)\, dx$$

Fig. 45.

vornehmen, die geometrisch bedeutet, dass die über der Strecke $AB = b - a$ (Fig. 45) stehende Fläche $ABDL'LC$ aus zwei Theilen $AKLC$ und $KBDL'$ zusammengesetzt ist, und dass $KL = f(\varkappa - 0)$ die letzte Ordinate des ersten und $KL' = f(\varkappa + 0)$ die erste Ordinate des zweiten Stückes sein soll. Statt der obigen Gleichung lässt sich die folgende setzen:

$$\int_a^b f(x)\, dx = Lim\left\{\int_a^{\varkappa-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{\varkappa+\delta}^b f(x)\, dx\right\},$$

wenn man unter δ und ε zwei in Null übergehende Grössen versteht. Will man die Integration mittelst der Gleichung

$$\int f(x)\, dx = F(x) + Const.$$

ausführen, so wird in diesem Falle

13) $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) - Lim\left\{F(x+\delta) - F(x-\varepsilon)\right\},$$

also gilt dann die Gleichung 4) ohne Weiteres nicht mehr, sie bedarf im Gegentheil einer Correktion. So wäre es z. B. unrichtig,

$$\int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-2} - \frac{1}{1-0} = -2$$

setzen zu wollen, ohne zu beachten, dass die Funktion $\frac{1}{(1-x)^2}$ für $x = 1$ discontinuirlich wird; der wahre Werth ist

$$\frac{1}{1-2} - \frac{1}{1-0} - Lim\left\{\frac{1}{1-(1+\delta)} - \frac{1}{1-(1-\varepsilon)}\right\}$$
$$= -2 + \infty.$$

Auf gleiche Weise wäre es falsch,

$$\int_{-b}^{b} \frac{dx}{x} = lb - l(-b) = l(-1)$$

zu nehmen, wobei eine reelle Curve zu einer imaginären Fläche käme; man muss im Gegentheil, da $\frac{1}{x}$ für $x = 0$ eine Unterbrechung der Continuität erleidet, die Rechnung so stellen:

$$\int_{-b}^{b} \frac{1}{x}\,dx = lb - l(-b) - Lim\left\{l(0+\delta) - l(0-\varepsilon)\right\}$$
$$= Lim\, l\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right);$$

da δ und ε auf beliebige Weise in Null übergeführt werden dürfen, so ist $\frac{\varepsilon}{\delta}$ eine unbestimmte Grösse, mithin der Werth des obigen Integrales so lange nicht genau bestimmt, als man keine Voraussetzung darüber macht, *wie* ε und δ zu Null werden sollen. Dieses Resultat darf nicht befremden, wenn man sich erinnert, dass jenes Integral, geometrisch betrachtet, die Differenz zweier unendlichen Flächen ist und der Ausdruck $\infty - \infty$ immer den Charakter der Unbestimmtheit trägt; setzt man $\varepsilon = \delta$, so ergiebt sich der sogenannte *Hauptwerth* des Integrales und zwar ist er $= 0$. Man würde denselben auch dadurch gefunden haben, dass man mittelst der Formel

$$\int \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2} l\,(x^2) + Const.$$

integrirt hätte, welche sich durch Differenziation als richtig ausweist.

§. 71.

Substitution neuer Variabelen in bestimmten Integralen.

Wie bei unbestimmten, so kann man auch bei bestimmten Integralen eine neue Variabele durch Substitution einführen, nur hat man dabei die entsprechenden Aenderungen der Grenzen zu beachten. Setzt man nämlich in dem Integrale

$$\int_a^b f\,[\varphi(x)]\,dx$$

$\varphi(x) = y$, so erhält man wie früher (in §. 49, III.) $x = \psi(y)$, $dx = \psi'(y)\,dy$; ist nun $x = a$ geworden, so hat y den Werth $\varphi(a)$ angenommen, der oberen Integrationsgrenze $x = b$ entspricht auf gleiche Weise $y = \varphi(b)$ und man hat daher

$$1)\qquad \int_a^b f\,[\varphi(x)]\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\psi'(y)\,dy,$$

und wenn sich die Integration rechter Hand ausführen lässt, so ist zugleich der Werth des ursprünglichen Integrales gefunden, ohne dass man, wie bei unbestimmten Integralen, die Substitution $y = \varphi(x)$ rückwärts anzuwenden nöthig hätte. So ergiebt sich z. B. für $\varphi(x) = hx + k$

$$2)\qquad \int_a^b f(hx+k)\,dx = \frac{1}{h}\int_{ah+k}^{bh+k} f(y)\,dy;$$

spezieller für $a = 0$ und $b = 1$, und umgekehrt geschrieben

$$\int_k^{h+k} f(y)\,dy = h\int_0^1 f(hx+k)\,dx,$$

oder, wenn $k = \alpha$, $h = \beta - \alpha$ gesetzt wird:

$$3)\qquad \int_\alpha^\beta f(y)\,dy = (\beta-\alpha)\int_0^1 f[\alpha + (\beta-\alpha)x]\,dx,$$

wodurch ein Integral mit beliebigen Grenzen auf ein anderes mit den Grenzen 0 und 1 zurückgeführt ist. Setzt man weiter

$$x = \frac{z}{1+z}, \text{ also } z = \frac{x}{1-x},$$

so erhält man zunächst

$$f\,[\alpha + (\beta - \alpha)\,x]\,dx = f\left(\frac{\alpha+\beta z}{1+z}\right)\frac{dz}{(1+z)^2};$$

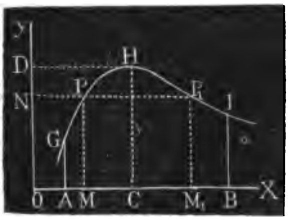
wenn ferner $x = 0$ und $x = 1$ geworden ist, so hat z die Werthe $z = 0$ und $z = \frac{1}{0} = \infty$ angenommen; so wird aus Nro. 3):

$$4)\qquad \int_\alpha^\beta f(y)\,dy = (\beta - \alpha)\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha+\beta z}{1+z}\right)\frac{dz}{(1+z)^2},$$

und man kann also jedem bestimmten Integrale auch die Grenzen 0 und ∞ verschaffen.

Eine wesentliche Modifikation verlangt die in Nro. 1) angegebene Umwandlung in dem Falle, wo die Gleichung $\varphi(x) = y$, nach x aufgelöst, mehrere reelle Wurzeln darbietet; da nämlich der Werth von y nicht rückwärts wieder eingesetzt wird, so bleibt hier die Frage übrig, welche von den verschiedenen Wurzeln für x genommen werden soll. Denken wir uns die Sache der Anschaulichkeit wegen geometrisch, nämlich $y = \varphi(x)$ als Gleichung einer Curve, so bedeutet die Umkehrung dieser Gleichung, dass nicht wie früher die Abscisse, sondern nunmehr die Ordinate die willkürliche der beiden Coordinaten sein, die Curve also gewissermaassen über der Ordinatenachse statt über der Abscissenachse construirt werden soll. Ob nun einer Ordinate y nur eine Abscisse x oder mehrere x entsprechen, das hängt von dem Laufe der krummen Linie ab; wenn dieselbe von $x = a$ bis $x = b$ nur steigt oder nur fällt, also $\varphi'(x)$ sein Vorzeichen nicht wechselt, so gehört zu jedem neuen x ein neues y, ebenso umgekehrt zu jedem y ein einziges x; es existirt in diesem Falle nur eine reelle Umkehrung der Gleichung $y = \varphi(x)$, und diese Umkehrung $x = \psi(y)$ ist die in der Formel 1) vorkommende. — Wenn dagegen die Curve $y = \varphi(x)$ innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ ein Maximum oder ein Minimum hat, welches für $x = \xi$ eintreten möge, so finden sich über $x = \xi$ hinaus die früheren Ordinaten wenigstens zum Theil wieder; so ist in Figur 46, für $OC = \xi$, $OM = x$, $OM_1 = x_1$, die zu $x < \xi$ gehörende Ordinate $MP = y$

Fig. 46.



gleich der zu $x_1 > \xi$ gehörenden Ordinate $M_1 P_1$; umgekehrt giebt es also für $ON = y$ zwei entsprechende Abscissen $NP = x$, $NP_1 = x_1$, die wir durch $\psi(y)$ und $\chi(y)$ unterscheiden wollen; von diesen beiden Umkehrungen $x = \psi(y)$ und $x = \chi(y)$ ist die erste da zu nehmen, wo $x < \xi$ sein muss, die zweite, wenn man weiss, dass $x > \xi$ sein soll. Zerlegen wir nun das ursprüngliche Integral wie folgt:

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\,dx = \int_a^\xi f[\varphi(x)]\,dx + \int_\xi^b f[\varphi(x)]\,dx,$$

so ist im ersten Integrale rechter Hand $x < \xi$, im zweiten $x > \xi$, also dort $x = \psi(y)$, hier $x = \chi(y)$ einzusetzen; die Transformation geschieht im Uebrigen wie früher und giebt jetzt

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(\xi)} f(y)\,\psi'(y)\,dy + \int_{\varphi(\xi)}^{\varphi(b)} f(y)\,\chi'(y)\,dy.$$

Ganz ähnlich wäre die Sache in dem Falle, wo zwischen $x = a$ und $x = b$, mehrere Maxima und Minima, mithin auch mehrere Umkehrungen stattfänden; sind $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ die Werthe von x, für welche jene Maxima und Minima eintreten, so zerlegt man das ursprüngliche Integral in eine Reihe anderer von $x = a$ bis $x = \xi_1$, $x = \xi_1$ bis $x = \xi_2$ etc. und substituirt in jedem einzelnen Integrale die Umkehrung der Gleichung $y = \varphi(x)$, welche dem betreffenden Integrationsintervalle entspricht.

Ein paar allgemeine Beispiele zu dieser Regel sind folgende. Es sei erstlich $\varphi(x) = x^2 + 2rx$, $a = -\infty$, $b = +\infty$, so tritt ein Maximum ein für $x = -r$ und aus $x^2 + 2rx = y$ folgen die beiden Werthe

$$x = -r - \sqrt{r^2 + y}, \quad x = -r + \sqrt{r^2 + y},$$

von welchen der erste $< r$, der zweite $> r$ ist; nach diesen Bemerkungen hat man

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2 + 2rx)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-r} f(x^2 + 2rx)\,dx + \int_{-r}^{\infty} f(x^2 + 2rx)\,dx$$

$$= \int_{+\infty}^{-r^2} f(y) \cdot \frac{-dy}{2\sqrt{r^2 + y}} + \int_{-r^2}^{+\infty} f(y) \cdot \frac{+dy}{2\sqrt{r^2 + y}},$$

und wenn man im ersten Integrale rechter Hand die Integrationsgrenzen vertauscht, wodurch es mit dem zweiten Integrale identisch wird:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2+2rx)\,dx = \int_{-r^2}^{\infty} f(y)\frac{dy}{\sqrt{r^2+y}};$$

für $y = r^2(z^2-1)$ erhält man noch:

$$5)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x^2+2rx)\,dx = 2r\int_0^{\infty} f[r^2(z^2-1)]\,dz.$$

Es sei zweitens $\varphi(x) = \gamma x + \frac{\alpha}{x}$, $a = 0$, $b = \infty$, so tritt für $x = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ ein Minimum ein; wir setzen daher:

$$\int_0^{\infty} f\left(\gamma x + \frac{\alpha}{x}\right) dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}} f\left(\gamma x + \frac{\alpha}{x}\right) dx + \int_{\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}}^{\infty} f\left(\gamma x + \frac{\alpha}{x}\right) dx.$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung $\gamma x + \frac{\alpha}{x} = y$ sind:

$$x = \frac{1}{2\gamma}\left[y - \sqrt{y^2+4\alpha\gamma}\right],\quad x = \frac{1}{2\gamma}\left[y + \sqrt{y^2+4\alpha\gamma}\right],$$

und daher wird aus der obigen Gleichung die folgende:

$$\int_0^{\infty} f\left(\gamma x + \frac{\alpha}{x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2\gamma}\int_{\infty}^{2\sqrt{\alpha\gamma}} f(y)\left[1 - \frac{y}{\sqrt{y^2+4\alpha\gamma}}\right]dy + \frac{1}{2\gamma}\int_{2\sqrt{\alpha\gamma}}^{\infty} f(y)\left[1 + \frac{y}{\sqrt{y^2-4\alpha\gamma}}\right]dy,$$

oder nach gehöriger Reduktion:

$$\int_0^{\infty} f\left(\gamma x + \frac{\alpha}{x}\right) dx = \frac{1}{\gamma}\int_{2\sqrt{\alpha\gamma}}^{\infty} f(y)\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-4\alpha\gamma}}.$$

Nehmen wir weiter $\sqrt{y^2-4\alpha\gamma} = z$, so ergiebt sich noch:

$$6)\qquad \int_0^{\infty} f\left(\gamma x + \frac{\alpha}{x}\right) dx = \frac{1}{\gamma}\int_0^{\infty} f\left(\sqrt{4\alpha\gamma + z^2}\right) dz;$$

hieraus lassen sich noch mancherlei andere Transformationsformeln ableiten; für $f(u) = F\left(\frac{1}{\beta + u}\right)$ folgt z. B.:

$$7)\quad \int_0^\infty F\left(\frac{x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2}\right) dx = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty F\left(\frac{1}{\beta + \sqrt{4\alpha\gamma + z^2}}\right) dz,$$

für $f(u) = F(u^2 - 2\alpha\gamma)$ dagegen ergiebt sich aus Nro. 6)

$$8)\quad \int_0^\infty F\left(\gamma^2 x^2 + \frac{\alpha^2}{x^2}\right) dx = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty F(2\alpha\gamma + z^2)\, dz,$$

und wenn man $\alpha^2 = a$, $\beta^2 = b$, $x^2 = u$, $z^2 = t$ setzt:

$$9)\quad \int_0^\infty F\left(cu + \frac{a}{u}\right)\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^\infty F(2\sqrt{ac} + t)\frac{dt}{\sqrt{t}},$$

endlich für $F(z) = \varphi\left(\frac{1}{b + z}\right)$:

$$10)\quad \int_0^\infty \varphi\left(\frac{u}{a + bu + cu^2}\right)\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{1}{b + 2\sqrt{ac} + t}\right)\frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Diese Beispiele mögen hinreichen, um die vielfache Umwandelbarkeit bestimmter Integrale erkennen zu lassen.

§. 72.

Die Differenzialquotienten bestimmter Integrale.

Aus der Definition des bestimmten Integrales

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

geht unmittelbar hervor, dass der Werth desselben nicht mehr von x, sondern nur von den Integrationsgrenzen a und b, der Natur der Funktion $f(x)$ und den in ihr vorkommenden Constanten abhängig ist. Denkt man sich diese Constanten als willkürlich, so kann man den Werth des Integrales in Beziehung auf diese Constanten differenziren.

Aendert sich b allein, so ist der Differenzenquotient des Integrales:

$$\frac{\int\limits_a^{b+\varDelta b} f(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx}{\varDelta b};$$

die völlige Willkürlichkeit des $\varDelta b$ erlaubt, dasselbe als eine von den Grössen δ zu betrachten, welche in der Definition des bestimmten Integrales Nro. 2) in §. 70 vorkommen, also $\varDelta b = \delta_{n+1}$ zu setzen; man hat dann für verschwindende $\delta_1, \delta_2, \ldots . \delta_n$ und $\delta_{n+1} = db$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(a)\,\delta_1 + f(a+\delta_1)\,\delta_2 + f(a+\delta_1+\delta_2)\,\delta_3 + \ldots . \\ \ldots . + f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1})\,\delta_n$$

$$\int\limits_a^{b+db} f(x)\,dx = f(a)\,\delta_1 + f(a+\delta_1)\,\delta_2 + f(a+\delta_1+\delta_2)\,\delta_3 + \ldots . \\ \ldots . + f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_{n-1})\,\delta_n \\ + f(a+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_n)\,\delta_{n+1},$$

mithin durch Subtraktion, Division mit $db = \delta_{n+1}$ und weil $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n + \delta_{n+1} = b - a + db$ in $b - a$ übergeht:

$$1)\qquad \frac{d\int\limits_a^b f(x)\,dx}{db} = f(b).$$

Dieses Resultat stimmt damit überein, dass der Differenzialquotient einer ebenen Fläche die letzte Ordinate ist.

Aus der Gleichung

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$$

ergiebt sich durch beiderseitige Differenziation in Beziehung auf a, welches rechter Hand die obere Grenze bildet:

$$2)\qquad \frac{d\int\limits_a^b f(x)\,dx}{da} = -f(a).$$

Enthält die Funktion $f(x)$ ausser x noch eine willkürliche Constante r, in welchem Falle wir $f(x, r)$ für $f(x)$ schreiben, und sind ausserdem a und b von r unabhängig, so findet sich, ähnlich wie in §. 49, IV.:

$$\frac{\int\limits_a^b f(x, r+\Delta r)\,dx - \int\limits_a^b f(x,r)\,dx}{\Delta r} = \int\limits_a^b \frac{f(x, r+\Delta r) - f(x,r)}{\Delta r}\,dx$$

$$= \int\limits_a^b \left\{ \frac{\partial f(x,r)}{\partial r} + \varepsilon \right\} dx,$$

wo ε beliebig klein werden kann, wenn Δr gegen die Null convergirt. Unter der schon in §. 49, IV. gemachten Voraussetzung, dass x keine unendlichen Werthe erhält, d. h. mit anderen Worten, wenn die Integrationsgrenzen endliche Zahlen sind, ergiebt sich hieraus dass ε mit Δr gleichzeitig verschwindet, also:

3) $$\frac{d\int\limits_a^b f(x,r)\,dx}{dr} = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,r)}{\partial r}\,dx.$$

Wir betrachten nun den allgemeinsten Fall, wenn nämlich r in $f(x)$ und zugleich in a und b vorkommt; der Werth des Integrales, der für den Augenblick W heissen möge, ist dann eine Funktion dreier Variabelen a, b, r, deren beide erste wiederum von der letzten abhängen; es gilt hier die bekannte Regel der Differenzialrechnung

$$\frac{dW}{dr} = \frac{\partial W}{\partial a} \cdot \frac{da}{dr} + \frac{\partial W}{\partial b} \cdot \frac{db}{dr} + \frac{\partial W}{\partial r},$$

und sie giebt in unserem Falle

$$\frac{dW}{dr} = -f(a,r)\frac{da}{dr} + f(b,r)\frac{db}{dr} + \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,r)}{\partial r}\,dx,$$

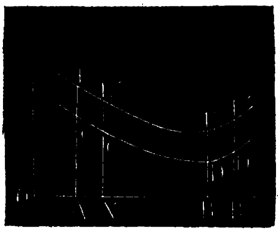
oder wenn man einen in Beziehung auf r genommenen Differenzialquotienten kurz mit D_r bezeichnet:

4) $$D_r \int\limits_a^b f(x,r)\,dx$$

$$= \int\limits_a^b [D_r f(x,r)]\,dx + f(b,r) \,.\, D_r b - f(a,r) \,.\, D_r a.$$

Dieses Resultat wird anschaulich, wenn man sich $y = f(x,r)$ als Gleichung einer Curve und das bestimmte Integral wiederum als die über der Strecke $b - a = AB$, Fig. 47, der Abscissenachse stehende Fläche $ABDC$ denkt. Aendert sich nämlich r in $f(x, r)$ allein, so erhält man eine ähnliche Curve von anderem Parameter, und die Fläche $ABDC$ nimmt um den Streifen $CDFE$ zu, welcher durch

Fig. 47.



$$\int_a^b [D_r f(x, r) \,.\, dr]\, dx$$

ausgedrückt wird. Durch die alleinige Aenderung von b wächst die Fläche um $BB'D'D = f(b, r) \,.\, D_r b \,.\, dr$, und durch Aenderung des a vermindert sie sich um $AA'C'C = f(a, r) \,.\, D_r a \,.\, dr$. Die gleichzeitige Aenderung von r, b und a verwandelt die ursprüngliche Fläche in $A'B'F'E'$, und mit Weglassung der Vierecke $DD'F'F$, $CC'E'E$, welche unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung sind, hat man

$$A'B'F'E' - ABDC = CDFE + BB'D'D - AA'C'C;$$

aus diesem Differenzial der Fläche $ABDC$ ergiebt sich derselbe Differenzialquotient wie oben.

Will man das Integral mehrmals nach einander in Beziehung auf r differenziren, so ist es von Vortheil, die beiden letzten Glieder rechter Hand in Nro. 4) durch die Differenz

$$D_r \{b f(b, r) - a f(a, r)\} - \{b D_r f(b, r) - a D_r f(a, r)\}$$

zu setzen; die wiederholte Differenziation giebt dann immer Ausdrücke von derselben Form, nämlich:

5)
$$D_r^n \int_a^b f(x, r)\, dx$$
$$= \int_a^b \left[D_r^n f(x, r)\right] dx + D_r^n \left\{ b f(b, r) - a f(a, r) \right\}$$
$$- \left\{ b D_r^n f(b, r) - a D_r^n f(a, r) \right\}.$$

Zum Ueberflusse könnte man diese Formel noch mittelst des Schlusses von n auf $n + 1$ verifiziren.

Wenn eine der Integrationsgrenzen unendlich ist, oder beide es sind, so dürfen die Theoreme 4) und 5) nicht ohne eine spezielle Untersuchung angewendet werden, welche die Frage zu entscheiden hat, ob das Integral

$$\int_a^b \varepsilon\, d\,x$$

mit ε gleichzeitig verschwindet oder nicht. Beispiele der Art wird §. 74 liefern.

§. 73.

Werthermittelungen bestimmter Integrale.

In dem Falle, wo das unbestimmte Integral eines Differenziales $f(x)\,dx$ bekannt ist, kann das bestimmte Integral desselben leicht mittelst des Satzes entwickelt werden, dass ein bestimmtes Integral als die Differenz zweier Spezialwerthe des entsprechenden unbestimmten Integrales angesehen werden darf, so lange die unter dem Integralzeichen stehende Funktion keine Unterbrechung der Continuität erleidet. Nach dieser Bemerkung findet man z. B. ohne Mühe:

1) $$\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{4a},$$

2) $$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a},$$

3) $$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Aus der Reduktionsformel Nro. 8) in §. 57 ergiebt sich für $a=1,\ b=-1,\ n=1$:

$$\int x^{m-1}\,(1-x)^s\,dx = -\frac{x^{m-1}(1-x)^{s+1}}{s+m} + \frac{m-1}{s+m}\int x^{m-2}(1-x)^s\,dx,$$

mithin für $x=1$ und $x=0$:

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^s\,dx = \frac{m-1}{s+m}\int_0^1 x^{m-2}(1-x)^s\,dx.$$

Durch mehrmalige Anwendung dieser Formel erhält man bei ganzen positiven m:

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^s\,dx = \frac{m-1}{s+m}\cdot\frac{m-2}{s+m-1}\cdots\frac{2}{s+3}\cdot\frac{1}{s+2}\int_0^1 (1-x)^s\,dx.$$

Der Werth des letzten Integrales ist, unbestimmt genommen, $= -\frac{1}{s+1}(1-x)^{s+1}$, zwischen den gegebenen Grenzen also $= \frac{1}{s+1}$; setzt man noch $s = a-1$, so ergiebt sich:

$$4)\qquad \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{a-1}\,dx = \frac{1}{a}\,\frac{1.2.3\ldots.(m-1)}{(a+1)(a+2)..(a+m-1)}.$$

Für $x = z:(1+z)$ erhält die linke Seite eine etwas andere Form; es wird nämlich:

$$5)\qquad \int_0^\infty \frac{z^{m-1}\,dz}{(1+z)^{a+m}} = \frac{1}{a}\,\frac{1.2.3\ldots(m-1)}{(a+1)(a+2)..(a+m-1)}.$$

Aus der schon benutzten Reduktionsformel Nro. 8) in §. 57 bekommt man ferner für $a = 1$, $b = -1$, $n = 2$, $s = -\frac{1}{2}$:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{x^{m-3}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Schreibt man m für $m-1$ und führt die Grenzen $x=1, x=0$ ein, so wird

$$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m-1}{m}\int_0^1 \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Durch mehrmalige Anwendung dieser Formel kommt man, je nachdem m gerade oder ungerade ist, auf eines der beiden Integrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2},\quad \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1,$$

und gelangt damit zu folgenden zwei Formeln:

$$6)\qquad \int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots.(m-1)}{2.4.6\ldots.m}\,\frac{\pi}{2}\quad (m \text{ gerade}),$$

$$7)\qquad \int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots.(m-1)}{3.5.7\ldots.m}\quad (m \text{ ungerade}).$$

Für $x = \sin u$ und für $x = \cos v$, wobei im letzteren Falle die Integrationsgrenzen zu vertauschen sind, hat man überhaupt:

$$8)\qquad \int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^m u\,du = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^m v\,dv.$$

Die Formeln 6) und 7) geben also gleichzeitig die Werthe der zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ genommenen Integrale von $\sin^m u\, du$ und $\cos^m v\, dv$.

Nimmt man in der Formel 6) des §. 59 a negativ, so wird dieselbe

$$\int x^m e^{-ax} dx = -\frac{x^m e^{-ax}}{a.} + \frac{m}{a}\int x^{m-1} e^{-ax} dx,$$

und durch Einführung der Grenzen $x = \infty$, $x = 0$ erhält man daraus unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $x^m e^{-ax}$ für $x = \infty$ ebenso wie für $x = 0$ verschwindet:

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax} dx = \frac{m}{a} \int_0^\infty x^{m-1} e^{-ax} dx.$$

Die wiederholte Anwendung dieser Formel führt bei ganzen positiven m auf das Integral:

$$9)\qquad \int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}, \qquad \text{für } a > 0,$$

und man hat daher:

$$10)\qquad \int_0^\infty x^m e^{-ax} dx = \frac{1.2.3\ldots m}{a^{m+1}}, \qquad ,, \ a > 0.$$

Für $x = l\left(\frac{1}{z}\right)$ ist noch:

$$11)\qquad \int_0^1 \left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^m z^{a-1} dz = \frac{1.2.3\ldots m}{a^{m+1}}, \qquad ,, \ a > 0.$$

Aus der unbestimmten Integralformel

$$\int \frac{dx}{\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x} = \frac{1}{\alpha\beta} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\beta}{\alpha} \tan x\right)$$

fliesst für $x = \frac{1}{2}\pi$ und $x = 0$ die häufig vorkommende Gleichung

$$12)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\alpha^2\cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x} = \frac{1}{\alpha\beta}\,\frac{\pi}{2}.$$

Für $a > b$ hat man bei unbestimmter Integration:

$$\int \frac{dz}{a + b\cos z} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \tfrac{1}{2} z\right),$$

mithin für $z = \pi$ und $z = 0$:

$$13)\qquad \int_0^\pi \frac{dz}{a+b\cos z} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\,; \qquad a > b.$$

Die beiden Integralformeln

$$\int e^{-ax}\cos bx\,dx = -\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2}\,e^{-ax},$$

$$\int e^{-ax}\sin bx\,dx = -\frac{a\cos bx - b\sin bx}{a^2+b^2}\,e^{-ax},$$

welche dem §. 12 entnommen sind, liefern noch folgende bestimmte Integrale:

$$14)\qquad \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\;dx = \frac{a}{a^2+b^2},$$

$$15)\qquad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\;dx = \frac{b}{a^2+b^2},$$

in denen man aber a nicht der Null gleich nehmen darf, weil die Ausdrücke $e^{-ax}\cos bx$ und $e^{-ax}\sin bx$ nur dann für $x=\infty$ verschwinden, wenn a von Null verschieden ist.

Man sieht aus diesen Ableitungen, dass der Werth eines bestimmten Integrales häufig weit einfacher, als der des entsprechenden unbestimmten Integrales ausfällt; ein bemerkenswerthes Beispiel hierzu ist noch folgendes. In der Formel 7) §. 53 nehmen wir $x=\frac{1}{\varrho}$ und $x=\varrho$, wo ϱ eine beliebige positive Grösse bezeichnen möge; es ist dann für ganze positive m, gerade $n > m$ und $\vartheta = \frac{\pi}{n}$:

$$16)\quad \int_{\frac{1}{\varrho}}^{\varrho} \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = -\frac{1}{n}\Sigma\left[\cos hm\vartheta\,.\,l\left(\frac{1-2\varrho\cos h\vartheta+\varrho^2}{\varrho^2}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{n}\Sigma\left[\cos hm\vartheta\,.\,l\left(\varrho^2-2\varrho\cos h\vartheta+1\right)\right]$$
$$+\frac{2}{n}\Sigma\left[\sin hm\vartheta\,.\,Arctan\,\frac{1-\varrho\cos h\vartheta}{\varrho\sin h\vartheta}\right]$$
$$-\frac{2}{n}\Sigma\left[\sin hm\vartheta\,.\,Arctan\,\frac{\varrho-\cos h\vartheta}{\sin h\vartheta}\right],$$

wobei sich das Summenzeichen auf die Werthe $h = 1, 3, 5, \ldots (n-1)$ bezieht. Die beiden ersten Summen geben durch Vereinigung der entsprechenden Glieder die eine Summe

$$\frac{1}{n}\Sigma\left[\cos h\, m\, \vartheta \,.\, l\,(\varrho^2)\right]$$

$$=\frac{2}{n}\, l\varrho\left\{\cos m\vartheta+\cos 3\, m\vartheta+\cos 5\, m\vartheta+\ldots+\cos\,(n-1)\, m\vartheta\right\}.$$

Da nun überhaupt die Summenformel:

17) $$\cos u+\cos 3\, u+\cos 5\, u+\ldots+\cos(n-1)\, u=\frac{\sin n u}{2\sin u}$$

gilt, deren Richtigkeit durch Multiplikation mit $2 \sin u$ und Zerlegung der links entstehenden Produkte leicht zu prüfen ist, so kann die vorige Summirung sofort ausgeführt werden; für $u = m\vartheta = \frac{m}{n}\pi$ ergiebt sich, dass jene Summe $= 0$ ist und es bleibt daher

$$\int_{\varrho}^{\frac{1}{\varrho}}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{2}{n}\Sigma\left[\sin h m\vartheta \,.\, Arctan\frac{1-\varrho\cos h\vartheta}{\varrho\sin h\vartheta}\right]$$
$$-\frac{2}{n}\Sigma\left[\sin h m\vartheta \,.\, Arctan\,\frac{\varrho-\cos h\vartheta}{\sin h\vartheta}\right].$$

Lassen wir noch ϱ in Null übergehen, so wird

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{2}{n}\Sigma\left[\sin h m\vartheta \,.\, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$-\frac{2}{n}\Sigma\left[\sin h m\vartheta \,.\, Arctan(-\cot h\vartheta)\right],$$

oder, weil immer $Arctan\,(-\cot z) = -Arctan\,(\cot z) = -(\frac{1}{2}\pi - z)$ ist:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{2}{n}\Sigma\left[(\pi-h\vartheta)\sin h m\vartheta\right]$$

$$=\frac{2\pi}{n}\left\{\sin m\vartheta+\sin 3\, m\vartheta+\sin 5\, m\vartheta+\ldots+\sin(n-1)\, m\vartheta\right\}$$
$$-\frac{2\vartheta}{n}\left\{1\sin m\vartheta+3\sin 3\, m\vartheta+\ldots+(n-1)\,\sin(n-1)\, m\vartheta\right\}.$$

Die Summe der ersten Reihe kann unmittelbar mittelst der (auf ähnliche Weise wie Nro. 17 zu prüfenden) Formel

$$\sin u+\sin 3\, u+\ldots+\sin(n-1)\, u=\frac{1-\cos n u}{2\sin u}$$

gefunden werden; indem man $u = m\vartheta = \frac{m}{n}\pi$ setzt; die Summe der zweiten Reihe ergiebt sich durch Differenziation der Gleichung 17); man erhält nämlich zunächst:

$$1 \sin u + 3 \sin 3u + 5 \sin 5u + \ldots + (n-1)\sin(n-1)u$$
$$= \frac{\sin nu \cos u}{2\sin^2 u} - \frac{n \cos nu}{2 \sin u},$$

worin noch $u = m\vartheta$ zu setzen ist; nach diesen Angaben findet man ohne Mühe:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1+\cos m\pi}{2\sin\frac{m\pi}{n}} - \frac{2\vartheta}{n}\left(-\frac{n\cos m\pi}{2\sin\frac{m\pi}{n}}\right),$$

und vermöge des Werthes von ϑ:

18) $$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}, \quad m < n.$$

Durch Einführung einer neuen Variabelen $z = x^{\frac{1}{n}}$ und indem man $\frac{m}{n} = \mu$ setzt, nimmt das erhaltene Resultat die elegantere Form an:

19) $$\int_0^\infty \frac{z^{\mu-1}dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin \mu\pi}, \quad 0 < \mu < 1,$$

wo man sich unter μ eine beliebige Zahl zwischen 0 und 1 denken kann, da eine solche immer in einen Bruch mit geradem Nenner (z. B. Dezimalbruch) verwandelbar ist. Für $z = t^2 = \tan^2 u$ und $2\mu - 1 = \lambda$ erhält man noch:

20) $$\int_0^\infty \frac{t^\lambda dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \tan^\lambda u\, du = \frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}\lambda\pi}, \quad 1 > \lambda > -1.$$

Ganz ähnlich gestaltet sich der Calcül für das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n},$$

nur ist hier zu beachten, dass für $x = 1$ eine Unterbrechung der Continuität eintritt, dass man also zunächst die Zerlegung

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n} + \int_{1+\delta}^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}$$

vornehmen muss. Setzt man, um den Hauptwerth des Integrales zu erhalten, $\varepsilon = \delta = 0$, führt aber im Uebrigen die Rechnung ganz wie vorhin, so findet sich:

$$21)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1-x^n} = \frac{\pi}{n\tan\frac{m\pi}{n}}, \qquad m < n,$$

oder auch

$$22)\qquad \int_0^\infty \frac{z^{\mu-1}dz}{1-z} = \frac{\pi}{\tan\mu\pi}, \quad 0 < \mu < 1.$$

§. 74.

Fortsetzung und Schluss.

I. Ein in vielen Fällen sehr brauchbares Verfahren zur Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale besteht darin, dass man das fragliche Integral in Beziehung auf eine darin vorkommende willkürliche Constante erst differenzirt, den Werth des neuen Integrales aufsucht und dann zu dem ursprünglichen Integrale zurückkehrt. Aus der Gleichung

$$u = \int_a^b f(x,r)\,dx$$

folgt nämlich unter der Voraussetzung, dass a und b endliche von r unabhängige Grössen sind:

$$\frac{du}{dr} = \int_a^b \frac{\partial f(x,r)}{\partial r}\,dr,$$

und es kann vorkommen, dass der Werth des neuen Integrals leicht aufzufinden ist; bezeichnen wir ihn mit u_1, so wird

$$u = \int u_1\,dr + Const.,$$

wo es auf die Ausführung dieser Integration und nachher darauf ankommt, die Integrationsconstante zu bestimmen, wie man aus den nachstehenden Beispielen ersehen wird.

α. Das gesuchte Integral sei:

$$1)\qquad u = \int_0^\infty e^{-kx}\sin rx\,\frac{dx}{x}.$$

Um in Beziehung auf r zu differenziren, dürfen wir die gewöhnliche Regel nicht ohne alle Vorsicht anwenden, weil die obere Integrationsgrenze unendlich ist; dagegen haben wir unmittelbar:

$$\frac{\Delta u}{\Delta r} = \int_0^x e^{-kx} \left(\frac{\Delta \sin rx}{\Delta r}\right) \frac{dx}{x};$$

aus der Gleichung:

$$\frac{\Delta \sin z}{\Delta z} = \frac{d \sin z}{dz} + \varrho = \cos z + \varrho,$$

wo ϱ mit Δz gleichzeitig verschwindet, folgt aber für $z = xr$, indem x als Constante angesehen wird,

$$\frac{\Delta \sin xr}{\Delta r} = x(\cos xr + \varrho);$$

mithin

$$\frac{\Delta u}{\Delta r} = \int_0^\infty e^{-kx} \cos rx\, dx + \int_0^\infty \varrho\, e^{-kx} dx.$$

Denkt man sich ϱ willkürlich gewählt und Δr danach bestimmt, so ist der Werth des zweiten Integrales

$$= \varrho \int_0^\infty e^{-kx} dx = \frac{\varrho}{k};$$

mithin ergiebt sich für $\varrho = 0$ und $k > 0$:

$$\frac{du}{dr} = \int_0^\infty e^{-kx} \cos rx\, dx = \frac{k}{k^2 + r^2}.$$

Umgekehrt folgt daraus $u = Arctan \frac{r}{k} + Const.$; die Constante muss aber $= 0$ sein, weil aus Nro. 1) unmittelbar hervorgeht, dass u mit r gleichzeitig verschwindet. Wir gelangen so zu der Integralformel:

$$2) \qquad \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin rx}{x} dx = Arctan \frac{r}{k}.$$

Dieselbe gilt für alle an sich positiven k, man darf sie jedoch nicht ohne Weiteres für $k = 0$ in Anspruch nehmen, weil die vorhergehende Gleichung für $k = 0$ unrichtig wird; dagegen kann folgende Transformation vorgenommen werden. Man setze $r = k^2$ und $x = \frac{z}{k^2}$, wo z eine neue Variabele bezeichnet, dann ist

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{k}} \frac{\sin z}{z} dz = Arctan\, k,$$

und wenn die bekannte Gleichung $f(z) = f(0) + z\, f'(\Theta z)$ auf die Exponenzialgrösse unter dem Integralzeichen angewendet wird:

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz + \frac{1}{k}\int_0^\infty e^{-\frac{\Theta z}{k}} \sin z\, dz = Arctan\ k.$$

Welches nun auch der Werth des positiven Bruches Θ sein möge, so ist doch aus der Integralformel

$$\int_0^\infty e^{-az} \sin z\, dz = \frac{1}{a^2+1}$$

unmittelbar ersichtlich, dass der Werth des zweiten Integrales in der vorigen Gleichung ein endlicher bleiben muss, und daher ergiebt sich für $k = \infty$:

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz = Arctan\ \infty = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Für $z = rx$ folgt daraus, wenn r eine positive von Null verschiedene Constante bezeichnet:

3) $$\int_0^\infty \frac{\sin rx}{x}\, dx = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Dasselbe würde man aus der Formel 2) für $k = 0$ erhalten, letztere gilt daher auch noch in diesem Falle.

β. Für ein zweites Beispiel sei:

4) $$u = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-rx}}{x}\, dx.$$

Durch ganz ähnliche Betrachtungen wie vorhin leitet man hieraus die Gleichung ab:

$$\frac{du}{dr} = \int_0^\infty e^{-rx}\, dx = \frac{1}{r}, \qquad \text{für } r > 0,$$

derzufolge $u = lr + Const.$ sein muss. Da andererseits die Gleichung 4) unmittelbar erkennen lässt, dass $u = 0$ wird für $r = 1$, so ist $Const. = 0$, also:

5) $$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-rx}}{x}\, dx = lr.$$

Giebt man dem r zwei Werthe a und b, so ist durch Subtraktion der beiden entsprechenden Gleichungen:

6) $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = l\left(\frac{b}{a}\right).$$

γ. Betrachten wir noch die allgemeinere Gleichung:

$$7)\qquad u = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}\cos rx}{x}\,dx;$$

es ergiebt sich zunächst daraus:

$$\frac{du}{dr} = \int_0^\infty e^{-bx}\sin rx\,dx = \frac{r}{b^2 + r^2}, \quad b > 0,$$

mithin

$$u = \tfrac{1}{2}\,l\,(b^2 + r^2) + Const.$$

Zur Bestimmung der Constante setzen wir $r = 0$, wodurch u in das unter Nro. 6) entwickelte Integral übergeht, also

$$l\left(\frac{b}{a}\right) = \tfrac{1}{2}\,l\,(b^2) + Const.$$

wird. Dieser Bestimmung zufolge ist:

$$8)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}\cos rx}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{b^2 + r^2}{a^2}\right), \quad b > 0.$$

Nehmen wir spezieller $a = r$, $b = 1$, $x = \frac{z}{r}$, so wird noch:

$$9)\qquad \int_0^\infty \left\{e^{-z} - e^{-\frac{z}{r}}\cos z\right\}\frac{dz}{z} = \tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{1}{r^2} + 1\right),$$

wobei, ähnlich wie in *α*, für die linke Seite geschrieben werden kann:

$$\int_0^\infty (e^{-z} - \cos z)\frac{dz}{z} + \frac{1}{r}\int_0^\infty e^{-\frac{\theta z}{r}}\cos z\,dz.$$

Für $r = \infty$ verschwindet der zweite Theil und es bleibt daher aus der Gleichung 9) noch übrig:

$$10)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-z} - \cos z}{z}\,dz = 0,$$

wovon wir später einmal Gebrauch machen werden.

III. In allen Fällen, wo man mittelst der bisher angegebenen Methoden den Werth eines bestimmten Integrales nicht findet, bleiben immer noch zwei Wege zur Berechnung desselben, nämlich die Verwandlung in eine Reihe und die sogenannte näherungsweise Quadratur.

Für die erste dieser Berechnungsweisen ist nur das Eine zu bemerken, dass die Reihe, welche an die Stelle von $f(x)$ in

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

gesetzt wird, auch für alle x von $x = a$ bis $x = b$ dem $f(x)$ gleichgelten, also convergiren muss; findet diese Bedingung nicht statt, so ist deswegen die Anwendung der Reihe noch nicht ausgeschlossen, nur muss man in diesem Falle die Reihe endlich nehmen und ihren Rest hinzufügen. So z. B. würde es voreilig sein, in dem Integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\, l\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

ohne Weiteres $1 : (1-x) = 1 + x + x^2 + \ldots$ *in inf.* setzen zu wollen, weil die Convergenz dieser Reihe an der oberen Integrationsgrenze aufhört; dagegen ist jenes Integral

$$= \int_0^1 \left\{1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}\right\} l\left(\frac{1}{x}\right) dx,$$

und wenn man die einzelnen Reihenglieder mittelst der Formel 11) in §. 73 integrirt, so hat man auch

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} - \int_0^1 \frac{x\, lx}{1-x}\, x^{n-1}\, dx.$$

In Beziehung auf das Restintegral ist zu bemerken, dass der Ausdruck $\frac{x\, lx}{1-x}$ von $x = 0$ bis $x = 1$ endlich bleibt (er verschwindet für $x = 0$ und wird $= -1$ für $x = 1$), dass mithin sein Maximum A und sein Minimum B endliche Grössen sind; da ferner x^{n-1} sein Zeichen nicht wechselt, so liegt der Werth des Restintegrales zwischen

$$A \int_0^1 x^{n-1}\, dx = \frac{A}{n} \quad \text{und} \quad B \int_0^1 x^{n-1}\, dx = \frac{B}{n},$$

hat also für unendlich wachsende n die Null zur Grenze; aus diesen Bemerkungen ergiebt sich:

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\, l\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots \textit{ in inf.}$$

Die zweite Näherungsmethode entspringt unmittelbar aus der geometrischen Bedeutung des bestimmten Integrales; betrachtet man dasselbe als die Fläche einer ebenen Curve, so bieten die Lehren des §. 66 hinreichende Mittel dar, um den Werth des Integrales mit jedem beliedigen Grade der Genauigkeit zu berechnen. Zugleich ist hieraus ersichtlich, dass ein einfaches bestimmtes Integral, dessen Constanten numerisch bestimmt sind, als eine völlig angebbare Grösse betrachtet werden kann, und daher muss eine unbekannte Zahl von dem Augenblicke an als bekannt gelten, wo man sie in ein bestimmtes Integral verwandelt hat. Hiernach ordnet sich auch das Verhältniss, in welchem die bestimmten Integrale zu den Reihen stehen. Eine Gleichung nämlich zwischen einer endlichen oder unendlichen Reihe und zwischen einem bestimmten Integrale ist einer doppelten Auffassung fähig; convergirt diese Reihe rasch, so wird man ihre Summe leicht durch gewöhnliche Addition ermitteln, und man findet damit den Werth des Integrales; convergirt aber die Reihe so langsam, dass eine grosse Gliederzahl vereinigt werden müsste, um nur eine erträgliche Genauigkeit zu erreichen, so wird man den Werth des Integrales mittelst der Methode der Quadratur (z. B. durch die Simpson'sche Regel) aufsuchen, und gelangt damit gleichzeitig zur Kenntniss der Reihensumme. Beispiele solcher doppelter Auffassungen wird man im nächsten Capitel finden.

Cap. XVI.

Reihensummirung durch bestimmte Integrale.

§. 75.

Ableitung neuer Reihen aus früheren.

Kennt man bereits eine Gleichung von der Form:

$$F(z) = Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots\ldots,$$

worin Z_0, Z_1, Z_2, etc. Funktionen von z sind, so lässt sich daraus durch Multiplikation mit einem beliebigen Differenziale $\varphi(z)\,dz$ und durch nachherige Integration eine neue Reihenformel ableiten, nämlich

$$\int F(z)\,\varphi(z)\,dz$$

$$= \int Z_0\,\varphi(z)\,dz + \int Z_1\,\varphi(z)\,dz + \int Z_2\,\varphi(z)\,dz + \ldots;$$

bei unbestimmter Integration wird dieses Resultat oft etwas verwickelt, dagegen nimmt es leicht eine sehr elegante Form an, wenn die Integration zwischen bestimmten Grenzen vollzogen wird, und es erklärt sich diese Erscheinung von selbst aus der grösseren Einfachheit bestimmter Integrale. Einige Beispiele mögen dies zeigen.

I. Wir gehen von einer Gleichung der Form aus:

1) $$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots = \Sigma\,(A_k x^k),$$

setzen $x = u z^\beta$, wo u eine beliebige Constante bedeuten möge, multipliziren mit $z^{\alpha - 1}\,(1 - z)^{m-1}\,dz$ und integriren zwischen den Grenzen $z = 0$, $z = 1$, natürlich unter der Voraussetzung, dass die Gleichung von $x = 0$ bis $x = u.1$ richtig bleibt. Wir erhalten rechter Hand eine neue Reihe, deren allgemeines Glied

$$A_k u^k \int_0^1 z^{\alpha+k\beta-1}(1-z)^{m-1}\,dz$$

sein würde, wo sich die Integration ausführen lässt, wenn wir erst $z = 1 - x$ setzen und unter der Voraussetzung eines ganzen positiven n die Formel 4) in §. 73 für $a = \alpha + k\beta$ in Anwendung bringen. Bei nachheriger Division mit $1.2\ldots(m-1)$ ergiebt sich das Resultat:

2)
$$\frac{1}{1.2..(m-1)}\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{m-1}\,(uz^\beta)\,dz$$

$$=\frac{A_0}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}+\frac{A_1 u}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\ldots(\alpha+\beta+m-1)}$$
$$+\frac{A_2 u^2}{(\alpha+2\beta)(\alpha+2\beta+1)\ldots\ldots(\alpha+2\beta+m-1)}+\ldots\ldots$$

Die linker Hand vorkommende Integration lässt sich häufig dadurch ausführen, dass man $(1-z)^{m-1}$ nach dem binomischen Satze entwickelt und dadurch das gesuchte Integral auf m andere von der Form

$$\int_0^1 z^{\alpha+n-1} f(uz^\beta)\,dz$$

reduzirt. So erhält man z. B. für

$$\beta = 1,\ m = 3,\ f(x) = \frac{1}{1+x}$$

und $\alpha = 1$ die Gleichung:

$$\frac{1}{2u^2}\left[(1+u)^2\,\frac{l(1+u)}{u} - 1 - \tfrac{3}{2}u\right]$$
$$=\frac{1}{1.2.3}-\frac{u}{2.3.4}+\frac{u^2}{3.4.5}-\frac{u^3}{4.5.6}+\ldots\ldots,$$

wobei wegen des früheren $1 > x > -1$ nunmehr $1 > u > -1$ sein muss; ferner für $\alpha = \frac{1}{2}$ nach Division mit 8:

$$\frac{1}{8u^2}\left[(1+u)^2\,\frac{Arctan(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} - 1 - \tfrac{5}{3}u\right]$$
$$=\frac{1}{1.3.5}-\frac{u}{3.5.7}+\frac{u^2}{5.7.9}-\frac{u^3}{7.9.11}+\ldots\ldots,$$

worin u wiederum ein echter Bruch sein muss.

II. Gilt für alle z von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}\pi$ eine Gleichung von der Form:

3) $$F(z) = A_0 + A_2 \sin^2 z + A_4 \sin^4 z + \ldots\ldots,$$

so erhält man durch Multiplikation mit dz und Integration zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ mittelst der Formeln 8) und 6) in §. 73:

4) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} F(z)\,dz$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi \left\{ A_0 + \tfrac{1}{2} A_2 + \frac{1.3}{2.4} A_4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} A_6 + \ldots\ldots \right\}.$$

Wenden wir z. B. dieses Verfahren auf die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} \sec^2 \tfrac{1}{2} z = \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z} = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 z}}{\sin^2 z}$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \frac{\sin^2 z}{4} + \frac{1.3}{2.4} \frac{\sin^4 z}{6} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{\sin^6 z}{8} + \ldots\ldots$$

an und dividiren nach geschehener Integration mit $\frac{1}{2}\pi$, so gelangen wir zu dem nicht uninteressanten Resultate:

$$\frac{2}{\pi} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} (\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{6} \left(\frac{1.3}{2.4}\right) + \tfrac{1}{8} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + \ldots\ldots$$

Eine weniger spezielle und deshalb an Folgerungen weit reichere Anwendung desselben Prinzipes möge dem nächsten Paragraphen vorbehalten bleiben.

§. 76.

Die trigonometrischen Funktionen als unendliche Produkte.

Die unter Nro. 17) in §. 34 entwickelte Gleichung

$$\cos \lambda z = 1 - \frac{\lambda^2}{1.2} \sin^2 z + \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 2^2)}{1.2.3.4} \sin^4 z$$
$$- \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 2^2)(\lambda^2 - 4^2)}{1.2\ldots.6} \sin^6 z + \ldots\ldots$$

gilt für alle λ und für alle zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegenden z; an der Grenze dieses Intervalles, d. h. für $z = \frac{1}{2}\pi$, convergirt aber die Reihe noch, zugleich behält $\cos \lambda z$ seine Continuität und daher gilt die obige Gleichung noch für $z = \frac{1}{2}\pi$. Durch Multiplikation mit dz und Integration zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = \frac{1}{2}\pi$ folgt nun augenblicklich:

$$\frac{2}{\lambda\pi}\sin\tfrac{1}{2}\lambda\pi = 1 - \frac{\lambda^2}{2^2} + \frac{\lambda^2(\lambda^2-2^2)}{2^2.4^2} - \frac{\lambda^2(\lambda^2-2^2)(\lambda^2-4^2)}{2^2.4^2.6^2} + \ldots\ldots,$$

oder für $\lambda = 2\mu$:

$$1)\qquad \frac{1}{\mu\pi}\sin\mu\pi = 1 - \frac{\mu^2}{1^2} - \frac{\mu^2(1^2-\mu^2)}{1^2.2^2} - \frac{\mu^2(1^2-\mu^2)(2^2-\mu^2)}{1^2.2^2.3^2} - \ldots\ldots$$

Man könnte statt dieser Gleichung auch die folgende schreiben, bei der rechts eine endliche Reihe gesetzt ist:

$$\frac{1}{\mu\pi}\sin\mu\pi + \varphi(\mu,n)$$
$$= 1 - \frac{\mu^2}{1^2} - \frac{\mu^2(1^2-\mu^2)}{1^2.2^2} - \frac{\mu^2(1^2-\mu^2)(2^2-\mu^2)}{1^2.2^2.3^2} - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - \frac{\mu^2(1^2-\mu^2)(2^2-\mu^2)\ldots([n-1]^2-\mu^2)}{1^2.2^2.3^2\ldots n^2}.$$

Hier bedeutet $\varphi(\mu,n)$ den Rest der Reihe, auf dessen genaue Kenntniss es nicht ankommt, von welchem wir aber wenigstens wissen, dass er für unendlich werdende n verschwindet, weil dann die vorstehende Gleichung mit der unter Nro. 1) verzeichneten zusammenfallen muss. Vereinigt man die Glieder der endlichen Reihe durch gewöhnliche Addition, so folgt:

$$\frac{1}{\mu\pi}\sin\mu\pi + \varphi(\mu,n)$$
$$= \frac{(1^2-\mu^2)(2^2-\mu^2)(3^2-\mu^2)\ldots\ldots(n^2-\mu^2)}{1^2.2^2.3^2\ldots\ldots n^2}$$
$$= \left(1-\frac{\mu^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{3^2}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{\mu^2}{n^2}\right)$$

und durch Uebergang zur Grenze für unendlich wachsende n:

$$2)\qquad \sin\mu\pi = \mu\pi\left(1-\frac{\mu^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{3^2}\right)\ldots\ldots,$$

wo nun $\sin\mu\pi$ unter der Form eines unendlichen Produktes erscheint.

Setzt man in der vorhergehenden Gleichung erst n gleich einer geraden Zahl $2m$, dann $= m$ und schreibt im letzteren Falle $\frac{1}{2}\mu$ für μ, so giebt die Division beider auf diese Weise gebildeten Gleichungen:

$$\frac{\frac{1}{\mu\pi}\sin\mu\pi+\varphi(\mu,2m)}{\frac{2}{\mu\pi}\sin\frac{1}{2}\mu\pi+\varphi(\frac{1}{2}\mu,m)}$$

$$=\left(1-\frac{\mu^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\mu^2}{(2m-1)^2}\right),$$

und hieraus wird bei unendlich wachsenden m:

$$3)\qquad \cos\tfrac{1}{2}\mu\pi=\left(1-\frac{\mu^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{5^2}\right)\cdots\cdots$$

Die Gleichungen 2) und 3) können auch in den Formen:

$$4)\quad \sin x=x\left(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots,$$

$$5)\quad \cos x=\left(1-\frac{4x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots$$

dargestellt werden; für $x=\frac{1}{2}\pi$ erhält man aus der ersten:

$$1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{3.5}{4^2}\cdot\frac{5.7}{6^2}\cdots,$$

oder umgekehrt:

$$6)\qquad \frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots$$

Nimmt man in den Gleichungen 4) und 5) beiderseits die natürlichen Logarithmen und von diesen die Differenzialquotienten, so ergeben sich die beiden neuen Formeln:

$$7)\quad \cot x=\frac{1}{x}-\frac{2x}{\pi^2-x^2}-\frac{2x}{(2\pi)^2-x^2}-\frac{2x}{(3\pi)^2-x^2}-\cdots,$$

$$8)\quad \tan x=\frac{2x}{(\frac{1}{2}\pi)^2-x^2}+\frac{2x}{(\frac{3}{2}\pi)^2-x^2}+\frac{2x}{(\frac{5}{2}\pi)^2-x^2}+\cdots,$$

um eine ähnliche Reihe für *cosec* x zu erhalten, vereinigen wir die nach Nro. 8) gebildete Gleichung:

$$\tan\tfrac{1}{2}x=\frac{4x}{\pi^2-x^2}+\frac{4x}{(3\pi)^2-x^2}+\frac{4x}{(5\pi)^2-x^2}+\cdots$$

mit der Gleichung 7) durch Addition, wobei linker Hand die Formel $\cot x+\tan\frac{1}{2}x=\operatorname{cosec} x$ zur Anwendung kommt; es ist dann:

$$9)\quad \csc x=\frac{1}{x}+\frac{2x}{\pi^2-x^2}-\frac{2x}{(2\pi)^2-x^2}+\frac{2x}{(3\pi)^2-x^2}-\cdots\cdots$$

Daraus folgt noch eine Reihe für die Sekante, wenn man der vorstehenden Gleichung die Form:

$$\csc x = \frac{1}{x} + \left\{\frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x}\right\} - \left\{\frac{1}{2\pi - x} - \frac{1}{2\pi + x}\right\} + \left\{\frac{1}{3\pi - x} - \frac{1}{3\pi + x}\right\} - \ldots$$

giebt und nachher $\frac{1}{2}\pi - x$ an die Stelle von x treten lässt; man erhält durch Vereinigung der entsprechenden Glieder:

10) $$\sec x = \frac{\pi}{(\frac{1}{2}\pi)^2 - x^2} - \frac{3\pi}{(\frac{3}{2}\pi)^2 - x^2} + \frac{5\pi}{(\frac{5}{2}\pi)^2 - x^2} - \ldots\ldots$$

Sehr nahe liegt hier der Gedanke, die soeben gewonnenen Resultate mit den früheren in §. 33 entwickelten Formeln zu vergleichen; hierzu bedarf es nur einer Umwandlung der vorigen Reihen in Potenzenreihen; wir wollen diese an der Gleichung 7) zeigen. Giebt man ihr die Form:

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2}\,\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2} - \frac{2x}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2} - \frac{2x}{(3\pi)^2}\,\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{3\pi}\right)^2} - \ldots,$$

und setzt $\frac{x}{\pi}$ als echten Bruch, also $\pi > x > -\pi$ voraus, so kann jedes einzelne Glied mittelst der Formel:

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots \quad , \quad 1 > z > -1,$$

in eine unendliche Reihe verwandelt werden; darauf lassen sich alle die Glieder vereinigen, welche gleiche Potenzen von x enthalten, und es entsteht so die neue Gleichung:

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2}{\pi^2} S_2 x - \frac{2}{\pi^4} S_4 x^3 - \frac{2}{\pi^6} S_6 x^5 - \ldots,$$

in welcher zur Abkürzung gesetzt wurde:

11) $$\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots = S_m.$$

Aus der Vergleichung mit der Formel 10) in §. 33 folgt:

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(2n)} V_{2n-1} = \frac{2}{\pi^{2n}} S_{2n},$$

worin eine direkte Bestimmung der Cotangentencoefficienten liegt. Setzt man, wie es gewöhnlich ist,

$$\frac{V_{2n-1}}{2^{2n}} = B_{2n-1},$$

und nennt B_{2n-1} die Bernoullische Zahl des Index $2n - 1$, so geht die vorige Gleichung in die folgende über:

12) $$\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots = \frac{2^{2n-1} B_{2n-1} \pi^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)}.$$

und die Cotangentenreihe lautet dann:

13) $$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1}{1.2} x - \frac{2^4 B_3}{1.2..4} x^3 - \frac{2^6 B_5}{1.2\ldots6} x^5 - \ldots.$$
$$\pi > x > -\pi.$$

Wendet man dieselben Transformationen auf die übrigen Gleichungen 8), 9) und 10) an, so ergeben sich ganz ähnliche Resultate, nämlich aus Nro. 8):

14) $$\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \ldots = \frac{1}{2} \frac{(2^{2n} - 1) B_{2n-1} \pi^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)},$$

15) $$\tan x = \frac{2^2(2^2-1)}{1.2} B_1 x + \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4} B_3 x^3$$
$$+ \frac{2^6(2^6-1)}{1.2\ldots6} B_5 x^5 + \ldots, \tfrac{1}{2}\pi > x > -\tfrac{1}{2}\pi.$$

Ferner aus Nro. 9):

16) $$\frac{1}{1^{2n}} - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \ldots = \frac{1}{2} \frac{(2^{2n} - 2) B_{2n-1} \pi^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)},$$

17) $$\csc x = \frac{1}{x} + \frac{2(2^1-1)}{1.2} B_1 x + \frac{2(2^3-1)}{1.2.3.4} B^3 x^3$$
$$+ \frac{2(2^5-1)}{1.2\ldots6} B_5 x^5 + \ldots, \pi > x > -\pi,$$

endlich aus Nro. 10):

18) $$\frac{1}{1^{2n+1}} - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \ldots = \frac{T_{2n} \pi^{2n+1}}{1.2\ldots(2n).2^{2n+2}},$$

worin T_0, T_2, T_4, ... die Coefficienten der Sekantenreihe bezeichnen.

§. 77.

Die Reste der Reihen von Taylor und Mac Laurin.

I. Bezeichnen wir mit $F(x)$ die Summe der $n$gliedrigen Reihe

$$f(x) + \frac{a-x}{1} f'(x) + \frac{(a-x)^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{(a-x)^{n-1}}{1.2..(n-1)} f^{(n-1)}(x),$$

so ist nach §. 30:

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{(a-x)^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}f^{(n)}(x);$$

mithin umgekehrt durch Integration:

$$F(x)=\int\frac{(a-x)^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}f^{(n)}(x)\,dx+Const.$$

Um die Constante zu bestimmen, setzen wir $x=x$, dann $x=a$ und subtrahiren die beiden so entstehenden Werthe von $F(x)$; ist nun $f^{(n)}(x)$ stetig von $x=x$ bis $x=a$, so ist es auch das Produkt $(a-x)^{n-1}f^{(n)}(x)$ und die Differenz $F(x)-F(a)$ besitzt in diesem Falle denselben Werth wie das bestimmte Integral:

$$\int_a^x\frac{(a-x)^{n-1}f^{(n)}(x)}{1.2.3\ldots(n-1)}\,dx.$$

Vermöge der Bedeutung von $F(x)$ giebt dies:

$$f(x)-f(a)+\frac{a-x}{1}f'(x)+\frac{(a-x)^2}{1.2}f''(x)+\ldots.$$

$$\ldots+\frac{(a-x)^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n-1)}(x)=\int_a^x\frac{(a-x)^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n)}(x)\,dx,$$

wobei wir, um Verwechselungen vorzubeugen, statt der rechten Seite das Integral

$$\int_a^x\frac{(a-u)^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n)}(u)\,du=-\int_x^a\frac{(a-u)^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n)}(u)\,du$$

setzen wollen. Für $a-x=h$, also $a=x+h$ geht die vorige Gleichung in die folgende über:

1) $$f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n-1)}(x)$$

$$=f(x+h)-\int_x^{x+h}\frac{(x+h-u)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(u)\,du,$$

deren Gültigkeit an die Bedingung gebunden ist, dass $f^{(n)}(u)$ stetig bleibt von $u=x$ bis $u=x+h$. Gewöhnlich giebt man der Gleichung 1) die Form:

2) $$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots.$$

$$\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+R_n,$$

wo R_n den Rest der Reihe bezeichnet; derselbe ist:

$$3)\qquad R_n = \int_x^{x+h} \frac{(x+h-u)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(u)\,du,$$

oder aber, wenn man statt u eine neue Variabele $t = u - x$ einführt, also $u = x + t$ und $du = dt$ setzt:

$$4)\qquad R_n = \int_0^h \frac{(h-t)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x+t)\,dt.$$

Aus der Gleichung 2) wird für $x = 0$ und indem man nachher x für h schreibt:

$$5)\qquad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1.2}x^2 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{1.2\ldots(n-1)}x^{n-1} + R_n,$$

wobei $f^{(n)}(u)$ von $u = 0$ bis $u = x$ stetig bleiben muss; für den Rest der Reihe hat man:

$$6)\qquad R_n = \int_0^x \frac{(h-t)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(t)\,dt.$$

Die in §. 30 angegebene Form des Restes der Taylor'schen oder Mac Laurin'schen Reihe ist aus diesen Integralen leicht herzuleiten, indem man von den Formeln des Abschnittes II. in §. 70 Gebrauch macht.

II. Eine wichtige Anwendung dieser Restformeln ist folgende. Wir bezeichnen $F(x+h) - F(x)$ kurz mit $\Delta F(x)$ und geben der Gleichung 2) folgende Gestalt:

$$\Delta F(x) = \frac{h}{1}F'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots + \frac{h^m}{1.2\ldots m}F^{(m)}(x) + \int_0^h \frac{(h-t)^m}{1.2\ldots m} F^{(m+1)}(x+t)\,dt;$$

in dieser setzen wir gleichzeitig

$$\begin{array}{l} F(x) = f(x)\ ,\ f'(x)\ ,\ f''(x)\ ,\ \ldots f^{(2n-1)}(x) \\ \quad m = 2n\ \ ,\ 2n-1,\ 2n-2,\ \ldots\quad 1 \end{array}$$

und erhalten so die folgende Reihe von Gleichungen:

$$\Delta f(x) = \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots\ldots + \frac{h^{2n}}{1.2..(2n)} f^{(2n)}(x)$$
$$+ \int_0^h \frac{(h-t)^{2n}}{1.2..(2n)} f^{(2n+1)}(x+t)\, dt,$$

$$\Delta f'(x) = \frac{h}{1} f''(x) + \frac{h^2}{1.2} f'''(x) + \ldots\ldots + \frac{h^{2n-1}}{1.2..(2n-1)} f^{(2n)}(x)$$
$$+ \int_0^h \frac{(h-t)^{2n-1}}{1.2..(2n-1)} f^{(2n+1)}(x+t)\, dt,$$

$$\Delta f''(x) = \frac{h}{1} f'''(x) + \frac{h^2}{1.2} f^{\mathrm{IV}}(x) + \ldots\ldots + \frac{h^{2n-2}}{1.2..(2n-2)} f^{(2n)}(x)$$
$$+ \int_0^h \frac{(h-t)^{2n-2}}{1.2..(2n-2)} f^{(2n+1)}(x+t)\, dt,$$

. . . .

$$\Delta f^{(2n-1)}(x) = \frac{h}{1} f^{(2n)}(x) + \int_0^h \frac{h-t}{1} f^{(2n+1)}(x+t)\, dt.$$

Wir addiren alle diese Gleichungen, nachdem wir die zweite mit $A_1 h$, die dritte mit $A_2 h^2, \ldots$ die letzte mit $A_{2n-1} h^{2n-1}$ multiplizirt haben, wo $A_1, A_2, \ldots A_{2n-1}$ gewisse nachher zu bestimmende Zahlen bedeuten. Durch Vereinigung der gleichartigen Grössen wird jetzt

$$\Delta f(x) + A_1 h\, \Delta f'(x) + A_2 h^2\, \Delta f''(x) + \ldots$$
$$\ldots + A_{2n-1} h^{2n-1}\, \Delta f^{(2n-1)}(x)$$

$$= \frac{h}{1} f'(x)$$
$$+ \left[\frac{1}{1.2} + \frac{A_1}{1}\right] h^2 f''(x)$$
$$+ \left[\frac{1}{1.2.3} + \frac{A_1}{1.2} + \frac{A_2}{1}\right] h^3 f'''(x)$$

. . . .

$$+ \left[\frac{1}{1\ldots(2n)} + \frac{A_1}{1..(2n-1)} + \frac{A_2}{1..(2n-2)} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{A_{2n-1}}{1}\right] h^{2n} f^{(2n)}(x)$$

$$+\int_0^h\left[\frac{(h-t)^{2n}}{1..(2n)}+\frac{A_1 h(h-t)^{2n-1}}{1.2..(2n-1)}+\frac{A_2 h^2(h-t)^{2n-2}}{1.2..(2n-2)}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{A_{2n-1}h^{2n-1}(h-t)}{1}\right]f^{(2n+1)}(x+t)\,dt.$$

Die noch willkürlichen Coefficienten $A_1, A_2, \dots A_{2n-1}$ wollen wir so wählen, dass die mit $h^2 f''(x)$, $h^3 f'''(x) \dots h^{2n} f^{(2n)}(x)$ versehenen Glieder verschwinden; wir setzen also:

$$7)\quad\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1.2}+\frac{A_1}{1}=0\\ \frac{1}{1.2.3}+\frac{A_1}{1.2}+\frac{A_2}{1}=0\\ \frac{1}{1.2.3.4}+\frac{A_1}{1.2.3}+\frac{A_2}{1.2}+\frac{A_3}{1}=0\\ \dots\dots\dots\\ \frac{1}{1.2..(2n)}+\frac{A_1}{1..(2n-1)}+\dots+\frac{A_{2n-2}}{1.2}+\frac{A_{2n-1}}{1}=0,\end{array}\right.$$

und diese Bestimmung ist jederzeit möglich, weil diese Gleichungen sammt und sonders vom ersten Grade sind. Die vorhergehende Differenzensumme vereinfacht sich jetzt bedeutend; bezeichnen wir zur Abkürzung wie folgt:

$$8)\quad J=\frac{(h-t)^{2n}}{1.2..(2n)}+\frac{A_1 h(h-t)^{2n-1}}{1.2..(2n-1)}+\frac{A_2 h^2(h-t)^{2n-2}}{1.2...(2n-2)}+\dots$$
$$\dots+\frac{A_{2n-1}h^{2n-1}(h-t)}{1},$$

so ist bei umgekehrter Stellung:

$$9)\qquad hf'(x)+\int_0^h J.f^{(2n+1)}(x+t)\,dt$$
$$=\Delta f(x)+A_1 h\Delta f'(x)+A_2 h^2\Delta f''(x)+\dots$$
$$\dots+A_{2n-1}h^{2n-1}\Delta f^{(2n-1)}(x).$$

Diese Gleichung, welche nur voraussetzt, dass $f^{(2n+1)}(u)$ von $u=x$ bis $u=x+h$ stetig bleibe, gestattet einige Transformationen, die wir an dem Spezialfalle $n=2$ durchführen wollen; man wird daraus zugleich ersehen, wie jeder andere Fall zu behandeln sein würde.

Für $n=2$ ergeben sich aus Nro. 7) die Werthe $A_1=-\frac{1}{2}$,

$A_2 = \frac{1}{12}$, $A_3 = 0$, aus Nro. 8) erhält man $J = \frac{1}{24}(h-t)^2 t^2$, mithin ist:

$$10)\qquad hf'(x) + \frac{1}{24}\int_0^h (h-t)^2 t^2 f^{\mathrm{V}}(x+t)\,dt$$
$$= \varDelta f(x) - \tfrac{1}{2} h \varDelta f'(x) + \tfrac{1}{12} h^2 \varDelta f''(x).$$

Der Betrag des Integrales lässt sich, wenn auch nicht genau, doch näherungsweise mittelst der Beziehung

$$A\int_a^b \psi(t)\,dt > \int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,dt > B\int_a^b \psi(t)\,dt$$

finden, in welcher A und B das Maximum und Minimum von $\varphi(t)$ bezeichnen und $\psi(t)$ eine positiv bleibende Funktion ist (§. 70, II.); man kann nämlich entweder $\varphi(t) = f^{\mathrm{V}}(x+t)$, $\psi(t) = (h-t)^2 t^2$ setzen oder auch umgekehrt $\varphi(t) = (h-t)^2 t^2$, $\psi(t) = f^{\mathrm{V}}(x+t)$ nehmen, wobei aber im letzteren Falle $f^{\mathrm{V}}(x+t)$ positiv bleiben muss von $t = 0$ bis $t = h$, was sehr häufig der Fall ist. Bleiben wir bei den letzten Substitutionen stehen, so wird $A = \frac{1}{16} h^4$, $B = 0$, also:

$$\tfrac{1}{16} h^4 [f^{\mathrm{IV}}(x+h) - f^{\mathrm{IV}}(x)] > \int_0^h (h-t)^2 t^2 f^{\mathrm{V}}(x+t)\,dt > 0,$$

und man kann demnach den Werth des Integrales mit

$$\Theta \tfrac{1}{16} h^4 [f^{\mathrm{IV}}(x+h) - f^{\mathrm{IV}}(x)]$$

bezeichnen, wenn Θ ein positiver echter Bruch ist. Aehnliche Betrachtungen würden für den Fall gelten, wo $f^{\mathrm{V}}(x+t)$ negativ wäre von $t = 0$ bis $t = h$ (es würde sich in der That nur das Vorzeichen ändern), und wir können daher die Gleichung 10) unter folgender Form darstellen:

$$hf'(x) = f(x+h) - f(x) - \tfrac{1}{2} h [f'(x+h) - f'(x)]$$
$$+ \tfrac{1}{12} h^2 [f''(x+h) - f''(x)] - \frac{\Theta}{24.16} h^4 [f^{\mathrm{IV}}(x+h) - f^{\mathrm{IV}}(x)],$$

wobei $f^{\mathrm{V}}(u)$ endlich, stetig und von gleichem Vorzeichen sein muss innerhalb des Intervalles $u = x$ bis $u = x + h$. Setzt man noch $f'(u) = \varphi(u)$, so wird aus der vorigen Gleichung die nachstehende:

$$h\varphi(x) = \int_x^{x+h} \varphi(u)\,du - \tfrac{1}{2} h [\varphi(x+h) - \varphi(x)]$$
$$+ \tfrac{1}{12} h^2 [\varphi'(x+h) - \varphi'(x)] - \frac{\Theta}{24.16} h^4 [\varphi'''(x+h) - \varphi'''(x)],$$

vorausgesetzt, dass $\varphi^{IV}(u)$ innerhalb der Grenzen $u = x$ bis $u = x + h$ endlich und stetig bleibt und ausserdem keinen Vorzeichenwechsel erleidet. Wir nehmen noch x der Reihe nach $= a$, $a + h$, $a + 2h, \ldots a + \overline{n-1}\,h$ und addiren alle so entstehenden Gleichungen, wobei sich die Integrale zu einem einzigen Integral zusammenziehen lassen; wir erhalten nämlich:

$$11)\quad h\left\{\varphi(a) + \varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \ldots + \varphi(a+\overline{n-1}\,h)\right\}$$
$$= \int_a^{a+nh} \varphi(u)\,du - \tfrac{1}{2}h[\varphi(a+nh) - \varphi(a)]$$
$$+ \tfrac{1}{12}h^2[\varphi'(a+nh) - \varphi'(a)] - \frac{1}{24.16}h^4 S,$$

wo S den Ausdruck:

$$12)\quad \Theta[\varphi'''(a+h) - \varphi'''(a)] + \Theta_1[\varphi'''(a+2h) - \varphi'''(a+h)] + \ldots$$
$$\ldots + \Theta_{n-1}[\varphi'''(a+nh) - \varphi'''(a+\overline{n-1}\,h)]$$

bedeutet; der kleinste Werth, den u bekommen hat, ist a, der grösste $a + nh$; die Gleichung 11) besteht daher nur dann, wenn $\varphi^{IV}(u)$ stetig und endlich bleibt von $u = a$ bis $u = a + nh$ und zugleich dasselbe Vorzeichen behält. Ebendeswegen beträgt der absolute Werth von S weniger als Das, was aus Nro 12) für $\Theta = \Theta_1 = \Theta_2 \ldots \Theta_{n-1} = 1$ werden würde und ist also $S < \varphi'''(a+nh) - \varphi'''(a)$, oder $S = \vartheta\,[\varphi'''(a+nh) - \varphi'''(a)]$, wo ϑ wiederum einen echten Bruch bezeichnet. Schreiben wir endlich x und f für u und φ, so haben wir nach allen diesen Bemerkungen den Satz:

$$13)\quad h\left\{f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+\overline{n-1}\,h)\right\}$$
$$= \int_a^{a+nh} f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}h[f(a+nh) - f(a)]$$
$$+ \tfrac{1}{12}h^2[f'(a+nh) - f'(a)] - \frac{\vartheta}{384}h^4[f'''(a+nh) - f'''(a)],$$

und zwar muss $f^{IV}(x)$ endlich, stetig und von gleichem Vorzeichen sein innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = a + nh$.

§. 78.

Anwendungen des vorigen Theoremes.

I. Da die Grösse h und die ganze Zahl n willkürlich sind, so kann $a + nh$ jede beliebige Grösse b darstellen; unter dieser Voraussetzung wird $h = \frac{b-a}{n}$ und die Formel 13) des vorigen Paragraphen gestattet folgende Schreibweise:

$$1)\quad \int_a^b f(x)\,dx = h\left\{\tfrac{1}{2}f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots\right.$$
$$\left.\dots + f(a+\overline{n-1}h) + \tfrac{1}{2}f(a+nh)\right\}$$
$$-\tfrac{1}{12}h^2\left\{f'(b) - f'(a)\right\} + \frac{\vartheta}{384}h^4\left\{f'''(b) - f'''(a)\right\}$$

Geometrisch betrachtet ist das Integral die über der Strecke $b - a$ der Abscissenachse stehenden Fläche von der durch die Gleichung $y = f(x)$ charakterisirten Curve; der erste Theil rechter Hand bedeutet die Summe der Trapezflächen, welche entstehen, wenn man die Basis $b - a$ in n gleiche Stücke zerlegt, durch jeden Theilpunkt eine Ordinate legt und die Ordinatenendpunkte durch Gerade verbindet; diese Summe von Trapezflächen bildet einen Näherungswerth der krummlinig begrenzten Fläche, die übrigen Glieder der rechten Seite in Nro. 1) dienen daher, um die Annäherung weiter zu treiben. Bezeichnen wir $f(a)$ mit y_0, $f(a+h)$ mit y_1, $f(a+2h)$ mit y_2 etc., schreiben δ für h und setzen endlich zur Abkürzung:

$$\frac{dy}{dx} = y' \quad , \quad \frac{d^3y}{dx^3} = y''',$$

so geht die Formel 1) in die folgende über:

$$2)\quad \int_a^b y\,dx = \delta\left\{\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n\right\}$$
$$-\tfrac{1}{12}\delta^2\left\{y'_n - y'_0\right\} + \frac{\vartheta}{384}\delta^4\left\{y'''_n - y'''_0\right\},$$

und bildet eine Verbesserung der in §. 66 unter Nro. 2 angegebenen Gleichung. — Die Beschränkung, dass y''' von $x = a$ bis $x = b$ endlich, stetig und von gleichem Vorzeichen sein muss, hindert übrigens die Anwendung der Formel 2) nicht wesentlich; denn man kann das zu berechnende Integral nöthigenfalls durch Theilung des Integrationsintervalles in andere Integrale zerlegen, innerhalb deren Grenzen jene Bedingungen erfüllt sind.

II. So wie vorhin die Gleichung 1) zur Berechnung eines bestimmten Integrales mittelst einer Summe diente, so kann auch umgekehrt die Summe durch das bestimmte Integral ausgedrückt werden. Setzen wir $a = h = 1$, und addiren beiderseits $f(n+1)$, so wird:

$$f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(n+1)$$
$$=\int_1^{n+1} f(x)\,dx+\tfrac{1}{2}\Big\{f(n+1)+f(1)\Big\}$$
$$+\tfrac{1}{12}\Big\{f'(n+1)-f'(1)\Big\}-\frac{\vartheta}{384}\Big\{f'''(n+1)-f'''(1)\Big\},$$

oder, wenn wir $n+1$ mit p bezeichnen und auflösen:

$$f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(p)$$
$$=\int^p f(x)\,dx-\int_1 f(x)\,dx+\tfrac{1}{2}f(1)-\tfrac{1}{12}f'(1)+\frac{\vartheta}{384}f'''(1)$$
$$+\tfrac{1}{2}f(p)+\tfrac{1}{12}f'(p)-\frac{\vartheta}{384}f'''(p),$$

oder durch Vereinigung der von p unabhängigen also constanten Grössen zu einer einzigen Constanten K:

$$f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(p) \tag{3}$$
$$=K+\int^p f(x)\,dx+\tfrac{1}{2}f(p)+\tfrac{1}{12}f'(p)-\frac{\vartheta}{384}f'''(p).$$

Bedingung für die Gültigkeit dieser sehr brauchbaren Formel ist dass $f^{IV}(x)$ endlich, stetig und von gleichem Vorzeichen bleibe innerhalb des Intervalles $x = 1$ bis $x = p$. Ein paar bemerkenswerthe Beispiele sind folgende:

α. Mit der Annahme $f(x) = \dfrac{1}{x}$ genügt man den angegebenen Bestimmungen und zwar für jedes beliebige ganze $p > 1$: es ist daher

$$\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p} \tag{4}$$
$$=K+lp+\tfrac{1}{2}\frac{1}{p}-\tfrac{1}{12}\frac{1}{p^2}+\frac{\vartheta}{64}\frac{1}{p^4},$$

wo es noch auf die Bestimmung der Constanten K ankommt. Schafft man lp auf die linke Seite und lässt darauf p ins Unendliche wachsen, so verschwinden rechts alle Glieder bis auf K und es bleibt

$$5)\qquad Lim\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}-lp\right\}=K.$$

Dass nun die angedeutete Grenze einen bestimmten endlichen Betrag hat, kann man auf folgende Weise sehen. Der in Nro. 5) eingeklammerte Ausdruck werde mit $\psi(p)$ bezeichnet, so ist

$$\psi(p+1)-\psi(p)=\frac{1}{p+1}-l\left(\frac{p+1}{p}\right)=\frac{1}{p+1}-l\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p+1}}\right),$$

und da aus Nro. 13) in §. 30 hervorgeht, dass bei echt gebrochenen x jederzeit $l\left(\frac{1}{1-x}\right)>x$ sein muss, so wird die vorstehende Differenz negativ oder $\psi(p+1)<\psi(p)$; die Funktion $\psi(p)$ nimmt also ab, wenn p wächst. Andererseits giebt die Ungleichung $x>l(1+x)$, welche aus Nro. 3) in §. 32 hervorgeht, für $x=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{p}$ folgende Beziehungen:

$$\tfrac{1}{2}>l(\tfrac{3}{2}),\ \tfrac{1}{3}>l(\tfrac{4}{3}),\ldots\frac{1}{p}>l\left(\frac{p+1}{p}\right);$$

vereinigt man sie mit der Gleichung $\frac{1}{1}=1$ durch Addition, so folgt

$$\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}>l\left(\frac{p+1}{2}\right)+1,$$

und durch Subtraktion von lp:

$$\psi(p)>1-l\,2+l\left(1+\frac{1}{p}\right)>1-l2.$$

Die Abnahme, welche $\psi(p)$ bei unendlich wachsenden p erleidet, geht also nicht ins Unbestimmte hinein, und demnach ist $Lim\ \psi(p) = K$ eine bestimmte zwischen $\frac{1}{1}-l1=1$ und $1-l2=0{,}3..$ liegende Zahl, genauer

$$6)\qquad K=0{,}57721566490\ldots,$$

wie sich bei wirklicher Berechnung mittelst einer grossen Zahl p finden lässt.

Den vortheilhaften Gebrauch der Formel 4) möge das Beispiel $p=1000$ zeigen; das Restglied $\frac{\vartheta}{64}\frac{1}{p^4}<\frac{1}{64}\frac{1}{1000^4}$ ist dann so klein, dass es auf 12 Dezimalen keinen Einfluss ausübt; sind also K und lp auf 12 Dezimalen bekannt, so ergiebt sich hieraus die

Summe $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{1000}$ auf ebensoviel Stellen genau; sie ist 7,48547086...

β. Die Annahme $f(x)=lx$ genügt gleichfalls den aufgestellten Bedingungen für jedes $p>1$; sie giebt

$$
\begin{aligned}
7)\qquad l1+l2+\ldots+lp &= l(1.2.3\ldots p)\\
&= K+p(lp-1)+\tfrac{1}{2}lp+\tfrac{1}{12}\frac{1}{p}-\frac{\vartheta}{192}\frac{1}{p^3}.
\end{aligned}
$$

Für die Bestimmung der Constante erinnern wir zunächst an die identische Gleichung:

$$1.3.5\ldots(2q)=\frac{1.2.3\ldots(2q)}{2.4.6\ldots(2q)}=\frac{1.2.3\ldots(2q)}{2^q.1.2.3..q},$$

aus welcher die nachstehende folgt:

$$\frac{2.4.6\ldots(2q)}{1.3.5\ldots(2q-1)}=\frac{2^{2q}(1.2.3\ldots q)^2}{1.2.3\ldots.(2q)}.$$

Wir nehmen beiderseits die natürlichen Logarithmen, wodurch rechts der Ausdruck $2ql2+2l(1.2..q)-l(1.2\ldots 2q)$ entsteht, und benutzen die Gleichung 7), indem wir zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{12}\frac{1}{p}-\frac{\vartheta}{192}\frac{1}{p^3}=R_p$$

setzen; wir erhalten so:

$$l\left(\frac{2.4.6\ldots(2q)}{1.3.5\ldots(2q-1)}\right)=K-\tfrac{1}{2}l2+\tfrac{1}{2}lq+2R_q-R_{2q},$$

oder nach Multiplikation mit 2 und Subtraktion von $l(2q+1)$:

$$
\begin{aligned}
l\left(\frac{2^2.4^2.6^2\ldots(2q)^2}{1.3^2.5^2\ldots(2q-1)^2}\,\frac{1}{2q+1}\right) &= K-l2\\
&\quad -l\left(2+\frac{1}{q}\right)+2R_q-R_{2q}.
\end{aligned}
$$

Für unendlich wachsende q hat die linke Seite, die unter der Form

$$l\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2q}{2q-1}\cdot\frac{2q}{2q+1}\right)$$

dargestellt werden kann, $l(\frac{1}{2}\pi)$ zur Grenze, rechter Hand verschwinden $\frac{1}{q}$, R_q und R_{2q}, es bleibt daher $l(\frac{1}{2}\pi)=2K-2l2$, woraus $K=\frac{1}{2}l(2\pi)$ folgt. So ist nun:

$$
\begin{aligned}
8)\qquad l(1.2.3\ldots p) &= \tfrac{1}{2}l(2\pi)+(p+\tfrac{1}{2})lp-p\\
&\quad +\tfrac{1}{12}\frac{1}{p}-\frac{\vartheta}{192}\frac{1}{p^3},
\end{aligned}
$$

und diese Formel wird, wie die vorige, um so brauchbarer, je grösser die Zahl p ist.

Benutzt man R_p wieder zur Abkürzung, so ist durch Rückgang zu den Zahlen

$$9)\qquad 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots p = \sqrt{2\pi p}\left(\frac{p}{e}\right)^p e^{R_p}.$$

Vermöge der Bemerkung, dass der Binomialcoefficient μ_k eines ganzen Exponenten μ unter der Form

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots \mu}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\, (\mu - k) \,.\, 1 \,.\, 2 \ldots k}$$

dargestellt werden kann, folgt aus Nro. 9) noch das Resultat:

$$10)\qquad \mu_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mu^{\mu+\frac{1}{2}}}{k^{k+\frac{1}{2}}\,(\mu-k)^{\mu-k+\frac{1}{2}}}\, e^{R_\mu - R_k - R_{\mu-k}},$$

welches für die Wahrscheinlichkeitsermittelung bei oft wiederholten Versuchen von Werth ist.

§. 79.

Die periodischen Reihen von Lagrange.

Eine der interessantesten und zugleich einfachsten Anwendungen der Theorie bestimmter Integrale bildet die Untersuchung der Umstände, unter welchen sich eine gegebene Funktion von x in eine Reihe von der Form

$$A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \ldots$$

oder von der entsprechenden Form

$$B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots$$

verwandeln lässt. Die ganze Betrachtung beruht auf einigen Fundamentalsätzen, die wir zunächst erörtern müssen.

I. Wenn $f(t)$ eine von $t = a$ bis $t = b$ continuirliche Funktion von t bezeichnet, so folgt aus der identischen Gleichung

$$\int f(t) \sin kt \, dt = -f(t)\frac{\cos kt}{k} + \frac{1}{k}\int f(t) \cos kt \, dt$$

augenblicklich die nachstehende

$$\int_a^b f(t) \sin kt \, dt = \frac{f(a)\cos ka - f(b) \cos kb}{k} + \frac{1}{k}\int_a^b f'(t) \cos kt \, dt.$$

Unter der Voraussetzung, dass $f'(t)$ von $t = a$ bis $t = b$ positiv bleibt, also $f(t)$ innerhalb dieses Intervalles nur wächst, kann man auf das Integral rechter Hand die Erörterungen in Nro. II. des

§. 70 für $\psi(x) = f'(x)$ und $\varphi(x) = \cos kx$ anwenden, indem man 1 als den grössten und -1 als den kleinsten Werth von $\cos kx$ oder $\cos kt$ ansieht; es folgt dann

$$f(b) - f(a) > \int_a^b f'(t) \cos kt\, dt > -[f(b) - f(a)],$$

und man darf daher den Werth des Integrales mit $\varepsilon[f(b) - f(a)]$ bezeichnen, wo ε zwischen -1 und $+1$ liegt. Die nunmehrige Gleichung

$$\int_a^b f(t) \sin kt\, dt = \frac{f(a)\cos ka - f(b)\cos kb}{k} + \varepsilon\frac{f(b) - f(a)}{k}$$

giebt zu erkennen, dass für unendlich wachsende k

1) $$Lim \int_a^b f(t) \sin kt\, dt = 0$$

sein muss, wenn $f(t)$ eine von $t = a$ bis $t = b$ nur wachsende, stetig und endlich bleibende Funktion ist. Nähme $f(t)$ während des Integrationsintervalles beständig ab, so würde das Theorem 1) zwar nicht auf $f(t)$, wohl aber auf die Funktion $f(a) - f(t)$ passen und es ist dann

$$Lim \int_a^b [f(a) - f(t)] \sin kt\, dt = 0,$$

d. h.

$$Lim \left\{ f(a)\frac{\cos ka - \cos kb}{k} - \int_a^b f(t) \sin kt\, dt \right\} = 0.$$

Da der vom Integralzeichen freie Theil verschwindet, so folgt auch für eine abnehmende endlich und stetig bleibende Funktion

$$Lim \int_a^b f(t) \sin kt\, dt = 0,$$

und die Gleichung 1) gilt nunmehr für beide Fälle. Wenn die Funktion $f(t)$ innerhalb der Integrationsgrenzen bald wächst, bald abnimmt, also zwischen a und b verschiedene Maxima und Minima erreicht, so denke man sich die Stellen $t = t_1, t_2, \ldots t_m$ aufgesucht, an welchen jene Maxima und Minima eintreten und zerlege darauf das in Rede stehende Integral folgendermaassen:

$$\int_a^b f(t) \sin kt\, dt$$

$$= \int_a^{t_1} f(t) \sin kt\, dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin kt\, dt + \ldots + \int_{t_m}^b f(t) \sin kt\, dt.$$

Innerhalb der rechts vorkommenden Intervalle ist die Funktion $f(t)$ jedesmal eine abnehmende oder eine wachsende; für unendlich werdende k verschwindet daher jedes Integral rechter Hand und es bleibt eine Gleichung von der Form Nro. 1) übrig, für deren Gültigkeit nur noch erfordert wird, dass $f(t)$ stetig und endlich bleibe von $t = a$ bis $t = b$. Aber auch die Bedingung der Stetigkeit lässt sich eliminiren; erleidet nämlich $f(t)$ zwischen a und b Unterbrechungen der Continuität, etwa für $t = \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$, ohne jedoch unendlich zu werden, so ist das fragliche Integral gleich der Summe der Integrale

$$\int_0^{\tau_1 - 0} f(t) \sin kt\, dt + \int_{\tau_1 + 0}^{\tau_2 - 0} f(t) \sin kt\, dt + \ldots + \int_{\tau_n + 0}^b f(t) \sin kt\, dt;$$

in jedem Integrale für sich betrachtet bleibt $f(t)$ stetig und endlich; für $k = \infty$ verschwinden daher die Integrale und es ist wiederum

$$2) \qquad Lim \int_a^b f(t) \sin kt\, dt = 0,$$

und das Bestehen dieser Gleichung ist jetzt nur an die eine Bedingung gebunden, dass $f(t)$ von $t = a$ bis $t = b$ endlich bleibt. — Durch eine völlig analoge Betrachtung lässt sich nachweisen, dass unter derselben Determination die entsprechende Gleichung

$$3) \qquad Lim \int_a^b f(t) \cos kt\, dt = 0$$

gelten muss.

Für das Folgende denken wir uns k als positive ungerade Zahl und setzen

$$f(t) = \frac{F(x+t) - F(x)}{\sin t},$$

wo x eine beliebige Constante und $F(u)$ eine von $u = x + a$ bis $u = x + b$ endlich bleibende Funktion bezeichnet. Nehmen wir $a = 0$ und $b < \pi$, so wird $f(t)$ unter den gemachten Voraussetzungen nicht unendlich und es ist daher

$$Lim \int_0^b \sin kt \, \frac{F(x+t)-F(x)}{\sin t} \, dt = 0,$$

oder durch Integration der einzelnen Theile:

$$4) \qquad Lim \int_0^b \frac{\sin kt}{\sin t} F(x+t) \, dt = F(x) \, . \, Lim \int_0^b \frac{\sin kt}{\sin t} \, dt.$$

Um den Grenzwerth rechter Hand zu finden, zerlegen wir wie folgt:

$$\int_0^b \frac{\sin kt}{\sin t} \, dt = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} \, dt + \int_{\frac{1}{2}\pi}^b \frac{1}{\sin t} \sin kt \, dt,$$

und bemerken, dass nach Nro. 2) das zweite Integral rechter Hand für unendliche k verschwindet, weil $cosec\, t$ von $t = \frac{1}{2}\pi$ bis $t = b < \pi$ endlich bleibt. Vermöge der bekannten Summenformel

$$\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} = 1 + 2 \left\{ \cos 2t + \cos 4t + \ldots + \cos 2nt \right\}$$

findet sich augenblicklich für $2n+1 = k$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} \, dt = \tfrac{1}{2}\pi,$$

und nach diesen beiden Bemerkungen zusammen:

$$Lim \int_0^b \frac{\sin kt}{\sin t} \, dt = Lim \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} \, dt = \tfrac{1}{2}\pi, \quad 0 < b < \pi.$$

Die Gleichung 4) gestaltet sich nun zu folgendem eigenthümlichen Theoreme:

$$5) \qquad Lim \int_0^b \frac{\sin kt}{\sin t} F(x+t) \, dt = \tfrac{1}{2}\pi F(x), \quad 0 < b < \pi.$$

Für $b = \pi$ gilt dasselbe nicht mehr, weil der für $f(t)$ substituirte Ausdruck für $t = b = \pi$ unendlich werden würde; man hat in diesem Falle

$$\int_0^\pi \frac{\sin kt}{\sin t} F(x+t) \, dt = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} F(x+t) \, dt + \int_{\frac{1}{2}\pi}^\pi \frac{\sin kt}{\sin t} F(x+t) \, dt;$$

setzt man im zweiten Integrale rechter Hand $t = \pi - \tau$, so verwandelt es sich wegen des ungeraden k in

$$-\int_{\frac{1}{2}\pi}^{0}\frac{\sin k\tau}{\sin\tau}\,F(x+\pi-\tau)\,d\tau=\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin k\tau}{\sin\tau}\,F(x+\pi-\tau)\,d\tau,$$

wobei wir wieder t für τ schreiben können, weil in einem bestimmten Integrale nichts auf die Bezeichnung der Integrationsvariabelen ankommt; die vorige Gleichung lautet jetzt

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin kt}{\sin t}F(x+t)\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin kt}{\sin t}F(x+t)\,dt+\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin kt}{\sin t}F(x+\pi-t)\,dt,$$

und indem man die Formel 5) auf jedes einzelne der rechts vorhandenen Integrale anwendet, ergiebt sich:

$$6)\qquad Lim\int_0^{\pi}\frac{\sin kt}{\sin t}F(x+t)\,dt=\tfrac{1}{2}\pi F(x)+\tfrac{1}{2}\pi F(x+\pi).$$

II. Nach diesen Vorbereitungen ist es leicht, die Summe der unendlichen Reihe zu finden, von welcher das Integral

$$\int_0^{\pi} f(u)\cos m\,(u\mp\alpha)\,du$$

das allgemeine Glied bildet. Setzen wir nämlich $m=0, 1, 2, \ldots n$ und nehmen das erste Glied nur zur Hälfte, so entsteht die endliche Reihe

$$7)\qquad \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} f(u)\,du+\int_0^{\pi} f(u)\cos(u\mp\alpha)\,du+\int_0^{\pi} f(u)\cos 2(u\mp\alpha)\,du+\ldots$$

$$\ldots+\int_0^{\pi} f(u)\cos n\,(u\mp\alpha)\,du$$

$$=\int_0^{\pi} f(u)\left[\tfrac{1}{2}+\cos(u\mp\alpha)+\cos 2\,(u\mp\alpha)+\ldots+\cos n\,(u\mp\alpha)\right]du,$$

und durch Summirung der eingeklammerten Reihe

$$8)\qquad \int_0^{\pi} f(u)\,\frac{\sin(2n+1)\dfrac{u\mp\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{u\mp\alpha}{2}}\,du.$$

Lassen wir n ins Unendliche wachsen und bezeichnen $2n+1$

mit k, so wird die Reihe unter Nro. 7) zur unendlichen und aus der Vergleichung mit Nro. 8) folgt:

$$9)\qquad \tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(u)\,du + \sum_1^\infty \int_0^\pi f(u)\cos m(u\mp\alpha)\,du$$
$$= Lim \int_0^\pi \frac{\sin\frac{1}{2}k(u\mp\alpha)}{2\sin\frac{1}{2}(u\mp\alpha)} f(u)\,du,$$

wobei sich das Summenzeichen auf die Werthe $m = 1, 2, 3, \ldots$ bezieht. Wir betrachten nun die willkürliche Constante α als positiv und theilen die weitere Untersuchung in zwei Theile, je nachdem das obere oder untere Zeichen genommen wird.

Im ersten Falle setzen wir $\frac{1}{2}(u-\alpha) = v$, also $u = \alpha + 2v$; das rechter Hand befindliche Integral geht dann in das folgende über:

$$\int_{-\frac{1}{2}\alpha}^{\frac{1}{2}(\pi-\alpha)} \frac{\sin kv}{\sin v} f(\alpha+2v)\,dv = \int_{-\frac{1}{2}\alpha}^{0} \frac{\sin kv}{\sin v} f(\alpha+2v)\,dv + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-\alpha)} \frac{\sin kv}{\sin v} f(\alpha+2v)\,dv,$$

oder, wenn im ersten Integrale rechter Hand $v = -t$, im zweiten $v = t$ substituirt wird:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\alpha} \frac{\sin kt}{\sin t} f(\alpha-2t)\,dt + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-\alpha)} \frac{\sin kt}{\sin t} f(\alpha+2t)\,dt.$$

Für unendlich wachsende k sind nun die früheren Sätze anwendbar und zwar wollen wir dabei die Fälle $\alpha = 0$, $0 < \alpha < \pi$ und $\alpha = \pi$ unterscheiden; wir erhalten dann sehr leicht:

$$10)\qquad \tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(u)\,du + \sum_1^\infty \int_0^\pi f(u)\cos m(u-\alpha)\,du$$
$$= \frac{\pi}{2} f(+0),\qquad \pi\frac{f(\alpha-0)+f(\alpha+0)}{2},\qquad \frac{\pi}{2} f(\pi-0),$$

je nachdem $\alpha = 0$, $0 < \alpha < \pi$, $\alpha = \pi$ ist.

Gilt in der Gleichung 9) das untere Vorzeichen, so sei $\frac{1}{2}(u+\alpha) = t$, mithin $u = 2t - \alpha$; das Integral rechter Hand wird dann:

$$\int_{\frac{1}{2}\alpha}^{\frac{1}{2}(\pi+\alpha)} \frac{\sin kt}{\sin t} f(-\alpha+2t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+\alpha)} \frac{\sin kt}{\sin t} f(-\alpha+2t)\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}\alpha} \frac{\sin kt}{\sin t} f(-\alpha+2t)\,dt,$$

wo sich die Sätze 5) und 6) wiederum anwenden lassen; mittelst derselben findet man ohne Mühe:

11) $$\frac{1}{2}\int_0^\pi f(u)\,du + \sum_1^\infty \int_0^\pi f(u) \cos m(u+\alpha)\,du$$

$$= \frac{\pi}{2} f(+0), \qquad 0 \quad , \qquad \frac{\pi}{2} f(\pi+0)$$

für $\alpha = 0 \quad , \quad 0<\alpha<\pi, \qquad \alpha = \pi.$

Durch Addition der Gleichungen 10) und 11) und durch nachherige Division mit π folgt nun, dass die Summe der Reihe

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(u)\,du + \sum_1^\infty \left\{ \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(u) \cos mu\,du \,.\, \cos m\alpha \right\}$$

durch $f(0)$, $\frac{1}{2}[f(\alpha-0)+f(\alpha+0)]$, oder $\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(\pi+0)]$ ausgedrückt wird, je nachdem $\alpha = 0$, zwischen 0 und π enthalten oder $= \pi$ ist; dabei kann $\frac{1}{2}[f(\alpha-0)+f(\alpha+0)] = f(\alpha)$ gesetzt werden, wenn die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = \alpha$ stetig bleibt. Schreiben wir x für α und setzen zur Abkürzung:

12) $$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(u) \cos nu\,du,$$

so erhalten wir folgendes Theorem:

Bleibt die Funktion $f(x)$ endlich und stetig von $x = 0$ bis $x = \pi$, so gilt die Gleichung

13) $$f(x) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \ldots$$

für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = \pi$ mit Einschluss beider Grenzen; erleidet sie aber an einer Stelle innerhalb dieses Intervalles eine Unterbrechung der Continuität, ohne jedoch unendlich zu werden, so ist die Summe der obigen Reihe gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden Werthen, welche dem $f(x)$ an jener Stelle zukommen.

Durch Subtraktion der Gleichung 11) von der Gleichung 10) ergiebt sich für

14) $$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(u) \sin nu\,du$$

ein ganz ähnliches Theorem; es lautet:

Bleibt $f(x)$ stetig und endlich von $x = 0$ bis $x = \pi$, so ist die Gleichung

15) $$f(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \dots.$$

für alle zwischen 0 und π liegende Werthe von x richtig, nicht aber für $x = 0$ und für $x = \pi$, in welchen Fällen die Reihe verschwindet; wird $f(x)$ zwischen 0 und π discontinuirlich, so giebt die Summe der Reihe das arithmetische Mittel der beiden an der Discontinuitätsstelle vorhandenen Werthe von $f(x)$.

Ausserhalb des Intervalles 0 bis π gilt im Allgemeinen keine der Gleichungen 13) und 15); die Summen der darin vorkommenden Reihen sind nämlich periodische Funktionen von x, wie $\cos mx$ und $\sin mx$; eine weitere Gleichung könnte also nur dann stattfinden, wenn zufälligerweise $f(x)$ gleichfalls periodisch wäre. So würde z. B. für negative x die Gleichung 13) gelten, wenn $f(-x) = f(x)$, und die Gleichung 15), wenn $f(-x) = -f(x)$ wäre, was wohl in speziellen Fällen vorkommen kann, im Allgemeinen aber nicht anzunehmen ist.

§. 80.

Anwendungen der vorigen Theoreme.

I. Setzt man $f(x) = x$ und beachtet die sehr leicht zu entwickelnden Gleichungen

$$\int_0^\pi u \cos nu\, du = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2}$$

$$\int_0^\pi u \sin nu\, du = \frac{\pi \cos(n+1)\pi}{n},$$

so führen die Theoreme 13) und 15) zu den folgenden zwei Formeln:

1) $$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left\{\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right\}$$

$$\pi \geqq x \geqq 0,$$

2) $$\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots$$

$$\pi > x > 0,$$

deren zweite auch für $x = 0$ und für negative $x < \pi$ gilt, weil die linke Seite die Eigenschaften $f(0) = 0$ und $f(-x) = -f(x)$ besitzt.

Die Substitution $f(x) = e^{ax} + e^{-ax}$ giebt vermöge der Integralformel

$$\int_0^\pi (e^{au} + e^{-au}) \cos nu \, du = \frac{a \cos n\pi}{a^2 + n^2} (e^{a\pi} - e^{-a\pi})$$

folgende Reihenentwickelung:

$$3) \quad \frac{\pi}{2} \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} = \frac{1}{2a} - \frac{a \cos x}{a^2 + 1^2} + \frac{a \cos 2x}{a^2 + 2^2} - \dots,$$

wobei das Gültigkeitsintervall $\pi \geqq x \geqq 0$ auf $\pi \geqq x \geqq -\pi$ erweitert werden kann, weil $f(-x) = -f(x)$ ist. Ein analoges Resultat ergiebt sich aus Nro. 15) für $f(x) = e^{ax} - e^{-ax}$, nämlich:

$$4) \quad \frac{\pi}{2} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} = \frac{\sin x}{a^2 + 1^2} - \frac{2 \sin 2x}{a^2 + 2^2} + \frac{3 \sin 3x}{a^2 + 3^2} - \dots,$$

und zwar gilt dasselbe für $\pi > x > -\pi$. Man würde das Nämliche durch Differenziation der Gleichung 3) in Beziehung auf x erhalten, darf indessen diesen Prozess nicht zum zweiten Male anwenden, weil man sonst auf eine divergente Reihe kommen würde.

Für $f(x) = \cos \mu x$ und unter der Voraussetzung, dass μ keine ganze Zahl ist, findet sich aus Nro. 13):

$$5) \quad \frac{\pi}{2} \frac{\cos \mu x}{\sin \mu \pi} = \frac{1}{2\mu} - \frac{\mu \cos x}{\mu^2 - 1^2} + \frac{\mu \cos 2x}{\mu^2 - 2^2} - \dots$$
$$\pi \geqq \mu \geqq -\pi,$$

und aus Nro. 15) für $f(x) = \sin \mu x$ unter derselben Voraussetzung:

$$6) \quad \frac{\pi}{2} \frac{\sin \mu x}{\sin \mu \pi} = \frac{\sin x}{1^2 - \mu^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2 - \mu^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2 - \mu^2} - \dots$$
$$\pi > x > -\pi,$$

wie man auch aus den Formeln 3) und 4) durch die Substitution $a = \mu \sqrt{-1}$ erhalten könnte. Setzt man in Nro. 5) einmal $x = 0$, dann $x = \pi$ und in Nro. 6) $x = \frac{1}{2}\pi$, so kommt man auf Resultate, welche mit denen des §. 76 übereinstimmen, sobald man $\mu\pi$ oder $\frac{1}{2}\mu\pi$ mit einem einzigen Buchstaben bezeichnet.

II. Nach diesen speziellen Beispielen kehren wir zu den allgemeinen Theoremen des vorigen Paragraphen zurück, um noch eine wichtige Transformation zu erwähnen, welche das Integral

$$\int_0^\pi f(u) \cos nu\, du$$

in dem Falle betrifft, wo $f(u)$ von der Form $\varphi(\cos u)$ ist. Diese Umwandlung beruht auf folgendem einfachen Satze: wenn die Funktion $\varphi(x)$ so beschaffen ist, dass sie und ihre $n-1$ ersten Differenzialquotienten von $x=a$ bis $x=b$ endlich und stetig bleiben, wenn ferner $\psi(x)$ und $\psi'(x)$, $\psi''(x)$, ... $\psi^{(n-1)}(x)$ sowohl für $x=b$ als für $x=a$ verschwinden, so gilt die Gleichung

$$\int_a^b \psi(x)\, \varphi^{(n)}(x)\, dx = (-1)^n \int_a^b \psi^{(n)}(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

von deren Richtigkeit man sich sehr leicht durch $n$malige Anwendung der theilweisen Integration überzeugt. Für

$$\psi(x) = (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}, \quad a = -1, \quad b = +1$$

sind nun die dem $\psi(x)$ auferlegten Bedingungen erfüllt, also

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\, \varphi^{(n)}(x)\, dx = (-1)^n \int_{-1}^{+1} \frac{d^n (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n}\, \varphi(x)\, dx.$$

Vermöge der unter Nro. 12) auf Seite 182 entwickelten Formel ist aber

$$\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}\, 1.3.5..(2n-1)}{n} \sin(n \operatorname{Arc} \cos x),$$

und daher wird aus der vorigen Gleichung die folgende:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\, \varphi^{(n)}(x)\, dx$$
$$= -\frac{1.3.5...(2n-1)}{n} \int_{-1}^{1} \frac{d \sin(n \operatorname{Arc} \cos x)}{dx}\, \varphi(x)\, dx;$$

hebt man rechts dx und setzt beiderseits $\operatorname{Arc} \cos x = u$, also $x = \cos u$, so folgt

$$\int_0^\pi \sin^{2n} u\, \varphi^{(n)}(\cos u)\, du = -\frac{1.3.5...(2n-1)}{n} \int_\pi^0 d \sin nu\,.\, \varphi(\cos u),$$

oder endlich, wenn man auf das Integral rechter Hand reduzirt:

$$7) \quad \int_0^\pi \varphi(\cos u) \cos nu\, du = \frac{1}{1.3.5..(2n-1)} \int_0^\pi \varphi^{(n)}(\cos u) \sin^{2n} u\, du.$$

Um den Gebrauch dieser Formel an einem Beispiele zu zeigen, sei

$$f(x) = (1 - 2a\cos x + a^2)^{-\frac{1}{2}} = \varphi(\cos x)$$

die nach dem Theoreme 13) des vorigen Paragraphen zu entwickelnde Funktion; es wird dann

$$\varphi(z) = (1 - 2az + a^2)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

$$\frac{\varphi^{(n)}(z)}{1.3.5\ldots(2n-1)} = a^n(1 - 2az + a^2)^{-(n+\frac{1}{2})},$$

also nach Nro. 7):

$$8)\quad \int_0^\pi \frac{\cos nu\,du}{\sqrt{1-2a\cos u+a^2}} = a^n \int_0^\pi \left(\frac{\sin u}{\sqrt{1-2a\cos u+a^2}}\right)^{2n} \frac{du}{\sqrt{1-2a\cos u+a^2}}.$$

Das Integral rechter Hand vereinfacht sich mittelst der Substitution

$$\frac{\sin u}{\sqrt{1-2a\cos u+a^2}} = \sin w, \quad w = Arcsin\,\frac{\sin u}{\sqrt{1-2a\cos u+a^2}},$$

man erhält nämlich daraus

$$\frac{1}{\sqrt{1-a^2\sin^2 w}} = \frac{\sqrt{1-2a\cos u+a^2}}{1-a\cos u}, \quad dw = \frac{(1-a\cos u)\,du}{1-2a\cos u+a^2},$$

und durch Multiplikation dieser Gleichungen

$$\frac{dw}{\sqrt{1-a^2\sin^2 w}} = \frac{du}{\sqrt{1-2a\cos u+a^2}}.$$

Setzen wir dies in die Gleichung 8), nachdem dieselbe mit $\frac{2}{\pi}$ multiplizirt worden ist, so haben wir als Resultat, dass die Coefficienten A in der Gleichung

$$9)\quad \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}} = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + \ldots$$

durch die Formel

$$10)\quad A_n = \frac{2}{\pi}a^n \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} w\,dw}{\sqrt{1-a^2\sin^2 w}} = \frac{4}{\pi}a^n \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^{2n} w\,dw}{\sqrt{1-a^2\sin^2 w}}$$

zu bestimmen sind. Die wirkliche Ausführung dieser Integration mittelst einer unendlichen Reihe hat keine Schwierigkeit.

§. 81.

Erweiterungen der früheren Sätze; Theorem von Fourier.

I. Die Grenzen 0 und π, innerhalb deren die Reihenentwickelungen 13) und 15) in §. 76 gültig bleiben, lassen sich auf folgende Weise beliebig erweitern; es sei für ein beliebiges positives λ:

$$x = \frac{\pi z}{\lambda}, \quad u = \frac{\pi t}{\lambda}, \quad f\left(\frac{\pi z}{\lambda}\right) = \varphi(z),$$

so geht die Gleichung 13) in die folgende über:

1) $$\varphi(z) = \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \frac{\pi z}{\lambda} + A_2 \cos \frac{2\pi z}{\lambda} + \ldots.$$

und gilt unter der Bedingung:

$$\pi \geqq \frac{\pi z}{\lambda} \geqq 0, \text{ d. h. } \lambda \geqq z \geqq 0.$$

Die Coefficienten A bestimmen sich wegen $f\left(\frac{\pi t}{\lambda}\right) = \varphi(t)$ nach der Formel

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int \varphi(t) \cos \frac{n\pi t}{\lambda}\, d\left(\frac{\pi t}{\lambda}\right),$$

wobei die Integrationsgrenzen, welche 0 und π für u waren, nunmehr durch die Gleichungen $\frac{\pi t}{\lambda} = 0$ und $\frac{\pi t}{\lambda} = \pi$ bestimmt werden, woraus $t = 0$ und $t = \lambda$ folgt; so wird:

2) $$A_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda \varphi(t) \cos \frac{n\pi t}{\lambda}\, dt.$$

Mittelst ganz derselben Substitutionen ergiebt sich aus den Formeln 15) und 14) in §. 76, dass die Gleichung:

3) $$\varphi(z) = B_1 \sin \frac{\pi z}{\lambda} + B_2 \sin \frac{2\pi z}{\lambda} + B_3 \sin \frac{3\pi z}{\lambda} + \ldots.$$

unter der erweiterten Bedingung

$$\lambda > z > 0$$

gültig bleibt, und dass die Coefficienten B aus der Formel

4) $$B_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda \varphi(t) \sin \frac{n\pi t}{\lambda}\, dt$$

zu bestimmen sind.

II. Die Gleichungen 1) und 3) lassen sich endlich noch zu einer einzigen Formel vereinigen, welche von $z = -\lambda$ bis $z = +\lambda$ richtig ist. Die Entwickelung unter Nro. 1) würde nämlich für negative z Bestand haben, wenn zufällig $\varphi(-z) = \varphi(z)$ wäre; dieser Bedingung kann man aber ganz allgemein durch die Substitution

$$\varphi(z) = \frac{\psi(z) + \psi(-z)}{2}$$

genügen und daher gilt die Gleichung

5) $$\frac{\psi(z) + \psi(-z)}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \frac{\pi z}{\lambda} + A_2 \cos \frac{2\pi z}{\lambda} + A_3 \cos \frac{3\pi z}{\lambda} + \ldots .$$

von $z = -\lambda$ bis $z = +\lambda$. Der Coefficient A_n ist

$$A_n = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \psi(t) \cos \frac{n\pi t}{\lambda}\, dt + \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \psi(-t) \cos \frac{n\pi t}{\lambda}\, dt.$$

Setzt man im ersten Integrale $t = u$, im zweiten $t = -u$, so ändert sich das erste nicht und aus dem zweiten wird

$$-\frac{1}{\lambda}\int_0^{-\lambda} \psi(u) \cos \frac{n\pi u}{\lambda}\, du = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^0 \psi(u) \cos \frac{n\pi u}{\lambda}\, du,$$

und dadurch ziehen sich beide Integrale auf das eine zusammen:

6) $$A_n = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^\lambda \psi(u) \cos \frac{n\pi u}{\lambda}\, du.$$

Ferner würde die Entwickelung in Nro. 3) für $\lambda > z > -\lambda$ richtig bleiben, wenn $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(-z) = -\varphi(z)$ wäre; beiden Bedingungen genügt man mittelst der Substitution:

$$\varphi(z) = \frac{\psi(z) - \psi(-z)}{2},$$

und hat daher die für $\lambda > z > -\lambda$ gültige Gleichung:

7) $$\frac{\psi(z) - \psi(-z)}{2}$$

$$= B_1 \sin \frac{\pi z}{\lambda} + B_2 \sin \frac{2\pi z}{\lambda} + B_3 \sin \frac{3\pi z}{\lambda} + \ldots,$$

deren Coefficienten ganz derselben Umwandlung unterworfen werden können, die wir oben auf A_n angewendet haben; man erhält nämlich:

8) $$B_n = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^\lambda \psi(u) \sin \frac{n\pi u}{\lambda}\, du.$$

Durch Addition der Gleichungen 5) und 7) gelangt man schliesslich zu der Formel:

$$9)\qquad \psi(z) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos\frac{\pi z}{\lambda} + A_2 \cos\frac{2\pi z}{\lambda} + \dots\dots$$
$$+ B_1 \sin\frac{\pi z}{\lambda} + B_2 \sin\frac{2\pi z}{\lambda} + \dots\dots,$$

welche für alle zwischen $-\lambda$ und $+\lambda$ liegende z gilt; für $z = \pm\lambda$ dagegen besteht die Gleichung nicht mehr, es verschwindet dann der zweite Theil der Doppelreihe und die Summe ist nicht $\psi(\lambda)$, sondern $\frac{1}{2}\{\psi(\lambda) + \psi(-\lambda)\}$, wie aus Nro. 5) unmittelbar hervorgeht.

Cap. XVII.

Die Transcendenten der Integralrechnung.

§. 82.

Der Integrallogarithmus.

Wenn ein Differenzial durch die gewöhnlichen einfachen Funktionen nicht integrabel ist, so bildet das Integral eine ihrer Art nach neue Funktion der Integrationsvariabelen, und man kann sich die Aufgabe stellen, aus der durch das Integral selbst gegebenen Definition einer solchen Transcendenten die hauptsächlichsten Eigenschaften der letzteren herzuleiten. Dabei ist es nöthig, der willkürlichen Constanten des Integrales einen bestimmten Werth zu ertheilen, oder, was dasselbe ist, das Integral zwischen bestimmten Grenzen zu nehmen, damit die aufgestellte Definition an keiner Unbestimmtheit leide. Wäre z. B. der natürliche Logarithmus nicht bekannt gewesen, so würde die Integralrechnung bei Gelegenheit der Integration von $\frac{dx}{x}$ darauf geführt haben; die Gleichung

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \varphi(x)$$

hätte dann als Definition der Funktion $\varphi(x)$ gedient und man würde daraus die Eigenschaft $\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi(x_1 x_2)$, sowie die logarithmischen Reihen entwickelt haben. Eines der einfachsten unter den in geschlossener Form nicht integrabelen Differenzialen ist $\frac{dx}{lx}$; bestimmen wir die Constante seines Integrales so, dass letzteres für

$x = 0$ verschwindet, so entsteht das zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = x$ genommene Integral von $\frac{dx}{lx}$; dieses heisst der **Integrallogarithmus** von x, in Zeichen:

$$1)\qquad \int_0^x \frac{dx}{lx} = li(x), \quad \text{oder} \int_0^\xi \frac{dx}{lx} = li(\xi).$$

Für $\xi < 1$ ist lx innerhalb des Integrationsintervalles negativ, mithin auch $li(\xi)$ negativ

$$= -\int_0^\xi \frac{dx}{l\left(\frac{1}{x}\right)},$$

wobei man bemerken kann, dass der Formel $l\left(\frac{1}{1-z}\right) = z + \frac{1}{2}z^2 + \text{etc.}$ zufolge

$$z < l\left(\frac{1}{1-z}\right) < \frac{z}{1-z},$$

$$1 - x < l\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1-x}{x},$$

mithin durch allseitige Umkehrung

$$\frac{1}{1-x} > \frac{1}{l\left(\frac{1}{x}\right)} > \frac{x}{1-x}$$

sein muss, woraus sich ergiebt, dass $li(\xi)$, bei echtgebrochenen ξ zwischen den Zahlen $l(1-\xi)$ und $l(1-\xi)+\xi$ liegt; für $\xi = 1-0$ wird daher $li(1-0) = -\infty$. Wenn endlich ξ die Einheit übersteigt, so erleidet der Ausdruck $\frac{1}{lx}$ innerhalb des Integrationsintervalles eine Unterbrechung der Continuität; wir verstehen dann unter $li(\xi)$ den **Hauptwerth** des in Nro. 1) verzeichneten Integrales, d. h. den Werth, welchen die Summe

$$\int_0^{1-\delta} \frac{dx}{lx} + \int_{1+\delta}^\xi \frac{dx}{lx}$$

für $\delta = 0$ annimmt.

Die Gleichung 1) lässt einige Transformationen zu, welche wir zunächst erörtern wollen. Für $\xi = e^{-\eta}$, $x = e^{-u}$ wird

$$2)\qquad li(e^{-\eta}) = \int_\infty^\eta \frac{du}{u} e^{-u} = -\int_\eta^\infty \frac{du}{u} e^{-u};$$

ferner für $\xi = e^{+\eta}$ und $x = e^{-u}$:

3) $$li(e^{+\eta}) = \int_{\infty}^{-\eta} \frac{du}{u} e^{-u} = -\int_{-\eta}^{\infty} \frac{du}{u} e^{-u}.$$

Die Substitution $u = \eta t + \eta$ giebt weiter aus Nro. 2):

4) $$e^{\eta} li(e^{-\eta}) = -\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t} e^{-\eta t},$$

und die Substitution $u = \eta t - \eta$ in Nro. 3):

5) $$e^{-\eta} li(e^{+\eta}) = +\int_0^{\infty} \frac{dt}{1-t} e^{-\eta t}.$$

Um eine Reihe zur Berechnung des Integrallogarithmus zu erhalten, betrachten wir zunächst das Integral

$$-\int_{\eta}^{n} \frac{du}{u} e^{-u} = -\int_{\eta}^{\infty} \frac{du}{u} e^{-u} + \int_{n}^{\infty} \frac{du}{u} e^{-u}$$
$$= li(e^{-\eta}) - li(e^{-n}),$$

worin n eine ganze positive Zahl sein möge; vermöge der bekannten Reihe für e^{-u} ergiebt sich

$$li(e^{-\eta}) - li(e^{-n}) = l\eta - \frac{1}{1}\frac{\eta}{1} + \frac{1}{2}\frac{\eta^2}{1.2} - \dots$$
$$- \left\{ ln - \frac{1}{1}\frac{n}{1} + \frac{1}{2}\frac{n^2}{1.2} - \dots \right\},$$

oder auch, wie man leicht bestätigt findet:

6) $$li(e^{-\eta}) - li(e^{-n}) = l\eta - \frac{1}{1}\frac{\eta}{1} + \frac{1}{2}\frac{\eta^2}{1.2} - \dots$$
$$+ \int_0^1 \frac{1-e^{-nz}}{z} dz - ln;$$

für unendlich wachsende n geht die linke Seite in $li(e^{-\eta}) - li(0) = li(e^{-\eta})$ über und es kommt also wesentlich darauf an, den Grenzwerth des zweiten Theiles rechter Hand zu ermitteln, wobei zur Abkürzung

7) $$K_n = \int_0^1 \frac{1-e^{-nz}}{z} dz - ln$$

sein möge. Nun ist identisch:

$$K_n = \int_0^1 \frac{1-(1-z)^n}{z}\,dz - ln - \int_0^1 \frac{e^{-nz}-(1-z)^n}{z}\,dz.$$

Die erste Integration wird dadurch ausgeführt, dass man $1-z=u$ setzt, dann die bekannte Gleichung $(1-u^n):(1-u) = 1+u+u^2+\ldots+u^{n-1}$ in Anwendung bringt und die einzelnen Glieder integrirt; dies giebt

$$K_n = \tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} - ln - \int_0^1 \frac{e^{-nz}-(1-z)^n}{z}\,dz.$$

Für das noch übrige Integral bemerken wir zunächst, dass für echtgebrochene z immer $e^{-z} > 1-z$, also $e^{-nz} > (1-z)^n$, der Werth des Integrales folglich positiv ist. Andererseits führt die Ungleichung

$$\alpha^n - \beta^n < n\alpha^{n-1}(\alpha-\beta), \quad \alpha > \beta,$$

auf unseren Fall angewendet, zu der Beziehung

$$\frac{e^{-nz}-(1-z)^n}{z} < n\frac{1-e^z+ze^z}{z}\,e^{-nz} < nze^{-nz},$$

wobei die Bemerkung benutzt ist, dass $(1-e^z+ze^z):z$ weniger als z beträgt, so lange z die Einheit nicht übersteigt. Es ist nun weiter

$$0 < \int_0^1 \frac{e^{-nz}-(1-z)^n}{z}\,dz < n\int_0^1 z e^{-nz}\,dz,$$

oder wenn man die Integration rechter Hand ausführt und mit ϑ einen nicht weiter bestimmten positiven echten Bruch bezeichnet:

$$\int_0^1 \frac{e^{-nz}-(1-z)^n}{z}\,dz = \vartheta\left\{\frac{1}{n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-n}\right\}.$$

Aus der nunmehrigen Gleichung

$$K_n = \tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} - ln$$
$$- \vartheta\left\{\frac{1}{n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-n}\right\}$$

geht hervor, dass $Lim\, K_n$ mit der in §. 78 Formel 5) vorkommenden Constanten $K = 0{,}5772156\ldots$ identisch ist; man hat daher aus Nro. 6):

8) $$li(e^{-\eta}) = K + l\eta - \tfrac{1}{1}\frac{\eta}{1} + \tfrac{1}{2}\frac{\eta^2}{1.2} - \ldots.$$

Um eine Reihe für $li(e^{+\eta})$ zu erhalten, kann man von der Gleichung

$$-\int_{-\eta}^{+\eta}\frac{du}{u}e^{-u}=li(e^{+\eta})-li(e^{-\eta})$$

ausgehen und ganz dieselben Schlüsse in Anwendung bringen, indem man festhält, dass es sich um den Hauptwerth des Integrales handelt; man findet so:

$$9)\qquad li(e^{+\eta})=K+l\eta+\tfrac{1}{1}\,\frac{\eta}{1}+\tfrac{1}{2}\,\frac{\eta^2}{1.2}+\ldots.$$

Die Formeln 8) und 9) lassen sich zu einer einzigen für jedes η geltenden zusammenziehen, nämlich:

$$10)\qquad li(e^{\eta})=K+\tfrac{1}{2}l(\eta^2)+\tfrac{1}{1}\,\frac{\eta}{1}+\tfrac{1}{2}\,\frac{\eta^2}{1.2}+\ldots.$$

und für $\eta=l\xi$:

$$11)\qquad li(\xi)=K+\tfrac{1}{2}l[(l\xi)^2]+\tfrac{1}{1}\,\frac{l\xi}{1}+\tfrac{1}{2}\,\frac{(l\xi)^2}{1.2}+\ldots.$$

Die vorstehende Reihe, obwohl immer convergent, ist doch für sehr kleine (d. h. nahe bei Null liegende) oder sehr grosse ξ unbrauchbar zur wirklichen Berechnung von $li(\xi)$, weil in diesen beiden Fällen die rasche Convergenz erst spät anfängt. Wir betrachten daher diese Fälle noch besonders.

Beim Anblicke der Gleichung 4) liegt der Gedanke nahe, den Quotienten $1:(1+t)$ in eine Reihe zu verwandeln; diese darf aber nicht unendlich genommen werden, weil die Bedingung $1>t>-1$ nicht innerhalb des ganzen Integrationsintervalles erfüllt ist; wir setzen daher

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\ldots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+\frac{(-1)^n\,t^n}{1+t},$$

und hieraus ergiebt sich durch Integration der einzelnen Reihenglieder nach Formel 10) in §. 73:

$$e^{\eta}li(e^{-\eta})=-\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta^2}-\frac{1.2}{\eta^3}+\frac{1.2.3}{\eta^4}-\ldots.$$
$$\ldots+(-1)^n\frac{1.2..(n-1)}{\eta^n}+(-1)^{n+1}\int_0^\infty\frac{t^n}{1+t}e^{-\eta t}dt.$$

Innerhalb der Grenzen $t=0$ bis $t=\infty$ ist nun $t^n:(1+t)$ kleiner als t^n, mithin der Werth des letzten Integrales kleiner als

$$\int_0^\infty t^n\, e^{-\eta t}\, dt = \frac{1.2\ldots n}{\eta^{n+1}};$$

bezeichnen wir daher mit Θ einen positiven echten Bruch, so haben wir:

$$12)\qquad e^\eta\, li(e^{-\eta}) = -\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^2} - \frac{1.2}{\eta^3} + \frac{1.2.3}{\eta^4} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n \frac{1.2..(n-1)}{\eta^n} + (-1)^{n+1}\,\Theta\, \frac{1.2..n}{\eta^{n+1}},$$

und diese Formel ist bei grossen η sehr brauchbar, sobald man dem n denjenigen Werth giebt, für welchen der Rest am kleinsten wird; $e^{-\eta} = \xi$ gesetzt, liefert das für kleine ξ anwendbare Resultat:

$$13)\qquad li(\xi) = \frac{\xi}{l\xi}\left\{1 - \frac{1}{l\xi} + \frac{1.2}{(l\xi)^2} - \frac{1.2.3}{(l\xi)^3} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + (-1)^{n-1}\frac{1.2..(n-1)}{(l\xi)^{n-1}} + (-1)^n\,\Theta\,\frac{1.2..n}{(l\xi)^n}\right\}.$$

Nachdem die Berechnung von $li(\xi)$ anfangs mittelst der vorstehenden Formel, nachher (etwa bis $\xi = 10$) mittelst der Formel 11) bewerkstelligt worden ist, kann die Fortsetzung der Tafel auf die Weise geschehen, dass man aus einem bekannten Integrallogarithmus $li(a)$ den Integrallogarithmus $li(a+z)$ herleitet. Zu einer derartigen Formel führt folgender Weg. Aus Nro. 3) folgt leicht:

$$li(e^{\alpha+\zeta}) - li(e^\alpha) = -\int_{-(\alpha+\zeta)}^{-\alpha}\frac{du}{u}\,e^{-u} = \int_{-\alpha}^{-(\alpha+\zeta)}\frac{du}{u}\,e^{-u},$$

und für $u = -(\alpha + \zeta t)$, wo t die neue Variabele bezeichnet:

$$li(e^{\alpha+\zeta}) - li(e^\alpha) = \int_0^1 \frac{\zeta\, dt}{\alpha+\zeta t}\, e^{\alpha+\zeta t} = \frac{e^\alpha \zeta}{\alpha}\int_0^1 \frac{1}{1+\dfrac{\zeta t}{\alpha}}\, e^{\zeta t}\, dt.$$

Der Werth des Integrales ist immer leicht zu finden, entweder durch die Methode der Quadraturen oder durch Reihenverwandlung: letztere mag auf die Weise ausgeführt werden, dass wir $e^{\zeta t}$ sowohl als $1 : \left(1 + \dfrac{\zeta t}{\alpha}\right)$ entwickeln, wobei aber α mehr als der grösste Werth von ζt, d. h. mehr als ζ betragen muss, nachher beide Reihen multipliziren und integriren. Nach dieser Angabe findet sich:

$$li\,(e^{\alpha+\zeta}) - li\,(e^{\alpha})$$
$$= \frac{e^{\alpha}}{\alpha}\left\{\tfrac{1}{1}\zeta + \tfrac{1}{2}\zeta^2\left(\tfrac{1}{1} - \frac{1}{\alpha}\right) + \tfrac{1}{3}\zeta^3\left(\frac{1}{1.2} - \tfrac{1}{1}\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right)\right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{4}\zeta^4\left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2}\frac{1}{\alpha} + \tfrac{1}{1}\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^3}\right) + \ldots\right\}.$$

In der Parenthese ist die Summe der von α freien Glieder

$$\tfrac{1}{1}\zeta + \frac{1}{1.2}\zeta^2 + \frac{1}{1.2.3}\zeta^3 + \ldots = e^{\zeta} - 1,$$

und daher kann man dem Resultate folgende Form geben:

14) $$li\,(e^{\alpha+\zeta}) - li\,(e^{\alpha}) = \frac{e^{\alpha+\zeta} - e^{\alpha}}{\alpha}$$
$$- \frac{e^{\alpha}}{\alpha}\left\{\tfrac{1}{2}A_1\zeta^2 + \tfrac{1}{3}A_2\zeta^3 + \tfrac{1}{4}A_3\zeta^4 + \ldots\right\},$$

worin erstlich $\alpha > \zeta$ sein muss und die Coefficienten A nach den Formeln

$$A_1 = \frac{1}{\alpha},\quad A_2 = \tfrac{1}{1}\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2},\quad A_3 = \frac{1}{1.2}\frac{1}{\alpha} - \tfrac{1}{1}\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3}, \ldots$$

bestimmt werden; will man sie aber successiv berechnen, so empfiehlt sich die Beziehung

$$A_{n+1} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1.2..n} - A_n\right).$$

Für $e^{\alpha} = a$, $e^{\alpha+\zeta} = a + z$ geht die Formel 14) in die folgende über:

15) $$li\,(a+z) = li\,(a) + \frac{z}{la}$$
$$- \frac{a}{la}\left\{\tfrac{1}{2}A_1\left[l\left(1+\frac{z}{a}\right)\right]^2 + \tfrac{1}{3}A_2\left[l\left(1+\frac{z}{a}\right)\right]^3 + \ldots\right\},$$

für welche $la > l\left(l + \frac{z}{a}\right)$ sein muss und die Coefficienten aus den Gleichungen

16) $$A_1 = \frac{1}{la},\quad A_{n+1} = \frac{1}{la}\left(\frac{1}{1.2..n} - A_n\right)$$

abgeleitet werden. Ist a eine sehr grosse und z eine kleine Zahl, so differirt $l\left(1 + \frac{z}{a}\right)$ nur wenig von $l\,(1) = 0$ und dann gestattet die Formel 15) eine verhältnissmässig leichte Rechnung.

§. 83.

Der Integralsinus und der Integralcosinus.

I. Wir verstehen unter „Integralsinus“ und bezeichnen mit $Si(x)$ eine Transcendente, deren Definition durch die Gleichung:

$$1)\qquad Si(x)=\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \text{oder } Si(\omega)=\int_0^\omega \frac{\sin x}{x}\,dx$$

gegeben ist. Man kann dieselbe leicht durch eine unendliche Reihe ersetzen, indem man $\sin x$ entwickelt und die einzelnen Glieder integrirt; dies giebt

$$2)\qquad Si(\omega)=\frac{1}{1}\,\frac{\omega}{1}-\frac{1}{3}\,\frac{\omega^3}{1.2.3}+\frac{1}{5}\,\frac{\omega^5}{1.2..5}-\cdots\cdots$$

Für grosse ω ist diese Reihe nicht bequem, weil die Convergenz dann erst spät eintritt, eine für diesen Fall brauchbarere Formel erhält man auf folgendem Wege.

Wir nehmen zuerst $\omega=\infty$ und benutzen das unter Nro. 3) in §. 74 gewonnene Ergebniss; es ist dann:

$$3)\qquad Si(\infty)=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\tfrac{1}{2}\pi,$$

und vermöge dieser Gleichung

$$Si(\omega)=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx-\int_\omega^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\tfrac{1}{2}\pi-\int_\omega^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

wo es noch auf das Integral rechter Hand ankommt. Aus der Formel 1) in §. 62 folgt für $m=-k$ und indem man die Grenzen $x=\infty$, $x=\omega$ einführt:

$$\int_\omega^\infty \frac{\sin x}{x^k}\,dx=-\frac{\cos\omega}{\omega^k}-k\frac{\sin\omega}{\omega^{k+1}}-k(k+1)\int_\omega^\infty \frac{\sin x}{x^{k+2}}\,dx,$$

und durch fortgesetzte Anwendung dieser Formel für $k=1,3,\ldots(2n-1)$

$$\int_\omega^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$=-\frac{\cos\omega}{\omega}+1.2\frac{\cos\omega}{\omega^3}-1.2.3.4\frac{\cos\omega}{\omega^5}+\ldots+(-1)^n 1.2..(2n-2)\frac{\cos\omega}{\omega^{2n-1}}$$

$$-1\frac{\sin\omega}{\omega^2}+1.2.3\frac{\sin\omega}{\omega^4}-1.2..5\frac{\sin\omega}{\omega^6}+\ldots+(-1)^n 1.2..(2n-1)\frac{\sin\omega}{\omega^{2n}}$$

$$+(-1)^n\,1.2.3..(2n)\int_\omega^\infty \frac{\sin x}{x^{2n+1}}\,dx.$$

Das letzte Integral liegt seinem absoluten Werthe nach zwischen

$$\int_{\omega}^{\infty} \frac{+1}{x^{2n+1}}\, dx = \frac{+1}{(2\,n)\,\omega^{2n}} \text{ und } \int_{\omega}^{\infty} \frac{-1}{x^{2n+1}}\, dx = \frac{-1}{(2\,n)\,\omega^{2n}},$$

und kann demnach mit $\dfrac{\vartheta}{2\,n\,.\,\omega^{2n}}$ bezeichnet werden, wo ϑ zwischen -1 und $+1$ enthalten ist. Wir erhalten so:

$$4)\quad Si(\omega) = \tfrac{1}{2}\pi + \cos\omega\left[\frac{1}{\omega} - \frac{1\,.\,2}{\omega^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1.2..(2n-2)}{\omega^{2n-1}}\right]$$
$$+ \sin\omega\left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{1.2.3}{\omega^4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1.2..(2n-1)}{\omega^{2n}}\right]$$
$$+ (-1)^{n-1}\,\vartheta\,\frac{1\,.\,2\,..\,(2\,n-1)}{\omega^{2n}},$$

und diese Formel benutzt man so, dass dem n derjenige Werth gegeben wird, für welchen der Rest am kleinsten ausfällt. Besonders leicht würde sich hiernach $Si\,(k\pi)$ berechnen lassen, wenn k eine ganze einigermaassen grosse Zahl bedeutet.

II. Eine dem Integralsinus verwandte Funktion entsteht durch Integration des Differenziales $\dfrac{\cos x}{x}\,dx$; zwischen den Grenzen 0 und x kann man diese Integration nicht vornehmen, weil sonst der Werth des Integrales unendlich werden würde; wir verstehen daher unter dem „Integralcosinus" und bezeichnen mit $Ci\,(x)$ eine durch folgende Gleichung definirte Funktion:

$$5)\qquad Ci(x) = \int_{\infty}^{x} \frac{\cos x}{x}\, dx, \text{ oder } Ci(\omega) = \int_{\infty}^{\omega} \frac{\cos x}{x}\, dx.$$

Für negative ω würde die Funktion $\dfrac{\cos x}{x}$ innerhalb des Intervalles $x = +\infty$ bis $x = -\omega$ eine Unterbrechung der Continuität und zwar an der Stelle $x = 0$ erleiden; wir nehmen dann den Hauptwerth des Integrales als Werth von $Ci\,(\omega)$.

Um eine unendliche Reihe für $Ci(\omega)$ zu erhalten, betrachten wir zunächst, unter Voraussetzung eines positiven ω, das Integral:

$$\int_{n}^{\omega} \frac{\cos x}{x}\, dx = l\omega - \tfrac{1}{2}\,\frac{\omega^2}{1\,.\,2} + \tfrac{1}{4}\,\frac{\omega^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \ldots\ldots$$
$$- \left\{ln - \tfrac{1}{2}\,\frac{n^2}{1\,.\,2} + \tfrac{1}{4}\,\frac{n^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \ldots\ldots\right\},$$

oder, wenn wir den zweiten Theil mit H_n bezeichnen:

$$6) \quad \int_n^\omega \frac{\cos x}{x}\,dx = H_n + l\omega - \tfrac{1}{2}\,\frac{\omega^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}\,\frac{\omega^2}{2.2..4} - \ldots.$$

Die Grösse H_n ist, wie man leicht findet, folgender Umwandlung fähig:

$$H_n = -ln + \int_0^n \frac{1-\cos u}{u}\,du$$

$$= \int_0^n \frac{e^{-u}-\cos u}{u}\,du + \int_0^n \frac{1-e^{-u}}{u}\,du - ln,$$

d. i. wenn im ersten Integrale $u = z$ und im zweiten $u = nz$ gesetzt wird:

$$H_n = \int_0^n \frac{e^{-z}-\cos z}{z}\,dz + \int_0^1 \frac{1-e^{-nz}}{z}\,dz - ln$$

$$= \int_0^n \frac{e^{-z}-\cos z}{z}\,dz + K_n,$$

wo K_n dieselbe Bedeutung hat wie in §. 82. Lassen wir n unendlich werden, so geht K_n in $K = 0{,}5772156\ldots$ über, das noch übrige Integral verschwindet laut Formel 10) in §. 74, und es bleibt daher $Lim\,H_n = K$ übrig. Demzufolge erhalten wir aus Nro. 6):

$$7) \quad Ci(\omega) = K + l\omega - \tfrac{1}{2}\,\frac{\omega^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}\,\frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \ldots..$$

Bei negativen ω ist vermöge der ursprünglichen Definition:

$$Ci(-\omega) = -\int_{-\omega}^{+\omega} \frac{\cos x}{x}\,dx + \int_\infty^\omega \frac{\cos x}{x}\,dx,$$

d. h. weil es sich um den Hauptwerth des Integrales handelt:

$$Ci(-\omega) = -\int_{-\omega}^{-\delta} \frac{\cos x}{x}\,dx - \int_{+\delta}^{+\omega} \frac{\cos x}{x}\,dx + Ci(\omega),$$

wenn schliesslich $\delta = 0$ gesetzt wird. Aus der Bemerkung, dass $\frac{\cos x}{x}$ die Eigenschaft $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ besitzt, findet man aber leicht, dass die beiden noch übrigen Integrale sich aufheben, also

$Ci(-\omega) = Ci(\omega)$ ist. Demnach wird

$$Ci(-\omega) = K + l\omega - \tfrac{1}{2}\frac{\omega^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}\frac{\omega^4}{1\ldots4} - \ldots\ldots,$$

und will man diese Formel mit der früheren in eine zusammenfassen, so schreibt man:

$$8) \qquad Ci(\omega) = K + \tfrac{1}{2}\,l(\omega^2) - \tfrac{1}{2}\frac{\omega^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}\frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots$$

Obschon die hier vorkommende Reihe immer convergirt, so ist doch wenig brauchbar, wenn ω eine grosse Zahl ausmacht. Für diesen Fall kann man in der Weise sorgen, dass man von der Formel 6) in §. 62 ausgeht, $m = -k$, $x = \omega$ und $x = \infty$ setzt und die so entstehende Gleichung

$$\int_\infty^\omega \frac{\cos x}{x^k}\,dx = \frac{\sin\omega}{\omega^k} - k\frac{\cos\omega}{\omega^{k+1}} - k(k+1)\int_\infty^\omega \frac{\cos x}{x^{k+2}}\,dx$$

mehrmals nach einander für $k = 1, 3, 5 \ldots (2n-1)$ auf die Definition von $Ci(\omega)$ anwendet. Die übrige Betrachtung ist der vorhin durchgeführten so vollkommen analog, dass die Angabe des Endresultates genügen wird; dieses lautet:

$$9) \qquad Ci(\omega) = \sin\omega\left[\frac{1}{\omega} - \frac{1.2}{\omega^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1.2\ldots(2n-2)}{\omega^{2n-1}}\right]$$
$$-\cos\omega\left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{1.2.3}{\omega^4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1.2\ldots(2n-1)}{\omega^{2n}}\right]$$
$$+ (-1)^n\,\vartheta\,\frac{1.2\ldots(2n-1)}{\omega^{2n}},$$

wo ϑ zwischen -1 und $+1$ liegt.

Als Beispiel für den Gebrauch der Transcendenten $Si(\omega)$ und $Ci(\omega)$ möge die Entwickelung des Integrales:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\gamma z}{1+z}\,dz$$

Platz finden. Für $z = \dfrac{x}{\gamma} - 1$ geht dasselbe in folgendes über:

$$\int_\gamma^\infty \frac{\sin(x-\gamma)}{x}\,dx = \cos\gamma\int_\gamma^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx - \sin\gamma\int_\gamma^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$$
$$= \cos\gamma\,[\tfrac{1}{2}\pi - Si(\gamma)] - \sin\gamma\,[-Ci(\gamma)]$$

und daher ist:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\gamma z}{1+z}\,dz = Ci(\gamma)\sin\gamma + [\tfrac{1}{2}\pi - Si(\gamma)]\cos\gamma.$$

Für $\gamma = ab$, $z = \frac{x}{a}$ ergiebt sich noch das etwas allgemeinere Resultat:

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{a+x}\,dx = Ci(ab)\sin ab + [\tfrac{1}{2}\pi - Si(ab)]\cos ab.$$

§. 84.
Die Gammafunktion.

Aus den Formeln 11) und 10) des §. 73 geht hervor, dass für jedes ganze positive μ die Gleichung

$$\int_0^1 \left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{\mu-1} dz = \int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\,dx = 1.2.3\ldots(\mu-1)$$

stattfindet, dass also der Werth des Integrales eine Funktion von μ ist, die in dem speziellen Falle eines ganzen positiven μ in das Produkt $1.2.3\ldots(\mu-1)$ übergeht; diese Funktion hat man $\Gamma(\mu)$ genannt und ihre Definition lautet demnach:

1) $$\Gamma(\mu) = \int_0^1 \left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{\mu-1} dz = \int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\,dx.$$

Um zunächst eine Beziehung zwischen $\Gamma(\mu)$ und $\Gamma(\mu+1)$ zu erhalten, wenden wir auf die Gleichung

$$\Gamma(\mu+1) = \int_0^1 \left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{\mu} dz$$

die theilweise Integration an; bei unbestimmter Integration giebt dieselbe:

$$\left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{\mu} z + \mu\int \left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{\mu-1} dz.$$

Der vom Integralzeichen freie Theil verschwindet sowohl für $z=1$ als für $z=0$, wenn μ positiv ist, und daher bleibt:

2) $$\Gamma(\mu+1) = \mu\int_0^1 \left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{\mu-1} dz = \mu\,\Gamma(\mu).$$

Wendet man diese Formel mehrmals nach einander an, so ergiebt sich $\Gamma(\mu+2) = (\mu+1)\,\Gamma(\mu+1) = (\mu+1)\,\mu\,\Gamma(\mu)$, ebenso $\Gamma(\mu+3) = (\mu+2)\,(\mu+1)\,\mu\,\Gamma(\mu)$ u. s. w. überhaupt, wenn m eine ganze positive Zahl bezeichnet:

3) $\Gamma(\mu+m) = \mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+m-1)\Gamma(\mu).$

Für $\mu = 1$ wird $\Gamma(1) = 1$, wie man aus der Gleichung 1) unmittelbar ersieht; die vorstehende Formel giebt dann weiter

$$\Gamma(2) = 1.1\ ,\ \Gamma(3) = 1.2\ ,\ \Gamma(4) = 1.2.3 \text{ u. s. f.}$$

übereinstimmend mit dem anfangs bemerkten Spezialfalle. Ueberhaupt erkennt man aus der Gleichung 3), dass $\Gamma(\mu)$ für jedes μ bekannt ist, wenn man es für echtgebrochene μ finden kann; denn es lässt sich jede beliebige Zahl ω immer in eine ganze Zahl m und einen echt gebrochenen Rest μ zerlegen, die Formel reduzirt dann $\Gamma(\omega)$ auf $\Gamma(\mu)$.

Die in der Gleichung 1) geforderte Integration lässt sich mittelst der Bemerkung ausführen, dass für verschwindende δ

$$Lim\ \frac{z^\delta - 1}{\delta} = l z$$

ist (§. 3, II.), dass mithin der Ausdruck $\left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{\mu-1}$ als Grenzwerth von

$$\left(\frac{1-z^\delta}{\delta}\right)^{\mu-1}$$

betrachtet werden kann. Denken wir uns δ als reziproken Werth einer ganzen positiven Zahl n, so dürfen wir setzen:

$$\left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{\mu-1} = \left[n\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{\mu-1} + \varrho,$$

wo ϱ eine Grösse bezeichnet, die in Null übergeht, wenn n ins Unendliche wächst; hiernach ist

$$\Gamma(\mu) = n^{\mu-1}\int_0^1 \left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)^{\mu-1} dz + \int_0^1 \varrho\, dz,$$

oder, wenn wir im ersten Integrale $z = x^n$ setzen:

$$\Gamma(\mu) - \int_0^1 \varrho\, dz = n^\mu \int_0^1 (1-x)^{\mu-1} x^{n-1}\, dx.$$

Der Werth des rechterseits befindlichen Integrales kann der Formel 4) in §. 73 für $m = n$, $\mu = a$ unmittelbar entnommen werden;

lassen wir darauf n ins Unendliche wachsen, so verschwindet ϱ und es bleibt:

$$4)\quad \Gamma(\mu) = Lim\left\{\frac{1.2.3.....(n-1)n}{\mu(\mu+1)(\mu+2)...(\mu+n-1)}n^{\mu-1}\right\}.$$

Diese allgemeine Formel gestattet sehr mannigfaltige Folgerungen, von denen wir eine wenigstens erwähnen wollen nämlich die Gleichung:

$$5)\quad \frac{[\Gamma(a)]^2}{\Gamma(a-\lambda)\Gamma(a+\lambda)} = \left\{1-\frac{\lambda^2}{a^2}\right\}\left\{1-\frac{\lambda^2}{(a+1)^2}\right\}\left\{1-\frac{\lambda^2}{(a+2)^2}\right\}....,$$

die sich ganz von selbst ergiebt, wenn man die drei Funktionen $\Gamma(a)$, $\Gamma(a-\lambda)$ und $\Gamma(a+\lambda)$ nach der Formel 4) entwickelt. Die Gleichung 5) kann zwei verschiedene Dienste leisten, sie giebt den Werth des unendlichen Produktes, wenn die Gammafunktionen (mittelst einer Tafel derselben) bekannt sind; sie liefert umgekehrt eine Beziehung zwischen Gammafunktionen, wenn der Werth des Produktes anderwärts ausfindig gemacht wird. Das Letztere ist z. B. der Fall für $a = 1$, man hat dann

$$\frac{1}{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(1+\lambda)} = \left(1-\frac{\lambda^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\lambda^2}{2^2}\right)... = \frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi},$$

mithin umgekehrt bei Anwendung der Formel $\Gamma(\lambda+1) = \lambda\Gamma(\lambda)$:

$$6)\qquad \Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda) = \frac{\pi}{\sin\lambda\pi}.$$

Hieraus ergiebt sich unter Anderem für $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$7)\qquad [\Gamma(\tfrac{1}{2})]^2 = \pi, \qquad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi},$$

und nach Formel 3) für $\mu = \frac{1}{2}$:

$$8)\qquad \Gamma(m+\tfrac{1}{2}) = \frac{1.3.5...(2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi}.$$

Um eine unendliche Reihe zur Berechnung der Gammafunktionen zu erhalten, gehen wir von der analog zu Nro. 4) gebildeten Gleichung aus:

$$\Gamma(1+\mu) = \frac{1.2.3.....n}{(1+\mu)(2+\mu)(3+\mu)...(n+\mu)}n^{\mu} \quad (\text{für } n=\infty),$$

und nehmen beiderseits die Logarithmen; dies giebt:

$$l\Gamma(1+\mu) = \mu\, l n - l\left(1+\frac{\mu}{1}\right) - l\left(1+\frac{\mu}{2}\right) - ....$$
$$....-l\left(1+\frac{\mu}{n}\right) \qquad [n=\infty].$$

Hier lassen sich alle Logarithmen von der Form $l(1+u)$ entwickeln, wenn das grösste der u, nämlich μ, zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegt; unter dieser Beschränkung erhält man ohne Mühe:

$$
\begin{aligned}
l\Gamma(1+\mu) = & -\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-ln\right]\mu \\
& +\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^2}\right]\mu^2 \\
& -\tfrac{1}{3}\left[\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^3}\right]\mu^3 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

worin noch $n=\infty$ zu setzen ist. Der Coefficient von μ verwandelt sich dadurch in die Constante K des Integrallogarithmus und es wird überhaupt:

$$
9)\qquad l\Gamma(1+\mu) = -K\mu+\tfrac{1}{2}S_2\mu^2-\tfrac{1}{3}S_3\mu^3+\tfrac{1}{4}S_4\mu^4-\ldots
\qquad 1>\mu>-1,
$$

wobei die Bezeichnung nach Formel 11) in §. 76 benutzt worden ist. Entsprechend der vorstehenden Gleichung ist die folgende:

$$
l\Gamma(1-\mu) = +K\mu+\tfrac{1}{2}S_2\mu^2+\tfrac{1}{3}S_3\mu^3+\tfrac{1}{4}S_4\mu^4+\ldots
\qquad 1>\mu>-1,
$$

die halbe Summe beider Gleichungen giebt wegen $\Gamma(\mu+1)=\mu\Gamma(\mu)$ und nach Formel 6):

$$
\tfrac{1}{2}l\left(\frac{\mu\pi}{\sin\mu\pi}\right) = \tfrac{1}{2}S_2\mu^2+\tfrac{1}{4}S_4\mu^4+\tfrac{1}{6}S_6\mu^6+\ldots.,
$$

und durch Substitution in Nro. 9):

$$
l\Gamma(1+\mu) = \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\mu\pi}{\sin\mu\pi}\right) - [K\mu+\tfrac{1}{3}S_3\mu^3+\tfrac{1}{5}S_5\mu^5+\ldots.].
$$

Eine stärker convergirende Reihe entsteht, wenn man diese Gleichung mit der nachstehenden

$$
0 = -\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)+\mu+\tfrac{1}{3}\mu^3+\tfrac{1}{5}\mu^5+\ldots..
$$

durch Addition vereinigt; man erhält für $1>\mu>-1$:

$$
\begin{aligned}
10)\qquad l\Gamma(1+\mu) = & \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\mu\pi}{\sin\mu\pi}\right)-\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) \\
& +(1-K)\mu-\tfrac{1}{3}(S_3-1)\mu^3-\tfrac{1}{5}(S_5-1)\mu^5-\ldots..,
\end{aligned}
$$

mithin auch $l\Gamma(\mu)$ selbst vermöge der Beziehung $l\Gamma(\mu)=l\Gamma(1+\mu)-l\mu$. Beim Gebrauche der Formel 10) kann man übrigens immer voraussetzen, dass $\mu<\frac{1}{2}$ sei, denn für $\mu>\frac{1}{2}$ lässt sich $\Gamma(\mu)$ mittelst der Gleichung 6) auf $\Gamma(1-\mu)$ zurückführen; wo nun $1-\mu$ jedenfalls $<\frac{1}{2}$ ist. Für $\mu=\frac{1}{2}$ kennt man in Nro.

10) den Werth der linken Seite und die Gleichung kann zur Bestimmung von K benutzt werden.

Wir wollen in der Kürze noch einige der bemerkenswerthesten Folgerungen aus den oben entwickelten Grundformeln angeben. Differenzirt man die erste der für $l\Gamma(1+\mu)$ geltenden Gleichungen, so wird

$$\frac{dl\Gamma(1+\mu)}{d\mu} = ln - \frac{1}{1+\mu} - \frac{1}{2+\mu} - \dots - \frac{1}{n+\mu}$$
$$= -\left\{\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-ln\right\}$$
$$+\tfrac{1}{1}\frac{\mu}{1+\mu}+\tfrac{1}{2}\frac{\mu}{2+\mu}+\dots+\frac{1}{n}\frac{\mu}{n+\mu},$$

worin $n=\infty$ zu setzen ist; dies giebt:

11) $$\frac{dl\Gamma(1+\mu)}{d\mu} = -K+\tfrac{1}{1}\frac{\mu}{1+\mu}+\tfrac{1}{2}\frac{\mu}{2+\mu}+\dots\dots,$$

oder auch:

12) $$\frac{dl\Gamma(1+\mu)}{d\mu} = -K+\int_0^1 \frac{1-x^\mu}{1-x}\,dx;$$

denn wenn man das Integral dadurch in eine Reihe verwandelt, dass man

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x}$$

setzt, die einzelnen Glieder integrirt und nachher n unendlich werden lässt, so kommt man auf die Gleichung 11) zurück. Die Formel 12) bildet den Ausgangspunkt für eine weitere hier nicht ausführbare Untersuchung der Gammafunktionen.

Aus Nro. 9) folgt durch Rückgang von den Logarithmen zu den Zahlen:

$$\Gamma(1+\mu) = e^{-K\mu+\frac{1}{2}S_2\mu^2-\frac{1}{3}S_3\mu^3+\dots}$$

oder, wenn die rechte Seite mittelst der bekannten Formel

$$e^z = 1+z+\tfrac{1}{2}z^2+\text{etc.}$$

entwickelt wird:

$$\Gamma(1+\mu) = 1 - K\mu + \tfrac{1}{2}(K^2+S_2)\mu^2$$
$$-\tfrac{1}{6}(K^3+3KS_2+2S_3)\mu^3+\dots\dots,$$

andererseits ist vermöge der Formel 1) und durch Entwickelung von x^μ:

$$\Gamma(1+\mu) = \int_0^\infty x^\mu e^{-x} dx$$

$$= \int_0^\infty \left\{1 + \mu\, lx + \tfrac{1}{2}\mu^2 (lx)^2 + \tfrac{1}{6}\mu^3 (lx)^3 + \dots\right\} e^{-x} dx,$$

mithin durch Integration der einzelnen Theile und Vergleichung mit dem ersten Resultate:

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$$

$$\int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right) e^{-x} dx = K,$$

$$\int_0^\infty \left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2 e^{-x} dx = K^2 + S_2,$$

$$\int_0^\infty \left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^3 e^{-x} dx = K^3 + 3KS_2 + 2S_3$$

u. s. w.

Diese Ergebnisse lassen noch insofern eine Verallgemeinerung zu, als man $x = ay$ setzen kann, wodurch die neuen Gleichungen entstehen:

13) $$\int_0^\infty l\left(\frac{1}{y}\right) e^{-ay} dy = \frac{K + la}{a},$$

14) $$\int_0^\infty \left[l\left(\frac{1}{y}\right)\right]^2 e^{-ay} dy = \frac{K^2 + S_2 + 2Kla + (la)^2}{a}$$

u. s. w.

Aus der Gleichung 1) ergiebt sich für $x = ay$:

15) $$\int_0^\infty y^{\mu-1} e^{-ay} dy = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu},$$

also z. B. für $\mu = \frac{1}{2}$ und für $\mu = n + \frac{1}{2}$:

$$\int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}} e^{-ay} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}},$$

$$\int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}} y^n e^{-ay} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n a^n} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}},$$

oder wenn man $y = t^2$ setzt und a^2 an die Stelle von a treten lässt:

16) $$\int_0^\infty e^{-a^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2a},$$

17) $$\int_0^\infty t^{2n} e^{-a^2 t^2} dt = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n a^{2n}} \frac{\sqrt{\pi}}{2a}.$$

Die letzte Gleichung multipliziren wir mit $\frac{(2b)^{2n}}{1.2\ldots(2n)}$ und bemerken rechter Hand, dass

$$1.2.3\ldots(2n) = 1.3.5\ldots(2n-1).1.2.3\ldots n.2^n$$

ist; es ergiebt sich so:

$$\int_0^\infty \frac{(2bt)^{2n}}{1.2.3\ldots(2n)} e^{-a^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}}{1.2.3\ldots n};$$

setzen wir hierin $n = 1, 2, 3, \ldots.$ und vereinigen alle so entstehenden Gleichungen mit der in Nro. 16) verzeichneten, so wird:

18) $$\int_0^\infty \frac{e^{2bt} + e^{-2bt}}{2} e^{-a^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{\left(\frac{b}{a}\right)^2};$$

endlich noch, wenn wir $b\sqrt{-1}$ an die Stelle von b treten lassen, d. h. den einzelnen Gliedern wechselnde Vorzeichen geben:

19) $$\int_0^\infty \cos 2bt . e^{-a^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Dieses in seiner Art bemerkenswerthe Resultat ist für die mathematische Theorie der Wärme von Wichtigkeit.

§. 85.

Die Betafunktion.

Unter dem Namen „Betafunktion“ versteht man zuweilen eine Funktion zweier Variabelen p und q, welche durch die Gleichung:

$$1)\qquad \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = B(p\,,\,q)$$

definirt wird. Die genannte Transcendente ist übrigens symmetrisch in Beziehung auf p und q, denn setzt man $x = 1 - y$, so wird:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int_0^1 (1-y)^{p-1}y^{q-1}\,dy,$$

wo die rechte Seite $= B(q,p)$ ist; man hat daher immer:

$$2)\qquad B(p,q) = B(q,p).$$

Will man die Funktion in eine Reihe verwandeln, so kann dies dadurch geschehen, dass man $(1-x)^{q-1}$ nach dem binomischen Satze entwickelt und die einzelnen Glieder integrirt. Die so entstehende Reihe ist aber wegen ihrer geringen Convergenz nicht sonderlich brauchbar, und wir wenden uns daher gleich zu der hauptsächlichsten und wichtigsten Eigenschaft von $B(p,q)$, welche darin besteht, dass unsere Transcendente jederzeit durch drei Gammafunktionen ausgedrückt werden kann. Vermöge der Reduktionsformel 7) in §. 57 ist nämlich für $m = p$, $s = q-1$, $a = 1$, $b = -1$, $n = 1$:

$$\int x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$
$$= \frac{x^p(1-x)^q}{p} + \frac{p+q}{p}\int x^p(1-x)^{q-1}\,dx,$$

und da für $x = 1$ und für $x = 0$ der vom Integralzeichen freie Theil verschwindet, sobald p und q positive Grössen bezeichnen, so hat man weiter:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{p+q}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx.$$

Die wiederholte Anwendung dieser Formel giebt:

$$3)\qquad \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

$$= \frac{(p+q)(p+q+1)(p+q+2)\ldots(p+q+n-1)}{p(p+1)(p+2)\ldots\ldots(p+n-1)}\int_0^1 x^{p+n-1}(1-x)^{q-1}dx;$$

in Beziehung auf die rechte Seite bemerke man, dass der Formel 4) des vorigen Paragraphen zufolge:

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots(n-1)n}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)}n^{\mu-1}=\Gamma(\mu)+\varepsilon$$

gesetzt werden kann, wo ε in Null übergeht, wenn n unendlich wächst, dass daher die Gleichung 3) auch in folgender Gestalt erscheinen kann:

$$B(p,\,q)=\frac{\Gamma(p)+\varepsilon_1}{\Gamma(p+q)+\varepsilon_2}n^q\int_0^1 x^{p+n-1}(1-x)^{q-1}\,dx;$$

für $x^{p+n}=z$ wird hieraus:

$$B(p\,,\,q)=\frac{\Gamma(p)+\varepsilon_1}{\Gamma(p+q)+\varepsilon_2}\cdot\frac{n^q}{p+n}\int_0^1\left[1-z^{\frac{1}{p+n}}\right]^{q-1}dz.$$

Da nun bekanntlich für verschwindende δ der Ausdruck

$$\left(\frac{1-z^\delta}{\delta}\right)^{q-1}$$

in $(-\,lz)^{q-1}$ übergeht, so darf gesetzt werden:

$$(1-z^\delta)^{q-1}=\delta^{q-1}\left\{\left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{q-1}+\varrho\right\},$$

wo ϱ mit δ gleichzeitig verschwindet; auf die obige Gleichung für $\delta=\dfrac{1}{p+n}$ angewendet, giebt dies:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)+\varepsilon_1}{\Gamma(p+q)+\varepsilon_2}\left(\frac{n}{p+n}\right)^q\int_0^1\left\{\left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{q-1}+\varrho\right\}dz.$$

Lassen wir die beliebige ganze Zahl n ins Unendliche wachsen, so verschwinden ε_1, ε_2, δ und ϱ; es bleibt demnach:

$$4)\qquad B(p,q)=\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)}\int_0^1\left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{q-1}dz=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Die hiermit gewonnene allgemeine Formel, die man gewöhnlich unter der Gestalt:

$$5)\qquad \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

angegeben findet, lässt noch einige Transformationen und Erweiterungen zu, die es verdienen, hervorgehoben zu werden. Für $x=z:(1+z)$ ergiebt sich:

$$6)\qquad \int_0^\infty\frac{z^{p-1}\,dz}{(1+z)^{p+q}}=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

in dem speziellen Falle eines ganzen positiven p gehen die Formeln 5) und 6) in die Formeln 4) und 5) des §. 73 über; für $p+q = 1$ verwandelt sich die Gleichung 6) in die Formeln 19) des §. 73.

Setzt man in Nro. 5) $x = y^m$, so entsteht die Gleichung:

$$m\int_0^1 y^{mp-1}(1-y^m)^{q-1}dy = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

oder, wenn man $\frac{p}{m}$ an die Stelle von p treten lässt:

$$7) \qquad \int_0^1 y^{p-1}(1-y^m)^{q-1}dy = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{m\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)},$$

also z. B. für $m = 2$:

$$8) \qquad \int_0^1 y^{p-1}(1-y^2)^{q-1}dy = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma(q)}{2\,\Gamma\left(\frac{p}{2}+q\right)};$$

hieraus folgen unter Anderem die Gleichungen 6) und 7) des §. 73, wenn man $q = \frac{1}{2}$, p als ganze positive Zahl nimmt und auf die Unterscheidung gerader und ungerader p eingeht. Die Substitution $y = \sin u$ verwandelt die Gleichung 8) in die nachstehende:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{p-1}u\,\cos^{2q-1}u\,du = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma(q)}{2\,\Gamma\left(\frac{p}{2}+q\right)},$$

oder für $p - 1 = \mu$, $2q - 1 = \nu$:

$$9) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{\mu} u \cos^{\nu} u\,du = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+1\right)}.$$

Wir betrachten noch das allgemeinere Integral:

$$S = \int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}{[ax+b(1-x)]^{p+q}},$$

worin a und b beliebige Constanten bezeichnen mögen. Um den Werth desselben zu finden, benutzen wir die Substitution:

$$x = \frac{by}{a(1-y)+by} \text{ oder umgekehrt } \frac{ax}{b+(a-b)x} = y,$$

aus welcher nachstehende Ausdrücke folgen:

$$1-x=\frac{a(1-y)}{a(1-y)+by},\quad dx=\frac{ab\,dy}{[a(1-y)+by]^2}$$

$$ax+b(1-x)=\frac{ab}{a(1-y)+by}.$$

Bemerken wir ferner, dass den Grenzen $x=0$ und $x=1$ die neuen Grenzen $y=0$ und $y=1$ entsprechen, so wird:

$$S=\frac{1}{a^p b^q}\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}\,dy,$$

d. i. vermöge der Bedeutung von S:

$$10)\qquad \int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}{[ax+b(1-x)]^{p+q}}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\frac{1}{a^p b^q}$$

und wenn man $a-b=c$ setzt:

$$11)\qquad \int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx}{(b+cx)^{p+q}}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\frac{1}{(b+c)^p b^q}.$$

Nehmen wir endlich wie früher $x=y^m$ und lassen $\frac{p}{m}$ an die Stelle von p treten, so ergiebt sich noch das Resultat:

$$12)\qquad \int_0^1 \frac{y^{p-1}(1-y^m)^{q-1}}{(b+cy^m)^{p+q}}\,dy=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{m\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}\frac{1}{(b+c)^{\frac{p}{m}}b^q},$$

welches alle Formeln dieses Paragraphen als spezielle Fälle in sich enthält.

Will man eine der Gleichung 9) entsprechende Formel gewinnen, so hat man in Nro. 10) $x=\cos^2 u$ zu setzen; dies giebt, wenn a^2 und b^2 für a und b geschrieben werden:

$$13)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^{2p-1}u\sin^{2q-1}u\,du}{(a^2\cos^2 u+b^2\sin^2 u)^{p+q}}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)}\frac{1}{a^{2p}b^{2q}}.$$

Bemerkenswerthe Spezialisirungen hiervon sind:

$$14)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\tan^{\mu}u\,du}{a^2\cos^2 u+b^2\sin^2 u}=\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}\mu\pi}\frac{1}{a^{1-\mu}b^{1+\mu}},$$

15) $$\int_0^{\pi} \frac{\sin^{\mu-1} w\,dw}{(a_1 + b_1 \cos w)^{\mu}} = \frac{[\Gamma(\frac{1}{2}\mu)]^2}{2\,\Gamma(\mu)} \frac{2\mu}{(a_1{}^2 - b_1{}^2)^{\frac{1}{2}\mu}},$$

deren letztere durch die Substitutionen $p = q = \frac{1}{2}\mu$, $a^2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$, $b^2 = \frac{1}{2}(a_1 - b_1)$, $u = \frac{1}{2}w$ erhalten wird.

§. 86.
Die elliptischen Integrale und Funktionen erster Art.

In Cap. XII. bemerkten wir schon, dass irrationale Differenziale, in denen Wurzeln aus algebraischen Funktionen dritten oder vierten Grades vorkommen, nicht mehr durch Logarithmen oder Kreisbögen integrirt werden können, dass im Gegentheil derartige Integrale eigenthümliche Funktionen bilden; wir kommen jetzt, wo uns mehr Mittel zu Gebote stehen, auf diesen Gegenstand zurück, um die hauptsächlichsten Eigenschaften jener Funktionen zu entwickeln.

Wir betrachten zunächst das Integral:

1) $$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

in welchem k eine die Einheit nicht übersteigende Constante, den sogenannten Modulus, bezeichnet. Setzen wir $x = \sin\varphi$, so wird:

2) $$u = \int_0^{(\varphi = Arcsin\, x)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}},$$

und insofern nun u von k und φ abhängt, können wir $u = F(k, \varphi)$ schreiben, wo φ die Amplitude des Integrales heisst. Die Gleichung:

3) $$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = F(k, \varphi),$$

enthält demnach die Definition der Funktion $F(k, \varphi)$, welche man das elliptische Integral erster Gattung genannt hat; ist der Werth desselben bekannt (man hat in der That Tafeln dafür), so folgt daraus der von u, nämlich:

4) $$u = F(k\,,\, Arcsin\, x),$$

indem man nur den zu x gehörenden Bogen, die Amplitude, aufzusuchen braucht.

Die Sache ist aber noch einer anderen Ansicht fähig; so wie nämlich u von x abhängt, so ist auch umgekehrt x eine Funktion von u, was man durch irgend ein beliebiges Symbol ausdrücken könnte; um jedoch zu der passendsten Bezeichnung zu gelangen, bemerken wir zunächst, dass φ als Amplitude von u durch

$$\varphi = ampl\,(u) \text{ oder kürzer } \varphi = am\,u$$

dargestellt werden kann, woraus, wegen $x = \sin\varphi$, folgt:

5) $$x = \sin am\, u\ ,\ mod\, k.$$

Diese Gleichung ist nun die Umkehrung der in Nro. 4) angegebenen, wobei das Zeichen $\sin am$ als Funktionsbezeichnung dient*).

I. Unter den zahlreichen Transformationen, deren das elliptische Integral erster Art fähig ist, verdient besonders die folgende hervorgehoben zu werden, welche zu dem sogenannten Additionstheoreme führt. Ersetzen wir nämlich die Variabele η in der Gleichung:

6) $$\int_0^\beta \frac{d\eta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\eta}} = F(k,\beta),$$

durch eine neue Veränderliche ζ, welche mit jener durch die Gleichung:

7) $$\cos\alpha\,\cos\eta - \sin\alpha\,\sin\eta\,\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta} = \cos\zeta,$$

verbunden ist, so entspricht dem Werthe $\eta = 0$ der Werth $\zeta = \alpha$ und wenn $\eta = \beta$ geworden ist, so hat ζ einen Werth γ angenommen, welcher aus der Gleichung:

8) $$\cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta\,\sqrt{1-k^2\sin^2\gamma} = \cos\gamma$$

zu berechnen sein würde. Um weiter $d\eta$ durch $d\zeta$ auszudrücken,

---

*) Wenn die goniometrischen Funktionen nicht bekannt wären, so würde die Integralrechnung darauf führen und zwar bei Gelegenheit des Integrales:

†) $$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

hier ist u eine Funktion von x (nämlich $u = Arcsin\, x$) mithin umgekehrt x eine Funktion von u ($x = \sin u$) und es hätte keine Schwierigkeit, die Eigenschaften beider Funktionen aus der Gleichung †) abzuleiten; in der That erhält man sie aus den Entwickelungen des Textes für $k = 0$.

könnte man η der Gleichung 7) entnehmen und es dann differenziren; rascher aber gelangt man durch die Bemerkung zum Ziele, dass die Gleichung 7) auch in den folgenden Formen dargestellt werden kann:

9) $$\cos\zeta \cos\alpha + \sin\zeta \sin\alpha \sqrt{1-k^2 \sin^2\eta} = \cos\eta,$$

10) $$\cos\zeta \cos\eta + \sin\zeta \sin\eta \sqrt{1-k^2 \sin^2\alpha} = \cos\alpha;$$

man überzeugt sich hiervon leicht, wenn man die Gleichungen 7), 9) und 10) rational macht; weil aber dabei die Vorzeichen der Wurzeln verschwinden, so bedarf die Richtigkeit dieser Vorzeichen eines besonderen Nachweises. Für $k = 0$ geht die Gleichung 7) in $\cos(\alpha + \eta) = \cos\zeta$ über, daraus folgt $\cos(\zeta - \alpha) = \cos\eta$ und $\cos(\zeta - \eta) = \cos\alpha$; dasselbe geben auch die Gleichungen 9) und 10), woraus die Richtigkeit der gewählten Vorzeichen hervorgeht. Durch Differenziation der Gleichung 10) wird nun, wenn wir die Wurzel für den Augenblick mit A bezeichnen:

$$(A \cos\eta \sin\zeta - \sin\eta \cos\zeta)\, d\eta = (\cos\eta \sin\zeta - A \sin\eta \cos\zeta)\, d\zeta,$$

und durch Substitution des der Gleichung 10) entnommenen Werthes von A:

$$\frac{\cos\alpha \cos\eta - \cos\zeta}{\sin\eta}\, d\eta = \frac{\cos\eta - \cos\alpha \cos\zeta}{\sin\zeta}\, d\zeta$$

d. i. nach Nro. 7) und Nro. 9):

$$\sin\alpha \sqrt{1-k^2 \sin^2\zeta}\, d\eta = \sin\alpha \sqrt{1-k^2 \sin^2\eta}\, d\zeta,$$

oder endlich:

11) $$\frac{d\eta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\eta}} = \frac{d\zeta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\zeta}}.$$

Setzen wir dies in die Gleichung 6) ein, oder was dasselbe ist, integriren wir die vorstehende Gleichung mit der Rücksicht, dass den Grenzen $\eta = 0$ und $\eta = \beta$ die Grenzen $\zeta = \alpha$ und $\zeta = \gamma$ entsprechen, so folgt:

$$\int_0^\beta \frac{d\eta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\eta}} = \int_\alpha^\gamma \frac{d\zeta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\zeta}}$$

$$= \int_0^\gamma \frac{d\zeta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\zeta}} - \int_0^\alpha \frac{d\zeta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\zeta}},$$

d. h. $F(k, \beta) = F(k, \gamma) - F(k, \alpha)$, wobei die Amplituden α, β, γ durch die Gleichung 8) verbunden sind. Schreiben wir endlich φ, ψ, ω für α, β, γ, so gelangen wir zu dem Fundamentaltheoreme, dass die Gleichung:

12) $$F(k, \varphi) + F(k, \psi) = F(k, \omega)$$

stattfindet, wenn die Amplituden φ, ψ, ω der Bedingung:

13) $$\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\omega} = \cos\omega$$

genügen, welche, dem Früheren analog, auch unter den Formen:

14) $$\begin{cases} \cos\omega \cos\varphi + \sin\omega \sin\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi} = \cos\psi \\ \cos\omega \cos\psi + \sin\omega \sin\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \cos\varphi \end{cases}$$

dargestellt werden kann. Hierin liegt die Addition der elliptischen Integrale erster Art, da sich ein elliptisches Integral finden lässt, welches die Summe zweier gegebenen Integrale derselben Gattung ausmacht; sein Modulus ist derselbe, seine Amplitude bestimmt sich dadurch, dass man ω aus einer der obigen Gleichungen entwickelt, was auf folgende Weise geschehen kann. Wir bezeichnen $\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$ mit $\Delta(\varphi)$ und eliminiren $\cos\omega$ aus den Gleichungen 14); es ergiebt sich dann von selbst

$$\sin\omega = \frac{\cos^2\varphi - \cos^2\psi}{\cos\varphi \sin\psi \Delta(\varphi) - \sin\varphi \cos\psi \Delta(\psi)},$$

und wenn Zähler und Nenner mit $\cos\varphi \sin\psi \Delta(\varphi) + \sin\varphi \cos\psi \Delta(\psi)$ multiplizirt werden:

15) $$\sin\omega = \frac{\sin\varphi \cos\psi \Delta(\psi) + \cos\varphi \sin\psi \Delta(\varphi)}{1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\psi}.$$

Durch Substitution hiervon in eine der Gleichungen 14) erhält man weiter:

16) $$\cos\omega = \frac{\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \Delta(\varphi) \Delta(\psi)}{1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\psi},$$

ferner durch Division:

17) $$\tan\omega = \frac{\tan\varphi \Delta(\psi) + \tan\psi \Delta(\varphi)}{1 - \tan\varphi \tan\psi \Delta(\varphi) \Delta(\psi)}.$$

Die letzte Formel giebt die leichteste Bestimmung von ω; berechnet man nämlich zwei Hülfswinkel φ' und ψ' nach den Formeln $\tan\varphi' = \tan\varphi \Delta(\psi)$ und $\tan\psi' = \tan\psi \Delta(\varphi)$, so ist $\omega = \varphi' + \psi'$ Aus Nro. 13) folgt endlich noch durch Substitution von $\cos\omega$:

18) $$\Delta(\omega) = \frac{\Delta(\varphi) \Delta(\psi) - k^2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\psi \cos\psi}{1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\psi}.$$

Käme es z. B. darauf an, zwei Amplituden der Art zu finden, dass $F(k, \varphi) + F(k, \psi) = F(k, \frac{1}{2}\pi)$, wo $F(k, \frac{1}{2}\pi)$ das vollständige elliptische Integral erster Art heisst und mit $F^1(k)$ oder nur mit K bezeichnet wird, so würde die Substitution $\omega = \frac{1}{2}\pi$ folgende Gleichung geben:

$$\tan\varphi \tan\psi = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{k'},$$

vermöge deren ψ aus φ bestimmt wird; k' nennt man das Complement des Modulus, $F(k,\varphi)$ und $F(k,\psi)$ complementäre Integrale, wenn sie zusammen das vollständige Integral ausmachen.

Bei weitem eleganter gestalten sich die obigen Resultate, wenn man die umgekehrten elliptischen Integrale einführt; setzt man nämlich $F(k,\varphi) = u$, $F(k,\psi) = v$, $F(k,\omega) = w$, so ist $\varphi = am\, u$, $\psi = am\, v$, $\omega = am\, w$; die Gleichung 12) geht in $u+v=w$ über und es ist daher $\omega = am\,(u+v)$; die Formel 13) wird nun bei umgekehrter Anordnung

$$\cos am\,(u+v) = \cos am\, u \cos am\, v - \sin am\, u \sin am\, v\, \varDelta\,[am\,(u+v)],$$

ebenso treten an die Stellen der Gleichungen 15) und 16) die folgenden:

$$19)\quad \sin am\,(u+v) = \frac{\sin am\, u \cos am\, v\, \varDelta\, am\, v + \sin am\, v \cos am\, u\, \varDelta\, am\, u}{1-k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v},$$

$$20)\quad \cos am\,(u+v) = \frac{\cos am\, u \cos am\, v - \sin am\, u \sin am\, v\, \varDelta\, am\, u\, \varDelta\, am\, v}{1-k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v}.$$

Diese Formeln sind vollkommen analog den goniometrischen Formeln; in der That erhält man letztere daraus für $k=0$, wodurch $\sin am\, u$ in $\sin u$ und $\varDelta\, am\, u$ in 1 übergeht. Sowie nun die gesammte Goniometrie auf den Fundamentalformeln für $\sin(u+v)$ und $\cos(u+v)$ beruht, so bilden die Gleichungen 19) und 20) in ganz ähnlicher Weise die Grundlage für die Theorie der Funktionen $\sin am\, u$, $\cos am\, u$ etc., welche in neuerer Zeit vorzugsweise elliptische Funktionen (im Gegensatze zu den elliptischen Integralen) genannt worden sind; die Theorie selbst kann hier nicht Platz finden.

II. Die Subtraktion der elliptischen Integrale lässt sich leicht auf die Addition zurückführen, indem man ψ negativ nimmt und berücksichtigt, dass die Substitution $\sigma = -\tau$ zu der Gleichung

$$\int_0^{-\psi} \frac{d\sigma}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \sigma}} = -\int_0^{\psi} \frac{d\tau}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \tau}}$$

führt, die nach unserer Bezeichnung einerlei ist mit

$$F(k,-\psi) = -F(k,\psi).$$

Dem Additionstheoreme tritt jetzt das Subtraktionstheorem zur Seite, welches lautet: die Gleichung

$$21)\qquad F(k,\varphi) - F(k,\psi) = F(k,\omega)$$

findet statt, wenn die neue Amplitude ω mittelst der Formel

$$22)\quad \sin\omega = \frac{\sin\varphi\,\cos\psi\,\Delta(\psi) - \cos\varphi\,\sin\psi\,\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\,\sin^2\psi}$$

bestimmt wird. Auf gleiche Weise liessen sich die Formeln 16), 17) und 18) umgestalten, was keine Schwierigkeiten hat. Behält man die Bezeichnung $F(k, \varphi) = u$, $F(k, \psi) = v$, $F(k, \omega) = w$ bei, so ist wiederum $\varphi = am\,u$, $\psi = am\,v$, $\omega = am\,w = am(u-v)$, mithin:

$$23)\quad \sin am(u-v) = \frac{\sin am\,u\,\cos am\,v\,\Delta\,am\,v - \sin am\,v\,\cos am\,u\,\Delta\,am\,u}{1 - k^2\sin^2 am\,u\,\sin^2 am\,v},$$

was der Formel 19) entspricht; ähnlich ist:

$$24)\quad \cos am(u-v) = \frac{\cos am\,u\,\cos am\,v + \sin am\,u\,\sin am\,v\,\Delta\,am\,u\,\Delta\,am\,v}{1 - k^2\sin^2 am\,u\,\sin^2 am\,v}.$$

III. Durch mehrmalige Anwendung des Additionstheoremes kann man offenbar eine Amplitude ω finden, für welche

$$F(k, \omega) = F(k, \varphi_1) + F(k, \varphi_2) + \ldots + F(k, \varphi_m)$$

ist; nimmt man spezieller $\varphi_1 = \varphi_2 \ldots = \varphi_m = \varphi$, so wird

$$F(k, \omega) = m\,F(k, \varphi),$$

wo das Integral linker Hand ein gegebenes Vielfaches des rechts befindlichen Integrales ausmacht. Bezeichnen wir etwas sprechender ω mit φ_m, wenn es der obigen Gleichung genügt, so besteht die Multiplikation des elliptischen Integrales in der Bestimmung der Amplitude φ_m, wenn m und φ gegeben sind. So ist z. B. aus Nro. I. für $\psi = \varphi$ und $\omega = \varphi_2$:

$$F(k, \varphi_2) = 2\,F(k, \varphi), \quad \text{wenn}$$

$$\sin\varphi_2 = \frac{2\sin\varphi\,\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin^4\varphi} \quad \text{oder} \quad \cos\varphi_2 = \frac{1 - 2\sin^2\varphi + k^2\sin^4\varphi}{1 - k^2\sin^4\varphi}.$$

Denken wir uns allgemeiner drei Amplituden φ_{n-1}, φ_n, φ_{n+1}, welche den Gleichungen

$$25)\quad \begin{aligned} F(k, \varphi_{n-1}) &= (n-1)\,F(k, \varphi), \\ F(k, \varphi_n) &= n\,F(k, \varphi), \\ F(k, \varphi_{n+1}) &= (n+1)\,F(k, \varphi) \end{aligned}$$

genügen, so ist gleichzeitig

$$\begin{aligned} F(k, \varphi_{n+1}) &= F(k, \varphi_n) + F(k, \varphi), \\ F(k, \varphi_{n-1}) &= F(k, \varphi_n) - F(k, \varphi), \end{aligned}$$

und durch Anwendung des Additions-, sowie des Subtraktionstheoremes findet man hieraus:

26) $$\begin{cases} \sin\varphi_{n+1} + \sin\varphi_{n-1} = \dfrac{2\Delta(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi_n}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi_n}, \\ \cos\varphi_{n+1} + \cos\varphi_{n-1} = \dfrac{2\cos\varphi\cos\varphi_n}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi_n}. \end{cases}$$

Mittelst dieser Gleichungen lässt sich φ_{n+1} aus φ_n und φ_{n-1} ableiten, indem man von $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_1 = \varphi$ ausgeht; so erhält man z. B. für $n = 3$ durch Substitution der schon bekannten Werthe von $\sin\varphi_2$ und $\cos\varphi_2$:

27) $$\sin\varphi_3 = \frac{4(1-k^2\sin^2\varphi)\cos^2\varphi - (1-k^2\sin^4\varphi)^2}{(1-k^2\sin^4\varphi)^2 - 4k^2(1-k^2\sin^2\varphi)\cos^2\varphi\sin^4\varphi}\sin\varphi.$$

Um indessen so zusammengesetzte Ausdrücke zu vermeiden, dividiren wir die Gleichungen 26) durch einander, dies giebt:

28) $$\tan(\tfrac{1}{2}\varphi_{n+1} + \tfrac{1}{2}\varphi_{n-1}) = \Delta(\varphi)\tan\varphi_n,$$

also für $n = 1, 2, 3,$ etc.:

$$\tan\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \Delta(\varphi)\tan\varphi,$$
$$\tan(\tfrac{1}{2}\varphi_3 + \tfrac{1}{2}\varphi) = \Delta(\varphi)\tan\varphi_1$$

u. s. w.,

woraus sich φ_2, φ_3, φ_4 etc. ohne Mühe berechnen lassen.

Will man den Multiplikationsformeln für die elliptischen Integrale die entsprechenden Formeln für die elliptischen Funktionen an die Seite stellen, so hat man nur $\varphi = am\, u$ und $\varphi_n = am(nu)$ zu setzen.

IV. Stellt man die Gleichung $F(k, \varphi_m) = m F(k, \varphi)$ in der umgekehrten Form $F(k, \varphi) = \dfrac{1}{m} F(k, \varphi_m)$ dar und schreibt um grösserer Symmetrie willen φ statt φ_m und $\varphi_{\frac{1}{m}}$ für φ, so liegt in der Gleichung

29) $$F(k, \varphi_{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{m} F(k, \varphi)$$

das Problem der Division; die Lösung desselben ist aus Nro. III. herzuleiten, indem man umgekehrt die grössere Amplitude als gegeben und die kleinere als zu entwickelnde Unbekannte ansieht; für den Fall $m = 2$ z. B. bestimmt sich $\varphi_{\frac{1}{2}}$ mittelst der Gleichung:

$$\cos\varphi = \frac{1-2\sin^2\varphi_{\frac{1}{2}} + k^2\sin^4\varphi_{\frac{1}{2}}}{1-k^2\sin^4\varphi_{\frac{1}{2}}} = \frac{1-2x^2+k^2x^4}{1-k^2x^4},$$

wo wir zur Abkürzung $\sin \varphi_{\frac{1}{2}}$ mit x bezeichnet haben; für $m = 3$ ergiebt sich ähnlich aus Nro. 27) für $\sin \varphi_{\frac{1}{3}} = x$:

$$\sin \varphi = \frac{3x - 4(1+k^2)x^3 + 6k^2x^5 - k^4x^9}{1 - 6k^2x^4 + 4k^2(1+k^2)x^6 - 3k^4x^8}.$$

Ueberhaupt ist zur Bestimmung der Amplitude $\varphi_{\frac{1}{m}}$ immer die Auflösung einer algebraischen Gleichung vom Grade m^2 nöthig, oder, was auf dasselbe hinauskommt, $\sin am \dfrac{u}{m}$ ist die Wurzel einer derartigen Gleichung, welche ausser $\sin am\, u$ oder $\cos am\, u$ nur noch k und ganzzahlige Coefficienten enthält.

Wäre endlich eine Amplitude ψ der Art zu bestimmen, dass die Gleichung

30) $$F(k, \psi) = \frac{p}{q} F(k, \varphi)$$

stattfände, worin p und q gegebene ganze Zahlen bezeichnen, so kann man dieser Gleichung zunächst die Form $qF(k, \psi) = pF(k, \varphi)$ ertheilen und sich den gemeinschaftlichen Werth dieser beiden Produkte als ein neues Integral $F(k, \tau)$ denken, so dass einerseits $qF(k, \psi) = F(k, \tau)$, andererseits $pF(k, \varphi) = F(k, \tau)$ ist; die erste Bedingung giebt nach Nro. III. eine Gleichung zwischen ψ und τ, die zweite eine Gleichung zwischen φ und τ; eliminirt man τ aus diesen Gleichungen, so bleibt eine Beziehung zwischen ψ und φ übrig und zwar eben die, welche zum Bestehen der Gleichung 30) nothwendig ist.

Das Gesammtresultat dieser Untersuchungen lässt sich in folgendes Theorem zusammenfassen, bei dessen Formulirung der gewöhnliche goniometrische Calcül zu den algebraischen Operationen gerechnet worden ist: „wenn r, s, t etc. beliebige positive oder negative rationale Zahlen und φ, ψ, χ etc. gegebene Amplituden bezeichnen, so kann das aus einer endlichen Gliederzahl bestehende Aggregat

$$rF(k, \varphi) + sF(k, \psi) + tF(k, \chi) + \ldots$$

zu einem einzigen elliptischen Integrale zusammengezogen werden, dessen Modulus wiederum k ist, und dessen Amplitude durch algebraische Operationen aus φ, ψ, χ etc. abgeleitet wird."

§. 87.

Die Landen'sche Substitution.

I. Setzen wir in dem elliptischen Integrale

1) $$F(r, \Theta) = \int_0^{\Theta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \vartheta}}$$

für ϑ eine neue Variabele ω der Art, dass

$$\vartheta = Arctan \frac{\sin 2\omega}{r + \cos 2\omega} \quad \text{oder} \quad \tan \vartheta = \frac{\sin 2\omega}{r + \cos 2\omega}$$

ist, so wird, wie man leicht findet:

$$d\vartheta = 2 \frac{r \cos 2\omega + 1}{1 + 2r\cos 2\omega + r^2} d\omega$$

$$\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \vartheta} = \frac{1 + r\cos 2\omega}{\sqrt{1 + 2r\cos 2\omega + r^2}},$$

mithin durch Division, wenn man gleichzeitig $1 - 2\sin^2 \omega$ für $\cos 2\omega$ schreibt:

2) $$\frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \vartheta}} = \frac{2}{1+r} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \frac{4r}{(1+r)^2} \sin^2 \omega}}.$$

Der unteren Grenze $\vartheta = 0$ entspricht $\omega = 0$, der oberen Grenze $\vartheta = \Theta$ ein Werth $\omega = \Omega$, welcher aus der Gleichung

3) $$\tan \Theta = \frac{\sin 2\Omega}{r + \cos 2\Omega} \quad \text{oder} \quad \sin(2\Omega - \Theta) = r \sin \Theta$$

zu berechnen ist; nach diesen Bemerkungen zusammen folgt, indem man die Gleichung 2) zur Transformation der Gleichung 1) benutzt:

$$\int_0^{\Theta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \vartheta}} = \frac{2}{1+r} \int_0^{\Omega} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \frac{4r}{(1+r)^2} \sin^2 \omega}},$$

d. i. wenn zur Abkürzung

4) $$\frac{2\sqrt{r}}{1+r} = s, \quad r = \frac{1 - \sqrt{1 - s^2}}{1 + \sqrt{1 - s^2}}$$

gesetzt wird:

5) $$F(r, \Theta) = \frac{2}{1+r} F(s, \Omega).$$

Hierin liegt die Reduktion eines elliptischen Integrales auf ein zweites von anderem Modulus und von anderer Amplitude. Was die Grössenverhältnisse zwischen r und s, sowie zwischen Θ und Ω betrifft, so bemerken wir darüber Folgendes. Wegen $r < 1$ ist $(1+r)^2 < 4$, oder

$$\frac{4r}{(1+r)^2} > r > r^2, \text{ mithin } s^2 > r^2,\ s > r;$$

ferner aus Nro. 3) $\sin(2\Omega - \Theta) < \sin\Theta$, daher $2\Omega - \Theta < \Theta$ oder $\Omega < \Theta$; man kann also ein elliptisches Integral auf ein anderes von grösserem Modulus und von kleinerer Amplitude zurückführen. — Stellt man die Gleichung 5) in der umgekehrten Form

$$6)\qquad F(s, \Omega) = \frac{1+r}{2} F(r, \Theta)$$

dar, indem man s und Ω als gegeben ansieht und daraus r und Θ mittelst der Formeln 3) und 4) ableitet, so sagt die Gleichung 6), dass jedes elliptische Integral auf ein anderes mit kleinerem Modulus und grösserer Amplitude reduzirt werden kann.

II. Auf die soeben ausgesprochenen zwei Theoreme stützt sich eine Methode der näherungsweisen Berechnung des Werthes von $F(k, \varphi)$, welche die gewöhnliche Berechnungsweise (mittelst einer unendlichen Reihe, oder durch die Methode der Quadraturen) an Leichtigkeit und Kürze weit übertrifft. Man kann dabei die Fälle unterscheiden, ob k^2 mehr oder weniger als $\frac{1}{2}$ beträgt. Findet das Erste statt, so benutze man die Gleichung 5) zu einer fortwährenden Vergrösserung des Modulus nach folgendem Schema:

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{1+k} F(k_1, \varphi_1), \quad F(k_1, \varphi_1) = \frac{2}{1+k_1} F(k_2, \varphi_2) \text{ etc.},$$

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \qquad \sin(2\varphi_1 - \varphi) = k \sin\varphi,$$

$$k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}, \qquad \sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = k_1 \sin\varphi_1,$$

$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

und es ist dann, wenn bis k_n und φ_n gegangen wird:

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{1+k} \cdot \frac{2}{1+k_1} \cdot \frac{2}{1+k_2} \cdots \frac{2}{1+k_{n-1}} F(k_n, \varphi_n)$$

$$= F(k_n, \varphi_n) \sqrt{\frac{k_1\, k_2\, k_3 \ldots k_n}{k}}.$$

Bei unendlich wachsenden n reduzirt sich k_n auf die Einheit, φ_n geht in einen gewissen Grenzwerth Φ über und es wird

$$\mathit{Lim}\; F(k_n, \varphi_n) = \int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\varphi}} = l \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\Phi\right),$$

mithin

$$7)\qquad F(k, \varphi) = l \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\Phi\right) . \sqrt{\frac{k_1 k_2 k_3 \ldots}{k}}.$$

Verlangt man nur eine auf sieben Dezimalstellen beschränkte Genauigkeit, so wird schon $k_3 = k_4 \ldots = 1$, $\varphi_3 = \varphi_4 \ldots = \Phi$, was eine leichte Rechnung giebt.

Im zweiten Falle $k^2 < 1$ vermindert man den Modulus fortwährend, indem man sich der Gleichung 6) zufolge folgender Formeln bedient:

$$F(k, \varphi) = \frac{1 + k_1}{2} F(k_1, \varphi_1), \quad F(k_1, \varphi_1) = \frac{1 + k_2}{2} F(k_2, \varphi_2) \text{ etc.,}$$

$$k_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}}, \qquad \tan\varphi_1 = \frac{\sin 2\varphi}{k_1 + \cos 2\varphi},$$

$$k_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - k_1{}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_1{}^2}}, \qquad \tan\varphi_2 = \frac{\sin 2\varphi_1}{k_2 + \cos 2\varphi_1}$$

etc. etc.

und es ist dann, wenn bis k_n und φ_n gegangen wird:

$$F(k, \varphi) = \frac{1 + k_1}{2} \cdot \frac{1 + k_2}{2} \cdots \frac{1 + k_n}{2} F(k_n, \varphi_n)$$

$$= (1 + k_1)(1 + k_2) \ldots (1 + k_n) \frac{F(k_n, \varphi_n)}{2^n}.$$

Bei unendlich wachsenden n verschwindet k_n und es wird

$$\mathit{Lim} \frac{F(k_n, \varphi_n)}{2^n} = \mathit{Lim} \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{2^n} = \mathit{Lim}\left(\frac{\varphi_n}{2^n}\right),$$

und wenn wir diesen Grenzwerth mit Φ bezeichnen:

$$8)\qquad F(k, \varphi) = \Phi . (1 + k_1)(1 + k_2)(1 + k_3) \ldots .$$

Auch hier wird bei sieben Dezimalen bereits $k_4 = 0$ und $\frac{1}{16}\varphi_4 = \frac{1}{32}\varphi_5 \ldots = \Phi$.

Zu bemerken ist übrigens noch, dass die Unterscheidung der beiden Fälle $k^2 > 1$ und $k^2 < 1$ zwar eine naheliegende, keineswegs aber eine nothwendige war, und dass ebendeswegen jede der beiden angegebenen Näherungsmethoden allgemeine Gültigkeit besitzt. Da nun die Formel 8) insofern einfacher als die Formel 7) ist, als sie keinen logarithmischen Faktor enthält, so wird man sich in den meisten Fällen der Formel 8) bedienen, welche selbst für grosse, d. h. wenig von der Einheit differirende k brauchbar bleibt, wenn man die Reihe der abnehmenden Moduli weiter, etwa bis k_5 fortsetzt. Es verlohnt sich deshalb der Mühe, der zweiten Methode die bequemste Rechnungsform zu ertheilen; dies geschieht dadurch, dass man $k, k_1, k_2, \ldots$ als Sinus der Hülfswinkel $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ansieht, also

$$k = \sin\lambda, \qquad k_1 = \sin\lambda_1, \qquad k_2 = \sin\lambda_2, \ldots$$
$$\sqrt{1-k^2} = \cos\lambda, \; \sqrt{1-k_1{}^2} = \cos\lambda_1, \; \sqrt{1-k_2{}^2} = \cos\lambda_2, \ldots$$

setzt; die Formeln für $k_1, k_2, \ldots$ werden dann:

$$\begin{aligned} k &= \sin\lambda, \\ k_1 &= \sin\lambda_1 = \tan^2 \tfrac{1}{2}\lambda, \\ k_2 &= \sin\lambda_2 = \tan^2 \tfrac{1}{2}\lambda_1 \end{aligned}$$

u. s. w.

Auch die Berechnung der wachsenden Amplituden lässt eine Vereinfachung zu; aus der Formel für $\tan\varphi_1$ folgt nämlich:

$$\tan\varphi_1 - \tan\varphi = \frac{\sin 2\varphi\cos\varphi - \cos 2\varphi\sin\varphi - k_1\sin\varphi}{(k_1+\cos 2\varphi)\cos\varphi} = \frac{(1-k_1)\tan\varphi}{k_1+\cos 2\varphi},$$

$$1+\tan\varphi_1\tan\varphi = \frac{\cos 2\varphi\cos\varphi + \sin 2\varphi\sin\varphi + k_1\cos\varphi}{(k_1+\cos 2\varphi)\cos\varphi} = \frac{1+k_1}{k_1+\cos 2\varphi},$$

mithin durch Division

$$\tan(\varphi_1-\varphi) = \frac{1-k_1}{1+k_1}\tan\varphi = \sqrt{1-k^2}\,\tan\varphi;$$

die Amplituden können demnach mittelst folgender Formeln berechnet werden:

$$10)\qquad \left\{\begin{aligned} \tan(\varphi_1-\varphi) &= \cos\lambda\,\tan\varphi, \\ \tan(\varphi_2-\varphi_1) &= \cos\lambda_1\,\tan\varphi_1, \\ \tan(\varphi_3-\varphi_2) &= \cos\lambda_2\,\tan\varphi_2, \end{aligned}\right.$$

u. s. w.

Bemerkt man endlich noch, dass vermöge der Werthe von k_1 und k die Gleichung

$$(1+k_1)^2 = \frac{1-k_1{}^2}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{\cos^2\lambda_1}{\cos\lambda}$$

stattfindet, also entsprechend

$$1+k_1 = \frac{\cos\lambda_1}{\sqrt{\cos\lambda}}, \; 1+k_2 = \frac{\cos\lambda_2}{\sqrt{\cos\lambda_1}}, \ldots .$$

sein muss, so wird die Formel 8) zur folgenden:

$$11)\qquad F(k,\varphi)=\Phi.\sqrt{\frac{\cos\lambda_1\cos\lambda_2\cos\lambda_3\ldots}{\cos\lambda}},$$

welche logarithmisch leicht zu berechnen ist. — Aus den Gleichungen 10) geht übrigens hervor, dass die Differenz $\varphi_{n+1}-\varphi_n$ nahe gleich φ_n sein muss, wenn λ_n sehr klein geworden ist; daraus folgt weiter, dass φ_{n+1} beinahe das Doppelte von φ_n beträgt, dass also die Amplituden bald ebenso wachsen, wie die Progression φ, 2φ, 4φ, 8φ u. s. w. Genau ist dies für $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ der Fall; man hat dann $\varphi_1=\pi$, $\varphi_2=2\pi$, $\varphi_3=4\pi,\ldots$ also $\Phi=\frac{1}{2}\pi$ und

$$12)\qquad F^1(k)=\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{\cos\lambda_1\cos\lambda_2\cos\lambda_3\ldots}{\cos\lambda}}.$$

Aus der Vergleichung mit Nro. 11) erkennt man noch die Bedeutung von Φ; es verhält sich nämlich das vollständige elliptische Integral zum unvollständigen wie $\frac{1}{2}\pi:\Phi$.

III. Eine weitere und wichtigere Bedeutung gewinnen die Formeln des vorigen Abschnittes noch dadurch, dass sich mittelst derselben das umgekehrte Problem, die Amplitude φ aus dem Werthe von $F(k,\varphi)$ zu bestimmen, lösen lässt, wobei wieder die Fälle $k^2>1$ und $k^2<1$ unterschieden werden mögen.

Ist $k>1$ und $F(k,\varphi)=u$ gegeben, so können zunächst die wachsenden Moduli $k_1, k_2,\ldots$ nach den Formeln:

$$k_1=\frac{2\sqrt{k}}{1+k},\quad k_2=\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1},\quad \text{etc.}$$

berechnet werden, bis man auf einen Modulus stösst, welcher mit der verlangten Genauigkeit $=1$ gesetzt werden darf. Es sei dies k_4, so sind auch k_5, $k_6,\ldots$ für 1 zu rechnen, und die Gleichung 7) giebt:

$$l\tan(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\Phi)=u\sqrt{\frac{k}{k_1k_2k_3}};$$

man findet hieraus den Grenzwerth Φ, welcher wegen $k_4=1$ mit φ_4 identisch ist; mittelst der Gleichungen

$$\sin(2\varphi_4-\varphi_3)=k_3\sin\varphi_3\,,\quad \sin(2\varphi_3-\varphi_2)=k_2\sin\varphi_2,\ldots$$

erhält man nun rückwärts:

$$\tan\varphi_3=\frac{\sin 2\varphi_4}{k_3+\cos 2\varphi_4},\ \tan\varphi_2=\frac{\sin 2\varphi_3}{k_2+\cos 2\varphi_3},\ldots$$

mithin zuletzt $\varphi=am\,u$.

Ist dagegen $k^2 < 1$, so berechnet man zunächst die abnehmenden Moduli $k_1, k_2, \ldots$ nach den Formeln:

$$k_1 = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} = \sin\lambda_1,\; k_2 = \frac{1-\sqrt{1-k_1^2}}{1+\sqrt{1-k_1^2}} = \sin\lambda_2, \ldots.$$

bis man zu einem Modulus gelangt, der hinreichend mit Null übereinstimmt. Es sei dies k_4, so folgt aus Nro. 8):

$$\Phi = \frac{u}{(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)},$$

dieser Grenzwerth fällt mit $\frac{1}{16}\varphi_4$ zusammen und giebt daher $\varphi_4 = 16\,\Phi$. Die Gleichungen:

$$\tan\varphi_4 = \frac{\sin 2\varphi_3}{k_4 + \cos 2\varphi_3},\; \tan\varphi_3 = \frac{\sin 2\varphi_2}{k_3 + \cos 2\varphi_2}, \ldots.$$

liefern nun rückwärts:

$$\sin(2\varphi_3 - \varphi_4) = k_4 \sin\varphi_4,\; \sin(2\varphi_2 - \varphi_3) = k_3 \sin\varphi_3, \ldots.$$

also der Reihe nach $\varphi_3, \varphi_2, \varphi_1, \varphi = am\,u$. — Hiermit ist zugleich die Aufgabe gelöst, die obere Integrationsgrenze x zu bestimmen wenn in der Gleichung:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = u,$$

k und u gegeben sind; man hat nämlich $x = \sin\varphi = \sin am\,u$.

§. 88.

Die elliptischen Integrale zweiter Art.

I. Bezeichnet k wie früher einen echten Bruch, so heisst das bestimmte Integral

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-k^2x^2},$$

das elliptische Integral zweiter Art; gewöhnlich betrachtet man statt desselben dasjenige, welches mittelst der Substitution $x = \sin\varphi$ daraus hervorgeht, und schreibt als Definition:

$$1)\qquad \int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = E(k,\varphi).$$

Die Eigenschaften der Funktion $E(k, \varphi)$ sind denen von $F(k,\varphi)$ sehr ähnlich und können aus den letzteren auf folgende Weise hergeleitet werden.

Wir setzen wiederum voraus, dass zwischen den Variabelen η und ζ die Gleichung 7) des §. 86 stattfinde, welche die Gleichungen 9) und 10) nach sich zog, denen zufolge

$$\sqrt{1-k^2 \sin^2\eta} = \frac{\cos\eta - \cos\alpha\cos\zeta}{\sin\alpha\sin\zeta},$$

$$\sqrt{1-k^2 \sin^2\zeta} = \frac{\cos\alpha\cos\eta - \cos\zeta}{\sin\alpha\sin\eta}$$

ist; wir bilden daraus zunächst die Gleichung:

$$d\eta\sqrt{1-k^2\sin^2\eta} - d\zeta\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta}$$
$$= \frac{\cos\eta - \cos\alpha\cos\zeta}{\sin\alpha\sin\zeta}\,d\eta + \frac{\cos\zeta-\cos\alpha\cos\eta}{\sin\alpha\sin\eta}\,d\zeta,$$

und bemerken, dass die rechte Seite auch in folgender Form dargestellt werden kann:

$$\frac{1}{2}\,\frac{d(\sin^2\eta + \sin^2\zeta + 2\cos\alpha\cos\eta\cos\zeta)}{\sin\alpha\sin\eta\sin\zeta},$$

wovon man sich leicht durch Ausführung der Differenziation überzeugt. Macht man die Gleichung 10) in §. 86 rational, indem man zugleich $\cos^2\alpha$, $\cos^2\eta$ und $\cos^2\zeta$ durch $\sin^2\alpha$, $\sin^2\eta$ und $\sin^2\zeta$ ausdrückt, so findet man weiter:

$$\sin^2\eta + \sin^2\zeta + 2\cos\alpha\cos\eta\cos\zeta = k^2\sin^2\alpha\sin^2\eta\sin^2\zeta,$$

und es ist daher durch Substitution dieses Ausdruckes in das Vorige:

$$d\eta\sqrt{1-k^2\sin^2\eta} - d\zeta\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta}$$
$$= \frac{1}{2}k^2\sin\alpha\,\frac{d(\sin^2\eta\sin^2\zeta)}{\sin\eta\sin\zeta} = k^2\sin\alpha\; d(\sin\eta\sin\zeta).$$

Die beiderseitige Integration giebt nun unter der Rücksicht, dass den Grenzen $\eta = 0$ und $\eta = \beta$ die Grenzen $\zeta = \alpha$, $\zeta = \gamma$ entsprechen, wobei α, β, γ durch die Gleichung 8) in §. 86 verbunden sind:

$$\int_0^\beta d\eta\sqrt{1-k^2\sin^2\eta} - \int_\alpha^\gamma d\zeta\sqrt{1-k^2\sin^2\zeta} = k^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Schreiben wir endlich φ, ψ, ω für α, β, γ, so folgt daraus das Theorem: wenn die Amplituden φ, ψ, ω der Gleichung $F(k, \varphi) + F(k,\psi) = F(k,\omega)$ genügen, so gilt zugleich die Beziehung:

2) $$E(k,\varphi) + E(k,\psi) = E(k,\omega) + k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\omega,$$

welche das Additionstheorem für das zweite elliptische Integral bildet und zwar insofern, als man vermöge der Formeln 15), 16), 17) des §. 86 ein Integral $E(k, \omega)$ finden kann, welches, mit Zusatz eines algebraischen Ausdruckes, die Summe der Integrale $E(k, \varphi)$ und $E(k, \psi)$ darstellt. — Es würde nun auch keine Schwierigkeit haben, den früheren Formeln über die Subtraktion, Multiplikation und Division der Integrale erster Art ähnliche Formeln für die Integrale zweiter Art an die Seite zu stellen; sind z. B. φ_2, φ_3, φ_4 etc. so bestimmt, dass sie den Gleichungen

$$F(k, \varphi_2) = 2F(k, \varphi), \quad F(k, \varphi_3) = 3F(k, \varphi), \ldots$$

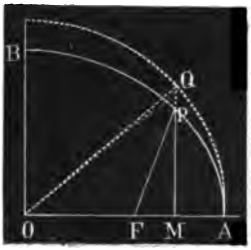
genügen, so sind die entsprechenden Gleichungen:

$$E(k, \varphi_2) = 2E(k, \varphi) - k^2 \sin^2\varphi \sin\varphi_2,$$
$$E(k, \varphi_3) = 3E(k, \varphi) - k^2 \sin\varphi \sin\varphi_2 (\sin\varphi + \sin\varphi_3)$$

u. s. w.

II. Die Fundamentalformel 2) kann zur Lösung verschiedener mit der Rektifikation der Ellipse oder der Hyperbel zusammenhängender Aufgaben benutzt werden (historisch war hier der Anfang der Theorie), weil das elliptische Integral zweiter Art in direkter Beziehung zur Rektifikation der Ellipse steht, für $OA = a$, $OB = b$ (Fig. 48), $OM = x$ ist nämlich der über der Abscisse x stehende Bogen:

Fig. 48.



$$BP = \int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2 - k^2 x^2}{a^2 - x^2}},$$

wo k die numerische Excentricität $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ bezeichnet; nehmen wir $\angle BOQ = \varphi$ statt x als unabhängige Variabele, so wird:

$$3) \qquad Arc\, BP = a \int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = a\, E(k, \varphi).$$

$E(k, \varphi)$ bedeutet demnach einen elliptischen Bogen, wenn die grosse Halbachse der Ellipse $= 1$, die Excentricität $= k$ und φ das Complement der sogenannten excentrischen Anomalie ($\angle AOQ$) des Endpunktes ist; das vollständige elliptische Integral $E(k, \frac{1}{2}\pi) = E^1(k)$ giebt den elliptischen Quadranten.

Setzt man in der Gleichung 2) $\omega = \frac{1}{2}\pi$, so ist die entsprechende Amplitudengleichung:

4) $$tan\,\varphi\; tan\,\psi = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{a}{b}$$

und nun folgt aus Nro. 2) durch Multiplikation mit a:

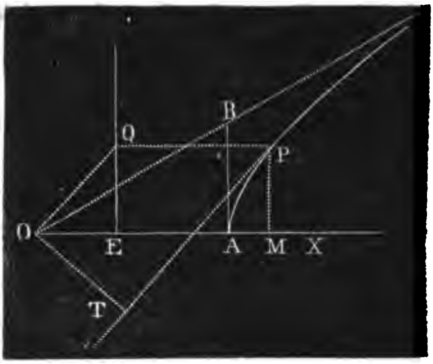
5) $$aE(k,\varphi) - [aE^1(k) - aE(k,\psi)] = ak^2 \sin\varphi \sin\psi,$$

in Worten giebt dies den Fagnani'schen Satz, dass sich zu jedem vom Endpunkte der kleinen Achse ab gerechneten Bogen ein zweiter vom Endpunkte der grossen Achse aus gerechneter finden lässt, der von dem ersten um eine algebraische Grösse differirt. Spezieller für $\psi = \varphi$ wird

$$tan^2\varphi = \frac{a}{b},\quad sin^2\varphi = \frac{a}{a+b}$$

und $ak^2 \sin\varphi \sin\psi = a - b$; man erhält in diesem Falle einen Punkt P auf der Ellipse, welcher die merkwürdige Eigenschaft besitzt, dass die Differenz der Bögen PB und PA gleich der Differenz der Halbachsen ist.

Fig. 49.



Aehnliche Relationen gelten für die Hyperbel; es sei in Fig. 49 die Haupthalbachse $OA = a$, die Nebenhalbachse $AB = b$, die lineare Excentricität $\sqrt{a^2+b^2} = c$, $OM = x$, $MP = y$, $Arc\ AP = s$, so ist bekanntlich:

6) $$s = \int_a^x dx \sqrt{\frac{\left(\frac{c}{a}\right)^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}.$$

Um das vorstehende Integral auf die bisherigen elliptischen Integrale zurückzuführen, nehmen wir $OE = \frac{b^2}{c}$ (gleich dem Abstande des Brennpunktes von der Direktrix), ziehen durch E eine Parallele zu AB, fällen auf diese die Senkrechte PQ und betrachten nun den Winkel $EOQ = \varphi$ als neue Variabele; es ist dann $y = \frac{b^2}{c} \tan\varphi$ und vermöge der Hyperbelgleichung:

$$x = a\sqrt{1+\left(\frac{y}{b}\right)^2} = \frac{a}{\cos\varphi}\sqrt{1-\frac{b^2-c^2}{c^2}\sin^2\varphi},$$

wo zur Abkürzung gesetzt werden soll:

$$\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{c} = \frac{a}{c} = k.$$

Man findet nun ohne Mühe folgende Gleichungen:

$$dx = \frac{a(1-k^2)\sin\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi\,,\quad \sqrt{\frac{\left(\frac{c}{a}\right)^2 x^2-a^2}{x^2-a^2}} = \frac{1}{k\sin\varphi},$$

vermöge deren die Formel 6) in die nachstehende übergeht:

$$7)\qquad s = \frac{b^2}{c}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

indem man bemerkt, dass für $x = a$, $\varphi = 0$ wird. Differenzirt man den Ausdruck $\tan\varphi\sqrt{1-k^2\sin\varphi} = \tan\varphi\,.\,\Delta(\varphi)$, so ergiebt sich:

$$d\{\tan\varphi\,.\,\Delta(\varphi)\} = \frac{(1-k^2)\,d\varphi}{\cos^2\varphi.\Delta(\varphi)} - \frac{(1-k^2)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \Delta(\varphi)\,d\varphi,$$

mithin durch Integration zwischen den Grenzen $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi$:

$$\tan\varphi\,.\,\Delta(\varphi) = (1-k^2)\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\,.\,\Delta(\varphi)} - (1-k^2)\,F(k,\varphi) + E(k,\varphi).$$

Hier kommt das unter Nro. 7) verzeichnete Integral vor, und es ist daher für $k = \frac{a}{c}$:

$$8)\qquad s = \frac{b^2}{c}\,F(k,\varphi) - c\,E(k,\varphi) + c\,\Delta(\varphi)\tan\varphi.$$

Ein hyperbolischer Bogen lässt sich demnach mittelst der elliptischen Funktionen erster und zweiter Gattung rektificiren; es verdient dabei bemerkt zu werden, dass der algebraische Ausdruck $c\,\Delta(\varphi)\tan\varphi$ geometrisch das Stück der durch P gelegten Tangente bedeutet, welches von P bis zum Fusspunkte T einer von O darauf gezogenen Senkrechten reicht; schreibt man daher die vorige Gleichung in der Form:

$$9)\qquad c\,\Delta(\varphi)\tan\varphi - s = c\,E(k,\varphi) - \frac{b^2}{c}\,F(k,\varphi),$$

so erhält man die Differenz zwischen jenem Stücke der Tangente und dem Bogen. Für unendlich wachsende Bögen convergirt diese

Differenz gegen einen endlichen Grenzwerth; denn setzt man $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so geht die rechte Seite der obigen Gleichung in:

$$cE^1(k) - \frac{b^2}{c} F^1(k)$$

über. — Mittelst der Formel 8) lassen sich Vergleichungen zwischen verschiedenen Hyperbelbögen vornehmen, wobei wir s durch $H(\varphi)$ ersetzen wollen, was jedenfalls eine sprechendere Bezeichnung ist. Nehmen wir z. B. an, dass die Amplituden φ, ψ, ω der Gleichung $F(\varphi) + F(\psi) - F(\omega) = 0$ genügen, so ist die entsprechende Gleichung für H:

$$H(\varphi) + H(\psi) - H(\omega) = -c\{E(\varphi) + E(\psi) - E(\omega)\}$$
$$+ c\{\Delta(\varphi) \tan\varphi + \Delta(\psi) \tan\psi - \Delta(\omega) \tan\omega\},$$

oder wenn statt $E(\varphi) + E(\psi) - E(\omega)$ sein Werth gesetzt wird:

10) $$H(\varphi) + H(\psi) - H(\omega)$$
$$= c\{\Delta(\varphi) \tan\varphi + \Delta(\psi) \tan\psi - \Delta(\omega) \tan\omega - k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\omega\},$$

woraus sich ähnliche Consequenzen wie aus der entsprechenden Formel für Ellipsenbögen (Nro. 2) ziehen liessen.

§. 89.

Transformation der Integrale zweiter Art.

Die in §. 87 erwähnte Substitution:

$$\tan\vartheta = \frac{\sin 2\omega}{r + \cos 2\omega},$$

aus welcher die nachstehenden Gleichungen folgen:

$$\cos\vartheta = \frac{r + \cos 2\omega}{\sqrt{1 + 2r\cos 2\omega + r^2}}, \quad \sin\vartheta = \frac{\sin 2\omega}{\sqrt{1 + r\cos 2\omega + r^2}},$$

$$\sqrt{1 - r^2 \sin^2\vartheta} = \frac{1 + r\cos 2\omega}{\sqrt{1 + 2r\cos 2\omega + r^2}}, \quad d\vartheta = 2\frac{1 + r\cos 2\omega}{1 + 2r\cos 2\omega + r^2},$$

$$\frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - r^2\sin^2\vartheta}} = \frac{d\omega}{\sqrt{1 - s^2\sin^2\omega}} \frac{2}{1+r}, \quad s = \frac{2\sqrt{r}}{1+r},$$

ist auf elliptische Integrale zweiter Art gleichfalls anwendbar und führt zu verschiedenen merkwürdigen Resultaten, von denen wir die wichtigsten entwickeln wollen:

I. Aus der Gleichung:

$$E(r, \Theta) + r \sin \Theta = \int_0^\Theta \left\{ \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \vartheta} + r \cos \vartheta \right\} d\vartheta,$$

ergiebt sich mittelst der obigen Substitution und unter der Bemerkung, dass wie früher den Grenzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \Theta$ die Grenzen $\omega = 0$ und $\omega = \Omega$ entsprechen:

$$E(r, \Theta) + r \sin \Theta = 2 \int_0^\Omega \frac{1 + r \cos 2\omega}{\sqrt{1 + 2r \cos 2\omega + r^2}} d\omega$$

$$= \frac{2}{1+r} \int_0^\Omega \frac{1 + r(1 - 2 \sin^2 \omega)}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2 \omega}} d\omega.$$

wobei die rechte Seite auch unter der Form:

$$\int_0^\Omega \left[(1+r) \sqrt{1 - s^2 \sin^2 \omega} + (1-r) \frac{1}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2 \omega}} \right] d\omega$$

$$= (1+r)\, E(s, \Omega) + (1-r)\, F(s, \Omega)$$

dargestellt werden kann; demnach hat man die Gleichung:

1) $\quad E(r, \Theta) + r \sin \Theta = (1+r) E(s, \Omega) + (1-r) F(s, \Theta),$

oder, wenn man beachtet, dass $F(s, \Omega) = \frac{1}{2}(1+r)\, F(r, \Omega)$ ist (Nro. 5 in §. 87):

$$E(r, \Theta) + r \sin \Theta = (1+r)\, E(s, \Omega) + \tfrac{1}{2}(1 - r^2)\, F(r, \Theta).$$

Ersetzen wir r und Θ durch k und φ, sowie s und Ω durch k_1 und φ_1, so liefert die vorstehende Gleichung, in der Form:

2) $\quad \frac{1}{2}(1 - k^2)\, F(k, \varphi) = E(k, \varphi) - (1+k)\, E(k_1, \varphi_1) + k \sin \varphi$

geschrieben, den Satz, dass sich jede elliptische Funktion erster Art durch zwei elliptische Funktionen der zweiten Art ersetzen lässt. Vermöge der Gleichung 8) des vorigen Paragraphen folgt daraus weiter, dass jeder Hyperbelbogen durch zwei Ellipsenbögen ausgedrückt werden kann, welches der von Landen gefundene Satz ist.

II. Betrachten wir allgemeiner das Integral:

3) $$G(r, \Theta) = \int_0^\Theta (A + B \sin^2 \vartheta) \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \vartheta}},$$

welches aus Funktionen erster und zweiter Art zusammengesetzt ist. In der identischen Gleichung:

$$G(r,\Theta) - \frac{B}{r}\sin\Theta$$

$$= \int_0^\Theta \left(A + B\,\frac{r\sin^2\vartheta - \cos\vartheta\sqrt{1-r^2\sin^2\vartheta}}{r}\right)\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-r^2\sin^2\vartheta}}$$

nehmen wir wieder dieselbe Substitution wie früher vor und berücksichtigen, dass

$$r\sin^2\vartheta - \cos\vartheta\sqrt{1-r^2\sin^2\vartheta} = -\cos 2\omega = 2\sin^2\omega - 1$$

wird; wir erhalten dann:

$$G(r,\Theta) - \frac{B}{r}\sin\Theta = \int_0^\Omega \left(A + B\,\frac{2\sin^2\omega - 1}{r}\right)\frac{d\omega}{\sqrt{1-s^2\sin^2\omega}}\,\frac{2}{1+r}$$

$$= \frac{2}{1+r}\int_0^\Omega (A_1 + B_1\sin^2\omega)\frac{d\omega}{\sqrt{1-s^2\sin^2\omega}},$$

wo zur Abkürzung:

4) $$A - \frac{B}{r} = A_1\,,\ \frac{2B}{r} = B_1$$

gesetzt worden ist. Das rechter Hand befindliche Integral steht wieder unter der Form des Integrales G, und möge durch $G_1(s,\Omega)$ bezeichnet werden, indem durch G_1 zugleich angedeutet werden soll, dass A_1 und B_1 an die Stellen von A und B getreten sind. Schreiben wir die vorige Gleichung in der Form:

5) $$G(r,\Theta) = \frac{2}{1+r}\,G_1(s,\Omega) + \tfrac{1}{2}B_1\sin\Theta,$$

so ist die Funktion G auf eine Funktion derselben Art mit grösserem Modulus (s) und kleinerer Amplitude (Ω) zurückgeführt. Denkt man sich dieses Verfahren mehrmals nach einander angewendet, so würde man, von der Gleichung

$$G = \int_0^\varphi (A + B\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

ausgehend, eine Reihe von Funktionen mit steigenden Modulis und abnehmenden Amplituden in folgender Weise bilden können:

$$G = \frac{2}{1+k}\,G_1 + \tfrac{1}{2}B_1\sin\varphi,$$

$$G_1 = \frac{2}{1+k_1}\,G_2 + \tfrac{1}{2}B_2\sin\varphi_1, \qquad \text{u. s. w.,}$$

bis man auf eine Funktion G_n käme, in welcher mit hinreichender Genauigkeit $k_n = 1$ gesetzt werden darf; der Werth dieser Funktion ist dann:

$$G_n = \int_0^{\varphi_n} (A_n + B_n \sin^2 \varphi_n) \frac{d\varphi_n}{\cos \varphi_n}$$

$$= (A_n + B_n) l \tan(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi_n) - B_n \sin \varphi_n,$$

und hieraus ergeben sich nach den obigen Formeln G_{n-1}, G_{n-2} ... G_1 und G selbst, indem man die gefundenen Werthe substituirt. Die zur Ausführung dieses Gedankens nöthigen kleinen Rechnungen übergehen wir, weil die gleich zu erwähnende zweite Methode in den meisten Fällen bequemere Formeln darbietet.

Aus den Gleichungen 2) folgt umgekehrt:

$$G_1(s, \Omega) = \frac{1+r}{2} \left\{ G(r, \Theta) - \tfrac{1}{2} B_1 \sin \Theta \right\},$$

$$B = \tfrac{1}{2} B_1 r, \quad A = A_1 + \tfrac{1}{2} B_1.$$

Denkt man sich A_1 und B_1 gegeben, etwa $A_1 = a$, $B_1 = b$ und daraus $A = a_1$ und $B = b_1$ abgeleitet, schreibt man ferner G für die nunmehr primitive Funktion G_1 und G_1 für die abgeleitete Funktion G, so ist:

6) $$G(s, \Omega) = \frac{1+r}{2} \left\{ G_1(r, \Theta) - \tfrac{1}{2} b \sin \Theta \right\},$$

$$a_1 = a + \tfrac{1}{2} b, \quad b_1 = \tfrac{1}{2} b r,$$

mithin die Funktion G auf eine andere G_1 zurückgeführt, welche einen kleineren Modulus r und eine grössere Amplitude Θ besitzt. Diese Beziehung gestattet wiederum eine mehrmalige Anwendung, indem man, von

$$G(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} (a + b \sin^2 \varphi) \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

ausgehend, folgende Gleichungen aufstellt:

$$G = \frac{1+k_1}{2} (G_1 - \tfrac{1}{2} b \sin \varphi_1),$$

$$G_1 = \frac{1+k_2}{2} (G_2 - \tfrac{1}{2} b_1 \sin \varphi_2),$$

. . . .

in denen $k_1, k_2, \ldots$ die abnehmenden Moduli, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ die wachsenden Amplituden und $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ Grössen bezeichnen, welche durch die Formeln:

$$a_1 = a + \tfrac{1}{2} b, \qquad b_1 = \tfrac{1}{2} b k_1,$$
$$a_2 = a_1 + \tfrac{1}{2} b_1, \qquad b_2 = \tfrac{1}{2} b_1 k_2$$
u. s. w. u. s. w.

bestimmt werden. Denken wir uns die Gleichungen für $G, G_1, G_2, \ldots$ bis G_n fortgesetzt, so kann G durch G_n ausgedrückt werden und zwar geschieht dies am raschesten dadurch, dass man die erste Gleichung mit 1, die zweite mit $\frac{1+k_1}{2}$, die dritte mit $\frac{1+k_1}{2} \cdot \frac{1+k_2}{2}$ u. s. f. multiplizirt und darauf alle Gleichungen addirt; es ergiebt sich so:

$$G = \frac{1+k_1}{2} \cdot \frac{1+k_2}{2} \cdot \frac{1+k_3}{2} \cdots \frac{1+k_n}{2} \cdot G_n$$
$$- \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{1+k_1}{2} b \sin\varphi_1 + \frac{1+k_1}{2} \cdot \frac{1+k_2}{2} b_1 \sin\varphi_2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{1+k_1}{2} \cdot \frac{1+k_2}{2} \cdots \frac{1+k_n}{2} b_{n-1} \sin\varphi_n \right\},$$

und dabei ist, wie man leicht findet:

$$G_n = \int_0^{\varphi_n} (a_n + b_n \sin^2\varphi_n) \frac{d\varphi_n}{\sqrt{1 - k^2_n \sin\varphi_n}},$$
$$b_n = b\, \frac{k_1}{2} \cdot \frac{k_2}{2} \cdot \frac{k_3}{2} \cdots \frac{k_n}{2},$$
$$a_n = a + \tfrac{1}{2} b \left(1 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_1 k_2}{4} + \ldots + \frac{k_1 k_2 \ldots k_n}{2^n}\right).$$

Nehmen wir n so gross, dass k_n für Null gerechnet werden darf so ist um so mehr $b_n = 0$, mithin

$$G_n = \int_0^{\varphi_n} a^n \, d\varphi_n = a_n \varphi_n,$$

und

$$\frac{1+k_1}{2} \cdot \frac{1+k_2}{2} \cdot \frac{1+k_3}{2} \cdots \frac{1+k_n}{2} G_n$$
$$= (1+k_1)(1+k_2)(1+k_3) \ldots (1+k_n) \cdot \frac{\varphi_n}{2^n} \cdot a_n,$$

folglich genau für $n = \infty$, wenn wie früher $Lim\,\frac{\varphi_n}{2^n}$ mit Φ bezeichnet und $Lim\, a_n = A$ gesetzt wird:

$$G = A\,.\,\Phi\,.\,(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\ldots$$
$$-\tfrac{1}{2}b\left\{\frac{1+k_1}{2}\sin\varphi_1 + \frac{(1+k_1)(1+k_2)}{4}\cdot\frac{k_1}{2}\sin\varphi_2\right.$$
$$\left.+\frac{(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)}{8}\cdot\frac{k_1 k_2}{4}\sin\varphi_3 + \ldots\right\},$$

und darin:

7) $$A = a + \tfrac{1}{2}b\left\{1 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_1 k_2}{4} + \frac{k_1 k_2 k_3}{8} + \ldots\right\}.$$

Zur Abkürzung der für G gefundenen Formel bemerken wir noch, dass erstens $\Phi\,.\,(1+k_1)(1+k_2)\ldots = F(k,\varphi)$ ist und dass zweitens die Gleichungen:

$$\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1} = k,\quad \frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2} = k_1,\ \ldots.$$

oder

$$1+k_1 = 2\frac{\sqrt{k_1}}{k},\quad 1+k_2 = 2\frac{\sqrt{k_2}}{k_1},\ \ldots.$$

stattfinden, vermöge deren man folgenden Ausdruck erhält:

8) $$\int_0^\varphi (a + b\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$
$$= F(k,\varphi)\left\{a + \tfrac{1}{2}b\left(1 + \tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{4}k_1 k_2 + \ldots\right)\right\}$$
$$-\frac{b}{k}\left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{k_1}\sin\varphi_1 + \tfrac{1}{4}\sqrt{k_1 k_2}\sin\varphi_2 + \tfrac{1}{8}\sqrt{k_1 k_2 k_3}\sin\varphi_3 + \ldots\right\}$$

Spezieller für $a = 1$, $b = -k^2$ ergiebt sich hieraus eine Formel zur numerischen Berechnung des elliptischen Integrales zweiter Art, nämlich:

9) $$E(k,\varphi) = F(k,\varphi)\left\{1 - \tfrac{1}{2}k^2 - \tfrac{1}{4}k^2 k_1 - \tfrac{1}{8}k^2 k_1 k_2 - \ldots\right\}$$
$$+\tfrac{1}{2}k\sqrt{k_1}\sin\varphi_1 + \tfrac{1}{4}k\sqrt{k_1 k_2}\sin\varphi_2$$
$$+\tfrac{1}{8}k\sqrt{k_1 k_2 k_3}\sin\varphi_3 + \ldots.,$$

wobei die Reihen stark convergiren. Die Formel vereinfacht sich in dem Falle $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, welcher die Werthe $\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = 2\pi$, $\varphi_3 = 4\pi$ etc. nach sich zieht; es bleibt nämlich:

10) $$E^1(k) = F^1(k)\left\{1 - \tfrac{1}{2}k^2 - \tfrac{1}{4}k^2 k_1 - \tfrac{1}{8}k^2 k_1 k_2 - \ldots\right\}.$$

Die unter Nro. 9) und 10) gewonnenen Resultate sind noch insofern wichtig, als sie eine ganz andere Behandlung des elliptischen Integrales zweiter Art andeuten. Ist nämlich k gegeben, so sind $F^1(k)$ und $E^1(k)$ Funktionen von k allein und dürfen immer als bekannte Constanten angesehen werden (in der That existiren Tafeln dafür), man wird folglich die Gleichung 10) benutzen, um die Reihe $1 - \frac{1}{2}k^2$ — etc. durch $E^1(k)$ und $F^1(k)$ auszudrücken, und dies giebt nach Substitution in Nro. 9):

$$E(k, \varphi) = \frac{E^1(k)}{F^1(k)} F(k, \varphi) + \tfrac{1}{2} k \sqrt{k_1} \sin \varphi_1 + \tfrac{1}{4} k \sqrt{k_1 k_2} \sin \varphi_2 + \ldots.$$

Denken wir uns nicht φ, sondern $F(k, \varphi) = u$ als die gegebene Variabele, so folgt umgekehrt $\varphi = am\, u$, und da $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ aus φ berechnet werden können, so bildet die Summe der Reihe $\frac{1}{2} k \sqrt{k_1} \sin \varphi_1 +$ etc. eine Funktion von u, welche $Z(u)$ heissen möge; nunmehr ist:

$$E(k, am\, u) = \frac{E^1(k)}{F^1(k)} u + Z(u),$$

und hieraus erhellt von selbst, dass das elliptische Integral zweiter Art durch das elliptische Integral erster Art und eine Funktion desselben ausgedrückt werden kann, dass also eine weitere Untersuchung von $E(k, \varphi) = E(k, am\, u)$ wesentlich auf eine Analyse von $Z(u)$ zurückkommen würde. Wir müssen uns mit der Andeutung dieses Gedankens begnügen, da seine Ausführung zuviel Raum in Anspruch nehmen würde.

§. 90.

Allgemeinere elliptische Integrale.

I. Die elliptischen Integrale erster und zweiter Art bieten die Mittel, um jede Integration von der Form:

$$1)\quad U_{2n} = \int_0^x \frac{x^{2n}\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^\varphi \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

auszuführen. Differenzirt man nämlich den Ausdruck

$$\sin^{2n-3}\varphi \cos\varphi\, \Delta(\varphi),$$

so ergiebt sich zunächst das Differenzial:

$$\Delta(\varphi)\left\{(2n-3)\sin^{2n-4}\varphi \cos^2\varphi - \sin^{2n-2}\varphi\right\} d\varphi - \frac{k^2 \sin^{2n-2}\varphi \cos^2\varphi}{\Delta(\varphi)} d\varphi,$$

welches durch Zusammenrechnung über gleichen Nenner und für $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$ folgende Gestalt annimmt:

$$(2n-3)\frac{\sin^{2n-4}\varphi}{\Delta(\varphi)}\,d\varphi - (2n-2)(1+k^2)\frac{\sin^{2n-2}\varphi}{\Delta(\varphi)}\,d\varphi$$
$$+(2n-1)k^2\frac{\sin^{2n}\varphi}{\Delta(\varphi)}\,d\varphi.$$

Beiderseitige Integration führt mit Rücksicht auf die in Nro. 1) festgesetzte Bezeichnung zu der Formel:

2)
$$\sin^{2n-3}\varphi\cos\varphi\,\Delta(\varphi)$$
$$= (2n-3)\,U_{2n-4} - (2n-2)(1+k^2)\,U_{2n-2} + (2n-1)\,k^2\,U_{2n},$$

mittelst welcher U_{2n} auf U_{2n-2} und U_{2n-4} reduzirt wird. Denken wir uns der Reihe nach 2, 3, 4 etc. für n gesetzt, so liefert die Formel 1) successiv U_4, U_6, U_8 etc., ausgedrückt durch U_0 und U_2; die letzteren Integrale sind aber unmittelbar bekannt, nämlich:

3)
$$U_0 = F(k,\varphi),$$

4)
$$U_2 = \frac{1}{k^2}\int_0^{\varphi}\left\{\frac{1}{\Delta(\varphi)} - \Delta(\varphi)\right\}d\varphi = \frac{F(k,\varphi)-E(k,\varphi)}{k^2},$$

und es ist folglich U_{2n} jederzeit durch $F(k,\varphi)$ und $E(k,\varphi)$ ausdrückbar. Daran knüpft sich unmittelbar die Consequenz, dass auch das allgemeinere Integral:

5)
$$\int_0^{\varphi}\frac{A + B\sin^2\varphi + C\sin^4\varphi + \ldots + M\sin^{2m}\varphi}{\Delta(\varphi)}\,d\varphi$$

auf die elliptischen Integrale erster und zweiter Art zurückkommt.

II. Betrachten wir weiter das Integral:

6)
$$V_m = \int_0^x\frac{dx}{(1+hx^2)^m\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$
$$= \int_0^{\varphi}\frac{\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)^m\,\Delta(\varphi)},$$

worin das Radikal für den Augenblick mit R bezeichnet werden möge. Ist m eine negative ganze Zahl, so nimmt das Integral für $x = \sin\varphi$ die in Nro. 5) erwähnte Form an und lässt sich vollständig entwickeln; wir müssen daher die Aufmerksamkeit auf den

Fall eines ganzen positiven m richten. Durch Differenziation des Ausdruckes

$$\frac{xR}{(1+hx^2)^{m-1}}$$

findet man nach gehöriger Reduktion einen Ausdruck von der Form

$$\frac{\alpha x^6+\beta x^4+\gamma x^2+\delta}{(1+hx^2)^m}\,\frac{dx}{R},$$

wo α, β, γ, δ aus m, h und k zusammengesetzt sind. Denkt man sich für den Augenblick $1+hx^2=z$, also umgekehrt $x^2=\frac{z-1}{h}$ gesetzt, so nimmt der Faktor von $\frac{dx}{R}$ die Gestalt:

$$\frac{\alpha_1 z^3+\beta_1 z^2+\gamma_1 z+\delta_1}{z^m}$$

$$=\alpha_1\frac{1}{z^{m-3}}+\beta_1\frac{1}{z^{m-2}}+\gamma_1\frac{1}{z^{m-1}}+\delta_1\frac{1}{z^m}$$

an, und wenn man den Werth von z wieder einführt, so ist das Resultat folgendes:

$$d\left\{\frac{xR}{(1+hx^2)^{m-1}}\right\}$$

$$=\alpha_1\frac{dx}{(1+hx^2)^{m-3}R}+\beta_1\frac{dx}{(1+hx^2)^{m-2}R}+\gamma_1\frac{dx}{(1+hx^2)^{m-1}R}$$

$$+\delta_1\frac{dx}{(1+hx^2)^m R}.$$

Durch Integration folgt hieraus, wenn nachträglich $x=\sin\varphi$ genommen wird:

$$7)\qquad \frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{(1+h\sin^2\varphi)^{m-1}}$$

$$=\alpha_1 V_{m-3}+\beta_1 V_{m-2}+\gamma_1 V_{m-1}+\delta_1 V_m,$$

und zwar sind die Werthe von α_1, β_1, γ_1, δ_1 durch die nachstehenden Gleichungen bestimmt:

$$8)\qquad \alpha_1=-(2m-5)\frac{k^2}{h^2},\ \beta_1=(2m-4)\left(\frac{1+k^2}{h}+3\frac{k^2}{h^2}\right),$$

$$\gamma_1=-(2m-3)\left(1+2\frac{1+k^2}{h}+3\frac{k^2}{h^2}\right),$$

$$\delta_1=(2m-2)\left(1+\frac{1+k^2}{h}+\frac{k^2}{h^2}\right).$$

Aus der Gleichung 7)' geht hervor, dass zunächst V_2, dann auch V_3, V_4, ... durch V_{-1}, V_0 und V_1 ausgedrückt werden können; von diesen drei Integralen sind die ersten zwei unmittelbar bekannt, das letzte

$$V_1 = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\Delta(\varphi)}$$

bildet eine neue Funktion von h, k und φ, welche man das elliptische Integral dritter Gattung genannt und mit $\Pi(h, k, \varphi)$ bezeichnet hat. Dasselbe gestattet ähnliche Transformationen wie die Integrale erster und zweiter Art, deren Auseinandersetzung aber einen zu grossen Raum in Anspruch nehmen würde.

In den speziellen Fällen $h = -1$ und $h = -k^2$ vereinfacht sich die gefundene Reduktionsformel und dient zur Entwickelung der Integrale:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^{2m}\varphi\,\Delta(\varphi)} \quad \text{und} \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{[\Delta(\varphi)]^{2m+1}};$$

in beiden Fällen wird $\delta_1 = 0$, und die in Rede stehenden Integrale hängen nur von algebraischen Ausdrücken und von elliptischen Integralen erster und zweiter Gattung ab.

III. Die allgemeinste Form solcher Integrale, welche durch elliptische Integrale aller drei Arten ausgedrückt werden können, ist überhaupt die folgende:

$$9)\qquad X = \int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4}}$$

und wir wollen kurz die Schritte andeuten, deren es zur Reduktion dieses Integrales bedarf.

Zunächst lässt sich der Ausdruck $a_0 + a_1 x + \dots + a_4 x^4$ in zwei reelle Faktoren zweiten Grades zerlegen, wodurch X die Form:

$$X = \int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)(\delta + 2\varepsilon x + \zeta x^2)}}$$

annimmt. Setzt man weiter, wenn p und q vor der Hand noch unbestimmte Coefficienten bedeuten:

$$x = \frac{p+qy}{1+y}, \quad dx = \frac{(q-p)\,dy}{(1+y)^2},$$

so ergiebt sich eine Transformation von der Form:

$$X = (q-p)\int \frac{f_1(y)\,dy}{\sqrt{(\alpha_1 + 2\beta_1 y + \gamma_1 y^2)(\delta_1 + 2\varepsilon_1 y + \zeta_1 y^2)}},$$

worin $f_1(y)$ wiederum eine rationale algebraische Funktion von y bezeichnet, und die neuen Coefficienten α_1, β_1, γ_1, δ_1, ε_1, ζ_1, aus den früheren Coefficienten α, β, γ, δ, ε, ζ, sowie aus p und q zusammengesetzt sind. Wählt man p und q so, dass sie den beiden Gleichungen $\beta_1 = 0$ und $\varepsilon_1 = 0$ genügen, was übrigens immer möglich ist, so enthält das Radikal nur gerade Potenzen von y, und es kommt also nunmehr darauf an, die Integration:

10) $$y = \int \frac{f_1'(y)\, dy}{\sqrt{a + by^2 + cy^4}}$$

auszuführen. Die rationale Funktion $f_1(y)$ steht im Allgemeinen unter der Form:

$$f_1(y) = \frac{B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + B_3 y^3 + \ldots}{C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3 + \ldots}$$
$$= \frac{B_0 + B_2 y^2 + \ldots + (B_1 + B_3 y^2 + \ldots) y}{C_0 + C_2 y^2 + \ldots + (C_1 + C_3 y^2 + \ldots) y},$$

wofür wir kurz schreiben:

$$f_1(y) = \frac{S + Ty}{U + Vy};$$

hier sind S, T, U, V rationale Funktionen von y^2, sogenannte gerade Funktionen. Multiplizirt man Zähler und Nenner des für $f_1(y)$ angegebenen Bruches mit $U - Vy$, so wird:

$$f_1(y) = \frac{US - VTy^2}{U^2 - V^2 y^2} + \frac{UT - VS}{U^2 - V^2 y^2}\, y = M + Ny,$$

wo M und N als abkürzende Bezeichnungen für gerade Funktionen dienen. Das unter Nro. 10) verzeichnete Integral gestaltet sich jetzt folgendermassen:

$$y = \int \frac{M dy}{\sqrt{a + by^2 + cy^4}} + \int \frac{Ny\, dy}{\sqrt{a + by^2 + cy^4}}.$$

Das zweite dieser Integrale ist algebraischer Natur; denn bezeichnen wir N durch $\psi(y^2)$, so wird für $y^2 = z$:

$$\int \frac{Ny\, dy}{\sqrt{a + by^2 + cy^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{\psi(z)\, dz}{\sqrt{a + bz + cz^2}},$$

und hier ist die Integration mittelst der Formeln des Cap. XII. ausführbar; hinsichtlich des noch restirenden ersten Integrales:

11) $$\int \frac{M\, dy}{\sqrt{a + by^2 + cy^4}}$$

bemerken wir Folgendes. Der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck:

$$a + by^2 + cy^4 = (\alpha_1 + \gamma_1 y^2)(\delta_1 + \zeta_1 y^2)$$

lässt sich jederzeit auf eine der folgenden Formen bringen:

$$\begin{array}{ll} r^2(1 + s^2y^2)(1 - t^2x^2), & r^2(1 + s^2y^2)(y^2 - t^2), \\ r^2(1 + s^2y^2)(1 + t^2y^2), & r^2(1 - s^2y^2)(1 - t^2y^2), \\ r^2(s^2y^2 - 1)(t^2y^2 - 1), & r^2(s^2 - y^2)(y^2 - t^2), \end{array}$$

indem man die verschiedenen möglichen Vorzeichen von α_1, γ_1, ζ_1 betrachtet; je nachdem nun der eine oder andere dieser Fä stattfindet; benutze man die Substitutionen:

$$\begin{array}{llll} y = \frac{1}{t}\cos\varphi, & k^2 = \frac{s^2}{s^2 + t^2}, & & \\ y = \frac{t}{\cos\varphi}, & k^2 = \frac{1}{1 + s^2t^2}, & & \\ y = \frac{\tan\varphi}{s}, & k^2 = \frac{s^2 - t^2}{s^2}, & , & s > t \\ y = \frac{\sin\varphi}{s}, & k = \frac{t}{s}, & , & s > t. \\ y = \frac{1}{t\sin\varphi}, & k = \frac{t}{s}, & , & s > t, \\ y^2 = \frac{t^2}{1 - k^2\sin^2\varphi}, & k^2 = \frac{s^2 - t^2}{s^2}, & , & s > t. \end{array}$$

und man erhält:

$$\frac{dy}{\sqrt{a + by^2 + cy^4}} = g\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

wo g ein constanter Faktor und k ein echter Bruch ist. Bei allen diesen Substitutionen tritt an die Stelle von y^2 ein Ausdruck, der im Allgemeinen unter der Form:

$$\frac{\varkappa + \lambda\sin^2\varphi}{\mu + \nu\sin^2\varphi}$$

steht; die Funktion M, welche nur gerade Potenzen von y enthält, verwandelt sich daher in eine rationale Funktion von $\sin^2\varphi$, und das Integral in 11) reduzirt sich, abgesehen von dem constanten Faktor g, auf:

$$\text{12)} \qquad \int\frac{f(\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \int\frac{f(\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Vermöge der Bedeutung von $f(\sin^2\varphi)$ hat man eine Gleichung von der Form:

$$f(\sin^2\varphi) = \frac{G_0 + G_2\sin^2\varphi + G_4\sin^4\varphi + \ldots}{H_0 + H_2\sin^2\varphi + H_4\sin^4\varphi + \ldots};$$

oder

$$f(z) = \frac{G_0 + G_2 z + G_4 z^2 + \dots}{H_0 + H_2 z + H_4 z^2 + \dots},$$

und um ganz allgemein zu sein, wollen wir $f(z)$ als unechtgebrochene Funktion ansehen. Denken wir uns dieselbe in ihren ganzen Theil und in den echtgebrochenen Theil, letzteren aber gleich in Partialbrüche zerlegt, so besteht $f(z)$ aus zwei Reihen; in der ersten Reihe ist jedes Glied von der Form Kz^n, in der zweiten von der Form:

$$\frac{L}{(1+hz)^m},$$

mithin setzt sich $f(\sin^2\varphi)$ aus Gliedern von den Formen:

$$K \sin^{2n}\varphi \quad \text{und} \quad \frac{L}{(1+h\sin^2\varphi)^m}$$

zusammen. Die Bestandtheile des Integrales 12) sind also Integrale von den zwei verschiedenen Gestalten:

$$\int \frac{\sin^{2n}\varphi}{\Delta(\varphi)} d\varphi \quad \text{und} \int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)^m \Delta(\varphi)},$$

und stimmen mit den in I. und II. behandelten Integralen überein; das ursprüngliche durch X bezeichnete Integral reduzirt sich also auf einen algebraischen Theil und auf elliptische Integrale aller drei Gattungen.

Cap. XVIII.

Die mehrfachen bestimmten Integrale.

§. 91.

Die Doppelintegrale und ihre Anwendung zur Cubatur begrenzter Räume.

Wenn eine Funktion zweier Variabelen x, y zuerst in Beziehung auf y bei constant bleibendem x integrirt und das Resultat dieser Integration einer neuen auf x bezüglichen Integration unterworfen wird, so entsteht ein Doppelintegral, welches man auf folgende Weise bezeichnet:

1) $$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy,$$

wobei die Anordnung der beiden Integrationen von der Rechten zur Linken zu lesen ist. Der eigentliche Sinn einer solchen doppelten Integration ergiebt sich augenblicklich, sobald die Definition des einfachen Integrales zweimal nach einander auf den obigen Ausdruck angewendet wird. Setzen wir nämlich $\frac{y_1 - y_0}{n} = \varepsilon$, indem wir unter n eine unendlich wachsende Zahl verstehen, so bedeutet die erste Integration den Grenzwerth von:

$$\varepsilon \{f(x, y_0) + f(x, y_0 + \varepsilon) + f(x, y_0 + 2\varepsilon) + \dots$$
$$\dots + f(x, y_0 + \overline{n-1}\,\varepsilon)\},$$

welcher für den Augenblick $F(x)$ heissen möge; die zweite Integration ist nun der Grenzwerth des Ausdruckes:

$$\delta \{F(x_0) + F(x_0 + \delta) + F(x_0 + 2\delta) + \dots + F(x_0 + \overline{m-1}\,\delta\}$$

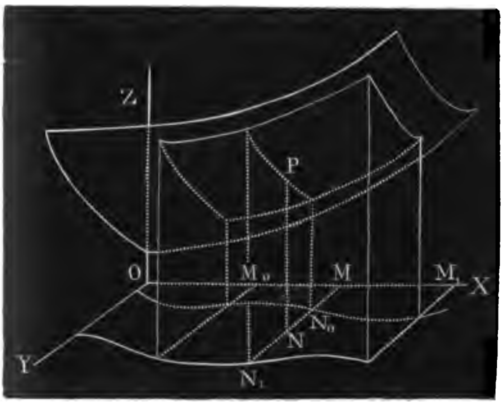
wo $\delta = \frac{x_1 - x_0}{m}$ und m eine unendlich wachsende Zahl ist. Durch Substitution der Bedeutung von $F(x)$ folgt jetzt, dass das genannte Doppelintegral den Grenzwerth der folgenden Doppelsumme bildet:

$$
\begin{aligned}
2)\quad & \delta\,\varepsilon\,[f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0 + \varepsilon) + \ldots\ldots + f(x_0, y_0 + \overline{n-1}\,\varepsilon) \\
& + f(x_0 + \delta, y_0) + f(x_0 + \delta, y_0 + \varepsilon) + \ldots + f(x_0 + \delta, y_0 + \overline{n-1}\,\varepsilon) \\
& + f(x_0 + 2\delta, y_0) + f(x_0 + 2\delta, y_0 + \varepsilon) + \ldots + f(x_0 + 2\delta, y_0 + \overline{n-1}\,\varepsilon) \\
& \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\
& + f(x_0 + \overline{m-1}\,\delta, y_0) + f(x_0 + \overline{m-1}\,\delta, y_0 + \varepsilon) + \ldots \\
& \qquad \ldots + f(x_0 + \overline{m-1}\,\delta, y_0 + \overline{n-1}\,\varepsilon)],
\end{aligned}
$$

in welcher die Variabelen x und y alle Werthepaare erhalten haben, die sich aus den Intervallen $x = x_0$ bis $x = x_1$ und $y = y_0$ bis $y = y_1$ herausgreifen lassen. Zugleich erhellt, dass es, wenn auch umständlich, doch jederzeit möglich wäre, den Werth eines Doppelintegrales direkt mit jeder beliebigen Genauigkeit zu berechnen.

Der soeben erörterten Bedeutung eines Doppelintegrales lässt sich leicht ein geometrischer Sinn unterlegen. In Fig. 50 mögen $OM = x$, $MN = y$ und $NP = z$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes bedeuten, der einer durch die Gleichung $z = f(x, y)$ bestimmten Fläche angehört; es seien ferner in den Entfernungen $OM_0 = x_0$ und $OM_1 = x_1$ zwei Gerade parallel zur Achse der y gezogen, endlich noch in der Coordinatenebene xy zwei beliebige Curven construirt, deren zu x gehörige Coordinaten $MN_0 = y_0$ und $MN_1 = y_1$ vorstellen mögen. Jene Geraden und diese Curven schneiden sich im Allgemeinen und bilden ein theilweise krummlinig begrenztes in der Ebene xy liegendes Viereck, welches als Horizontalprojektion eines entsprechenden auf der krummen Fläche befindlichen Viereckes angesehen werden kann. Zwischen beiden Vierecken und den projizirenden Geraden ist ein

Fig. 50.



körperlicher Raum eingeschlossen, dessen Grösse V heissen möge. Aendern wir x und y um in dx und dy, construiren wir ferner das Rechteck aus dx, dy und lassen von allen Punkten der Peripherie desselben Gerade $\parallel OZ$ bis zur Fläche aufsteigen, so entsteht ein Parallelepiped von der endlichen Höhe z und der unendlich kleinen Grundfläche $dx\,dy$; das Volumen desselben ist $z\,dx\,dy = f(x,y)dx\,dy$. Das gesuchte Volumen V bildet die Summe einer unendlichen Menge solcher unendlich dünner Parallelepipede, und man hat daher:

$$V = \int\int f(x,y)\,dx\,dy,$$

wobei sich die Anwendung doppelter Summenzeichen durch den Umstand rechtfertigt, dass die Summe aller Parallelepipede nur dann vollständig zu erhalten ist, wenn letztere nach den beiden Richtungen der y und der x zusammengezählt werden. Vereinigen wir zuerst die zu einem und demselben x aber zu den verschiedenen y von $y = y_0$ bis $y = y_1$ gehörenden Parallelepipede, so bedeutet der Ausdruck

$$\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dx\,dy = dx\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy$$

eine Schicht, welche der Coordinatenebene yz parallel steht und die Dicke dx besitzt. Vereinigen wir noch alle solche Schichten von $x = x_0$ bis $x = x_1$, so erhalten wir das ganze Volumen, nämlich:

3) $$V = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy.$$

Zu demselben Resultate gelangt man auch, wenn man von dem Satze ausgeht, dass

4) $$V = \int_{x_0}^{x_1} Q_x\,dx$$

ist, wo Q_x die Fläche des durch $N_0 N_1$ parallel zur yz Ebene gelegten Querschnittes von V bezeichnet; Q_x bestimmt sich nämlich mittelst der Formel:

$$Q_x = \int_{y_0}^{y_1} z\,dy;$$

indem man y als Abscisse, z als Ordinate und x dabei als constant ansieht; durch Substitution in Nro. 4) wird nun:

$$V = \int_{x_1}^{x_0} \left\{ \int_{y_0}^{y_1} z\, dy \right\} dx = \int_{x^0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} z\, dy,$$

was mit dem Früheren einerlei ist.

Als Beispiel einer solchen Cubatur mittelst eines Doppelintegrales diene Folgendes; die oberhalb begrenzende Fläche sei ein elliptisches Paraboloid (Fig. 51) also:

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q},$$

die Basis des Volumens ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $OA = a$, $OB = b$, so sind die Integrationsgrenzen:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = a, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = b\left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

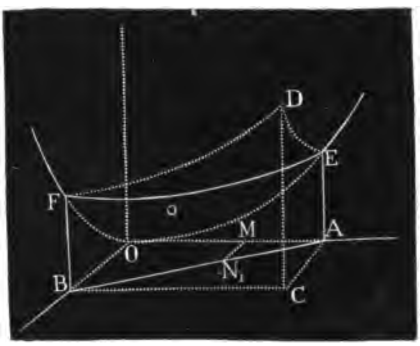
mithin:

$$V = \int_0^a dx \int_0^{b\left(1 - \frac{x}{a}\right)} \left\{ \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \right\} dy,$$

$$= \int_0^a dx \left\{ \frac{b}{2p} x^2 \left(1 - \frac{x}{a}\right) + \frac{b^3}{6q}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^3 \right\},$$

$$= \tfrac{1}{12}\, ab \left(\frac{a^2}{2p} + \frac{b^2}{2q}\right).$$

Fig. 51.



Denkt man sich den Punkt D der Fläche aufgesucht, dessen Coordinaten $OA = a$, $AC = b$ und $CD = c$ sind, so sagt die vorige Gleichung, dass V der zwölfte Theil des aus den Kanten a, b, c construirten Parallelepipedes ist.

§. 92.

Die Umkehrung der Integrationsordnung.

In dem Vorigen befolgten wir bei der Summirung der unendlich dünnen Parallelepipede, d. h. bei der Integration von $f(x, y)\,dx\,dy$ immer die Reihenfolge, dass sich die erste Summirung auf y bei constantem x bezog und nachher die zweite Summirung an die Reihe kam; es wäre aber denkbar, dass sich unter Umständen diese Anordnung umkehren liesse. In der That ist dies der Fall, wenn die auf y bezüglichen Integrationsgrenzen y_0 und y_1 constant sind, und ausserdem die Funktion $f(x, y)$ innerhalb der beiden Integrationsintervalle endlich und stetig bleibt. Ein Integral nämlich von der Form:

$$1)\qquad V = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{\beta_0}^{\beta_1} f(x, y)\,dx\,dy$$

würde geometrisch ein Volumen bedeuten, dessen Basis ein Rechteck ist, entstanden aus dem Durchschnitt von vier Geraden, deren zwei in den Entfernungen α_0 und α_1 parallel zur Achse der y, und von denen zwei andere in den Entfernungen β_0 und β_1 parallel zur x Achse gezogen sind; zugleich giebt die Anordnung der Integrationen in Nro. 1) zu erkennen, dass zuerst Schichten parallel zur yz Ebene gebildet worden sind, aus deren Vereinigung nachher das Volumen entstand. Summirt man aber die Elementarparallelepipede $f(x, y)\,dx\,dy$ zuerst in der Richtung der x, so erhält man eine Schicht:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, y)\,dy\,dx = dy \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, y)\,dx$$

parallel zur yx Ebene und von der Dicke dy; die Vereinigung aller solchen Schichten von $y = \beta_0$ bis $y = \beta_1$ liefert, wie die unmittelbare Anschauung lehrt, dasselbe Volumen, und man hat daher:

$$2)\qquad \int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{\beta_0}^{\beta_1} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{\beta_0}^{\beta_1}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, y)\,dy\,dx.$$

Man überzeugt sich hiervon auch analytisch leicht; aus der Gleichung:

$$\frac{d\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} F(x,y)\,dx}{dy} = \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dx,$$

folgt nämlich durch Integration:

$$\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} F(x,y)\,dx = \int dy \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dx + Const.,$$

und durch Einführung der Grenzen $y = \beta_1$, $y = \beta_0$:

$$\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} F(x,\beta_1)\,dx - \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} F(x,\beta_0)\,dx = \int\limits_{\beta_0}^{\beta_1} dy \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dx,$$

d. i.:

$$\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} dx \Big\{ F(x,\beta_1) - F(x,\beta_0) \Big\} = \int\limits_{\beta_0}^{\beta_1} dy \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

Bezeichnen wir weiter den in Beziehung auf y partiell genommenen Differenzialquotienten von $F(x,y)$ mit $f(x,y)$, so finden die Gleichungen statt:

$$4)\qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = f(x,y)\ ; \qquad F(x,y) = \int f(x,y)\,dy + C,$$

und zwar ist in der zweiten Gleichung x als constant zu betrachten, weil die Differenziation sich nur auf y bezog, also auch die Integration nur y betreffen kann; es folgt jetzt:

$$5)\qquad F(x,\beta_1) - F(x,\beta_0) = \int\limits_{\beta_0}^{\beta_1} f(x,y)\,dy,$$

ferner durch Substitution in die Gleichung 3):

$$6)\qquad \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} dx \int\limits_{\beta_0}^{\beta_1} f(x,y)\,dy = \int\limits_{\beta_0}^{\beta_1} dy \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,y)\,dx,$$

und es stimmt dieses Resultat mit der Formel 2) überein; hierbei ist jedoch nicht zu übersehen, dass in der gegebenen analytischen Ableitung das bestimmte Integral als Differenz zweier Spezialwerthe des unbestimmten Integrales betrachtet wurde, was bekanntlich nicht immer gilt; daher kann man auch von den Gleichungen 4) nicht unter allen Umständen zu der Gleichung 5) übergehen und namentlich würde der Fall eine Ausnahme begründen, wo $f(x,y)$ innerhalb des Integrationsintervalles $y = \beta_0$ bis $y = \beta_1$ eine Unterbrechung der Continuität erleidet. Man hat dann auf die Modifikation Rücksicht zu nehmen, welche bereits in §. 70 erwähnt wurde, wie wir nachher an einem Beispiele zeigen wollen.

Die Formeln 2) oder 6) bieten ein Mittel, um zwei Integrationen, die, in der einen Reihenfolge ausgeführt, umständliche Ausdrücke ergeben würden, in einer anderen Form darzustellen, unter welcher oft beide Integrationen sehr leicht bewerkstelligt werden können. So z. B. würde die Integration:

$$V = \int_0^\infty dx \int_1^\beta e^{-xy}\, ly\, dy$$

in der vorstehenden Ordnung auf einen Integrallogarithmus führen; umgekehrt ist dagegen:

$$V = \int_1^\beta dy \int_0^\infty e^{-xy}\, ly\, dx = \int_1^\beta ly\, dy \int_0^\infty e^{-xy}\, dx$$

$$= \int_1^\beta ly\, dy\, \frac{1}{y} = \tfrac{1}{2}(l\beta)^2.$$

Nicht selten trifft es sich, dass bei der ersten Anordnung des Doppelintegrales nur eine Integration, bei der zweiten Anordnung aber jede Integration ausführbar ist; man gelangt dann zu einer Gleichung, welche den Werth eines einfachen bestimmten Integrales kennen lehrt. So z. B. ist einerseits:

$$V = \int_0^\infty dx \int_0^\infty 2y \cos 2bx\, e^{-(a^2+x^2)y^2}\, dy,$$

$$= \int_0^\infty \cos 2bx\, dx \int_0^\infty e^{-(a^2+x^2)y^2} 2y\, dy,$$

$$= \int_0^\infty \cos 2bx\, dx\, \frac{1}{a^2+x^2},$$

wie man sogleich findet, wenn y^2 einer neuen Variabelen gleichgesetzt wird; andererseits hat man:

$$V=\int_0^\infty dy\int_0^\infty 2y\cos 2bx\, e^{-(a^2+x^2)y^2}\,dx,$$

$$=\int_0^\infty e^{-a^2y^2}\,2y\,dy\int_0^\infty e^{-y^2x^2}\cos 2bx\,dx,$$

d. i. wenn man von der Formel 19) in §. 84 Gebrauch macht:

$$V=\int_0^\infty e^{-a^2y^2}\,2y\,dy\,\frac{\sqrt{\pi}}{2y}\,e^{-\left(\frac{b}{y}\right)^2},$$

$$=\sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-\left[a^2y^2+\left(\frac{b}{y}\right)^2\right]}dy,$$

hier lässt sich der in §. 71 bewiesene allgemeine Satz:

$$\int_0^\infty \varphi\left(a^2y^2+\frac{b^2}{y^2}\right)dy=\frac{1}{a}\int_0^\infty \varphi(2ab+t^2)\,dt,$$

in Anwendung bringen und man erhält dadurch:

$$V=\frac{\sqrt{\pi}}{a}\int_0^\infty e^{-(2ab+t^2)}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-2ab}\,\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Aus der Vergleichung der beiden für V gefundenen Werthe ergiebt sich:

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2bx}{a^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2a}e^{-2ab},$$

oder wenn b für $2b$ gesetzt wird:

7) $$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2a}e^{-ab}.$$

Aus diesem interessanten Resultate folgt durch Differenziation in Beziehung auf b:

8) $$\int_0^\infty \frac{x\sin bx}{a^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-ab},$$

und zwar wird man sich leicht überzeugen, dass die Differenziation nur dieses eine Mal, aber nicht weiter erlaubt ist. Dagegen könnte man beliebig viele Male in Beziehung auf a differenziren.

Um endlich einen Fall zu betrachten, in welchem die Umkehrung der Integrationsordnung nicht ohne Weiteres erlaubt ist, sei:

9) $$V = \int_{-\alpha}^{\alpha} dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

das gegebene Integral. In der vorgeschriebenen Ordnung ausgeführt, geben die Integrationen:

10) $$V = \int_{-\alpha}^{\alpha} dx \, \frac{1}{x^2 + 1} = 2 \, Arctan \, \alpha,$$

wobei von der Formel:

$$\int \frac{k^2 - z^2}{(k^2 + z^2)^2} dz = \frac{z}{k^2 + z^2} + Const.$$

Gebrauch gemacht worden ist. Die Umkehrung der Integrationsordnung liefert dagegen das Resultat:

$$V = -\int_0^1 dy \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} dx = -\int_0^1 dy \frac{2\alpha}{y^2 + \alpha^2}$$

$$= -2 \, Arctan \, \frac{1}{\alpha} = -2 \left(\tfrac{1}{2}\pi - Arctan \, \alpha\right),$$

welches von dem vorigen um π verschieden ist. Der Grund dieser Differenz liegt darin, dass die für $x = 0$ und $y = 0$ eintretende Discontinuität des Ausdruckes

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

übersehen wurde, welche Discontinuität sogleich erhellt, wenn man erst $y = 0$, $x = \delta$ und nachträglich $\delta = 0$ setzt. Betrachten wir überhaupt das Integral:

11) $$V = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} dx \int_{\beta_0}^{\beta_1} f(x, y) \, dy$$

unter der Voraussetzung, dass die Funktion $f(x, y)$ innerhalb der Integrationsintervalle für $x = \xi$ und $y = \eta$ eine Unterbrechung der Continuität erleide, so darf die Identität der beiden Ausdrücke:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} dx \int_{\beta_0}^{\beta_1} f(x, y) \, dy \quad \text{und} \quad \int_{\beta_0}^{\beta_1} dy \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x, y) \, dx$$

nicht mehr behauptet werden, und es entspringt daraus die Aufgabe, die Differenz derselben zu berechnen. Dies geschieht dadurch, dass man die Gleichung 11) in der Form:

$$V = Lim \left\{ \int_{\alpha_0}^{\xi-\varepsilon} dx \int_{\beta_0}^{\beta_1} f(x,y)\, dy + \int_{\xi+\delta}^{\alpha_1} dx \int_{\beta_0}^{\beta_1} f(x,y)\, dy \right\}$$

darstellt, wobei δ und ε verschwindende Grössen bezeichnen. Da die Discontinuität von $f(x,y)$ nur dann eintritt, wenn $y = \eta$ und zugleich $x = \xi$ wird, so ist in jedem der vorstehenden Doppelintegrale, für sich genommen, $f(x,y)$ stetig, weil im ersten $x < \xi - \varepsilon$, im zweiten $x > \xi + \delta$ bleibt; man darf daher in jedem einzelnen Doppelintegrale die Anordnung der Integrationen umkehren, und diese giebt:

$$V = Lim \left\{ \int_{\beta_0}^{\beta_1} dy \int_{\alpha_0}^{\xi-\varepsilon} f(x,y)\, dx + \int_{\beta_0}^{\beta_1} dy \int_{\xi+\delta}^{\alpha_1} f(x,y)\, dx \right\}.$$

Setzen wir weiter:

12) $$\int f(x,y)\, dx = \varphi(x,y) + Const.$$

und beachten, dass $f(x,y)$, als Funktion von x betrachtet, continuirlich bleibt innerhalb der Grenzen $x = \alpha_0$ bis $x = \xi - \varepsilon$ und $x = \xi + \delta$ bis $x = \alpha_1$, so ist:

$$V = Lim \left\{ \int_{\beta_0}^{\beta_1} dy [\varphi(\xi-\varepsilon,y) - \varphi(\alpha_0,y)] + \int_{\beta_0}^{\beta_1} dy [\varphi(\alpha_1,y) - \varphi(\xi+\delta,y)] \right\},$$

$$= Lim \left\{ \int_{\beta_0}^{\beta_1} [\varphi(\alpha_1,y) - \varphi(\alpha_0,y)]\, dy - \int_{\beta_0}^{\beta_1} [\varphi(\xi+\delta,y) - \varphi(\xi-\varepsilon,y)]\, dy \right\},$$

hier bedeutet das erste Integral soviel wie:

$$\int_{\beta_0}^{\beta_1} dy \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,y)\, dx,$$

wenn man sich die Integrationen in der Ordnung x, y ohne Weiteres ausgeführt denkt; setzt man dies ein und restituirt den ursprünglichen Werth von V, so folgt jetzt:

13) $$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} dx \int_{\beta_0}^{\beta_1} f(x,y)\, dy - \int_{\beta_0}^{\beta_1} dy \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x,y)\, dx,$$

$$= - Lim \int_{\beta_0}^{\beta_1} \{ \varphi(\xi+\delta,y) - \varphi(\xi-\varepsilon,y) \}\, dy,$$

und damit ist die Differenz zwischen den beiden Werthen bestimmt, welche das Doppelintegral bei verschiedenen Anordnungen der Integration annimmt. — Erleidet $f(x,y)$ innerhalb der Integrationsintervalle mehrere Unterbrechungen der Continuität, so würde man das obige Verfahren leicht dahin modifiziren, dass man V, statt in zwei, in mehrere Integrale zerlegt, in welchen $f(x,y)$ jedesmal stetig bleibt.

§. 93.

Die Fourier'schen Doppelintegrale.

So lange die Constante h positiv und von Null verschieden ist, gilt bekanntlich die Gleichung:

$$1)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin h\omega}{\omega}\,d\omega = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \text{(S. Nro. 3, §. 74.)}$$

für $h = 0$ dagegen würde der Werth des Integrales $= 0$ und für negative h würde er $-\frac{1}{2}\pi$ sein. Betrachten wir das allgemeinere Integral:

$$S = \int_0^\infty \frac{\sin m\omega \cos n\omega}{\omega}\,d\omega,$$

so sind, behufs der Anwendung der Formel 1), die Fälle $m > n$, $m = n$, $m < n$ zu unterscheiden; im ersten Falle ersetzen wir $\sin m\omega \cos n\omega$ durch $\frac{1}{2}\sin(m+n)\omega + \frac{1}{2}\sin(m-n)\omega$ und erhalten durch Integration der einzelnen Theile $S = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$. Im zweiten Falle wird $\sin m\omega \cos n\omega = \frac{1}{2}\sin 2\omega$, folglich $S = \frac{1}{4}\pi$; im dritten Falle ist $\sin m\omega \cos n\omega = \frac{1}{2}\sin(n+m)\omega - \frac{1}{2}\sin(n-m)\omega$, mithin $S = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi = 0$, und demnach lautet das Gesammtresultat:

$$2)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin m\omega \cos n\omega}{\omega}\,d\omega = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{für } m > n, \\ \frac{1}{4}\pi & \text{,, } m = n, \\ 0 & \text{,, } m < n. \end{cases}$$

Man kann dieses wiederum benutzen, um den Werth des Doppelinte-

$$3)\qquad U = \int^\infty d\omega \int_a^b \frac{\cos s\omega}{\omega} F(\vartheta) \sin \omega\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \int_0^\infty \frac{\cos s\omega}{\omega}\,d\omega \int_a^b F(\vartheta) \sin \omega\vartheta\, d\vartheta$$

zu ermitteln, in welchem $F(\vartheta)$ eine von $\vartheta = a$ bis $\vartheta = b$ continuirlich bleibende Funktion, s eine willkürliche jedoch positive Constante bezeichnen möge. Da unter diesen Voraussetzungen der Ausdruck

$$\frac{\cos s\omega \sin \omega\vartheta}{\omega} F(\vartheta)$$

innerhalb der Integrationsgrenzen keine Unterbrechung der Continuität erleidet, so ist die Umkehrung der Integrationenfolge erlaubt und giebt

$$U = \int_a^b d\vartheta \int_0^\infty \frac{\cos s\omega}{\omega} F(\vartheta) \sin \omega\vartheta\, d\omega,$$

$$= \int_a^b F(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^\infty \frac{\sin \vartheta\omega \cos s\omega}{\omega} d\omega.$$

Um hier die Ergebnisse von Nro. 9) anwenden zu können, bedarf es der Unterscheidung der drei Fälle $s > b$, $b > s > a$, $a > s > 0$. Im ersten Falle ist um so mehr $s > \vartheta$, weil vermöge der für ϑ geltenden Integrationsgrenzen $b > \vartheta$ sein muss; für $\vartheta < s$ verschwindet aber das auf ω bezügliche Integral und daher wird

$$U = 0\,, \qquad \text{wenn } s > b.$$

Im zweiten Falle kann das mit U bezeichnete Integral auf folgende Weise zerlegt werden:

$$U = \int_a^s F(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^\infty \frac{\sin \vartheta\omega \cos s\omega}{\omega} d\omega$$

$$+ \int_s^b F(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^\infty \frac{\sin \vartheta\omega \cos s\omega}{\omega} d\omega,$$

und dann ist im ersten Integrale $s > \vartheta > a$ oder $\vartheta < s$, mithin der Werth des auf ω bezüglichen Integrales der Null gleich; im zweiten Theile dagegen ist $b > \vartheta > s$, also:

$$U = \int_s^b F(\vartheta)\, d\vartheta \,.\, \tfrac{1}{2}\pi.$$

Im dritten Falle $a > s$ hat man um so mehr $\vartheta > s$, folglich

$$U = \int_a^b F(\vartheta)\,d\vartheta \,.\, \tfrac{1}{2}\pi.$$

Alles zusammen giebt dies folgenden Satz: jenachdem $s > b$, $b > s > a$, $a > s > 0$ ist, hat das Integral:

$$4)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos s\omega}{\omega}\,d\omega \int_a^b F(\vartheta)\sin\omega\vartheta\,d\vartheta$$

die Werthe:

$$5)\qquad 0\,,\qquad \tfrac{1}{2}\pi \int_a^s F(\vartheta)\,d\vartheta\,,\qquad \tfrac{1}{2}\pi \int_a^b F(\vartheta)\,d\vartheta.$$

Nennen wir $f(\vartheta)$ das unbestimmte Integral von $F(\vartheta)\,d\vartheta$, so dass also $F(\vartheta) = f'(\vartheta)$ ist, so giebt die theilweise Integration:

$$\int F(\vartheta)\sin\omega\vartheta\;d\vartheta = \int f'(\vartheta)\sin\omega\vartheta\;d\vartheta$$
$$= f(\vartheta)\sin\omega\vartheta - \omega\int f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\;d\vartheta,$$

und daraus folgt durch Einführung der Grenzen $\vartheta = b$, $\vartheta = a$:

$$\int_a^b F(\vartheta)\sin\omega\vartheta\;d\vartheta$$
$$= f(b)\sin b\omega - f(a)\sin a\omega - \omega\int_a^b f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\;d\vartheta.$$

Das oben an die Ausdrücke in 4) und 5) geknüpfte Theorem lautet dann:

$$f(b)\int_0^\infty \frac{\sin b\omega\cos s\omega}{\omega}\,d\omega - f(a)\int_0^\infty \frac{\sin a\omega\cos s\omega}{\omega}\,d\omega$$
$$-\int_0^\infty \cos s\omega\,d\omega\int_a^b f(\vartheta)\cos\omega\vartheta\,d\vartheta,$$
$$= 0\,,\qquad \tfrac{1}{2}\pi\{f(s)-f(a)\}\,,\qquad \tfrac{1}{2}\pi\{f(b)-f(a)\},$$
$$s > b\,,\qquad b > s > a\,,\qquad a > s > 0.$$

Die Werthe der mit $f(b)$ und $f(a)$ multiplizirten Integrale lassen sich wiederum mittelst der Formel 2) bestimmen, indem man auf die Unterscheidung der bemerkten drei Fälle eingeht; man gelangt hierdurch auf der Stelle zu dem folgenden merkwürdigen Satze:

„Der Werth des bestimmten Doppelintegrales:

$$\int_0^\infty \cos s\omega\, d\omega \int_a^b f(\vartheta) \cos \omega\vartheta\, d\vartheta$$

ist $\frac{1}{2}\pi f(s)$ oder Null, jenachdem die positive willkürliche Constante s innerhalb oder ausserhalb des Intervalles a bis b liegt."

Geht man von dem analog zu U gebildeten Integrale:

$$V = \int_0^\infty d\omega \int_a^b \frac{\sin s\omega}{\omega} F(\vartheta) \cos \omega\vartheta\, d\vartheta,$$

aus, so sind die vorigen Zerlegungen und Substitutionen fast wörtlich wiederum anwendbar und führen zu dem Correlate des vorigen Satzes; es lautet:

„Der Werth des bestimmten Doppelintegrales:

$$\int_0^\infty \sin s\omega\, d\omega \int_a^b f(\vartheta) \sin \omega\vartheta\, d\vartheta$$

ist $\frac{1}{2}\pi f(s)$ oder Null, jenachdem s innerhalb oder ausserhalb des Intervalles a bis b liegt."

Den grössten Spielraum erhält s für $a = 0$ und $b = \infty$; die Fälle $s > b$ und $a > s > 0$ können dann nicht vorkommen und man hat:

$$\left.\begin{aligned} &6) \quad \tfrac{1}{2}\pi f(s) = \int_0^\infty \cos s\omega\, d\omega \int_0^\infty f(\vartheta) \cos \omega\vartheta\, d\vartheta \\ &7) \quad \tfrac{1}{2}\pi f(s) = \int_0^\infty \sin s\omega\, d\omega \int_0^\infty f(\vartheta) \sin \omega\vartheta\, d\vartheta \end{aligned}\right\} \infty > s > 0,$$

wobei man sich leicht davon überzeugen kann, dass die erste Gleichung auch noch für $s = 0$ richtig bleibt, während dies bei der zweiten Gleichung im Allgemeinen nicht, sondern nur dann stattfindet, wenn zufällig $f(0) = 0$ ist. Für negative s gilt keine der obigen Formeln mehr; besässe aber $f(s)$ zufälligerweise die Eigenschaft $f(-s) = f(s)$, so würden die Cosinusformeln ihre Richtigkeit auch bei negativen s behalten, ebenso die Sinusformeln in dem analogen Falle, wenn $f(-s) = -f(s)$ wäre.

Als Beispiel für die Formeln 6) und 7) diene die Annahme $f(\vartheta) = e^{-k\vartheta}$; sie giebt die Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}\pi\, e^{-ks} = \int_0^\infty \cos s\,\omega\, d\,\omega \frac{k}{k^2+\omega^2},$$

$$\tfrac{1}{2}\pi\, e^{-ks} = \int_0^\infty \sin s\,\omega\, d\,\omega \frac{\omega}{k^2+\omega^2},$$

welche mit den in §. 92 vorkommenden Formeln 7) und 8) übereinstimmen.

Die vorhin entwickelten allgemeinen Theoreme lassen noch eine Combination zu, welche in einem auch für negative s gültigen Satze besteht. Setzen wir nämlich $a = 0$, und in der Gleichung:

$$\int_0^\infty \cos s\,\omega\, d\,\omega \int_0^b f(\vartheta) \cos \omega\vartheta\; d\vartheta = \begin{cases} \tfrac{1}{2}\pi f(s) & , \quad b > s > 0, \\ 0 & , \quad s > b, \end{cases}$$

für $f(\vartheta)$ die neue Funktion:

$$f(\vartheta) = \frac{\varphi(\vartheta) + \varphi(-\vartheta)}{2},$$

welche die Eigenschaft $f(-s) = f(s)$ besitzt, so gilt die nunmehrige Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \cos s\,\omega d\,\omega \int_0^b \varphi(\vartheta) \cos \omega\vartheta\; d\vartheta + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \cos s\,\omega\, d\,\omega \int_0^b \varphi(-\vartheta) \cos \omega\vartheta\; d\vartheta$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi\, \frac{\varphi(s) + \varphi(-s)}{2} \qquad \text{für} \quad b > s > -b,$$

$$= \ 0 \qquad \text{für} \quad s > b \text{ und für } -b > s.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$\int_0^b \varphi(-\vartheta) \cos \omega\vartheta\; d\vartheta = \int_{-b}^0 \varphi(\vartheta) \cos \omega\vartheta\; d\vartheta,$$

mithin durch Substitution dieses Ausdruckes:

$$8)\quad \int_0^\infty \cos s\,\omega d\,\omega \int_{-b}^b \varphi(\vartheta) \cos \omega\vartheta\; d\vartheta = \pi\, \frac{\varphi(s) + \varphi(-s)}{2}, \text{ für } b > s > -b$$

$$= 0 \qquad , \text{ für } b < s < -b.$$

Ein ähnliches Theorem ergiebt sich, wenn man, von der Gleichung:

$$\int_0^\infty \sin s\,\omega\,d\,\omega \int_0^b f(\vartheta)\sin\omega\vartheta\,d\,\vartheta = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi f(s) \quad , & b > s > 0, \\ 0 \quad , & s > b, \end{cases}$$

ausgehend, die Substitution:

$$f(\vartheta) = \frac{\varphi(\vartheta) - \varphi(-\vartheta)}{2}$$

vornimmt, wobei $f(s)$ die Eigenschaft $f(-s) = -f(s)$ bekommt. Man findet nämlich nach demselben Verfahren:

$$9) \int_0^\infty \sin s\,\omega\,d\omega \int_{-b}^b \varphi(\vartheta)\sin\omega\vartheta\,d\,\vartheta = \pi\,\frac{\varphi(s) - \varphi(-s)}{2},\; b > s > -b,$$
$$= \quad 0 \quad , \quad b < s < -b.$$

Durch Addition der Gleichungen 8) und 9) folgt jetzt:

$$10) \int_0^\infty d\omega \int_{-b}^b \varphi(\vartheta)\cos\omega(\vartheta - s)\,d\,\vartheta = \pi\,\varphi(s) \quad , \quad b > s > -b,$$
$$= 0 \quad , \quad b < s < -b,$$

und weil das Integral für negative ω dasselbe bleibt wie für positive ω:

$$11) \int_{-\infty}^\infty d\omega \int_{-b}^b \varphi(\vartheta)\cos\omega(\vartheta - s)\,d\,\vartheta = 2\pi\,\varphi(s) \quad , \quad b > s > -b,$$
$$= \quad 0 \quad , \quad b < s < -b.$$

Nimmt man spezieller $b = \infty$, so gilt die Gleichung:

$$12) \qquad \int_{-\infty}^\infty d\,\omega \int_{-\infty}^\infty \varphi(\vartheta)\cos\omega(\vartheta - s)\,d\,\vartheta = 2\pi\,\varphi(s)$$

für alle reellen s. — Es mag übrigens noch bemerkt werden, dass die Gleichung 11) für $\sqrt{-1} = i$ auch in der Form:

$$13) \int_{-\infty}^\infty d\,\omega \int_{-b}^b \varphi(\vartheta)\,e^{\omega(\vartheta - s)\,i}\,d\,\vartheta = 2\pi\,\varphi(s) \quad , \quad b > s > -b,$$
$$= \quad 0 \quad , \quad b < s < -b,$$

dargestellt werden kann, weil der imaginäre Bestandtheil des Integrales verschwindet.

§. 94.

Substitution neuer Variabelen in Doppelintegralen.

I. Wir kehren zur Untersuchung der doppelten Integrale von der allgemeinen Form

$$1)\qquad V=\int_{x_0}^{x_1}dx\int_{y_0}^{y_1}f(x,y)\,dy$$

zurück, um den zweiten Fall zu betrachten, in welchem y_0 und y_1 nicht constant, sondern Funktionen von x sind. Begreiflicherweise ist hier die Umkehrung der Integrationsordnung nicht unmittelbar möglich, was auch geometrisch leicht nachweisbar wäre; sie wird es aber, wenn man dem auf y bezüglichen Integrale constante Grenzen verschafft. Dies geschieht mittelst der Substitution $y = y_0 + (y_1 - y_0)\,t$, wo t die neue Variabele bezeichnet; man erhält hierdurch unmittelbar:

$$2)\quad \int_{x_0}^{x_1}dx\int_{y_0}^{y_1}f(x,y)\,dy=\int_{x_0}^{x_1}(y_1-y_0)\,dx\int_0^1 f[x,y_0+(y_1-y_0)\,t]\,dt,$$

wo nun rechter Hand constante Integrationsgrenzen vorhanden sind. Ein Beispiel hierzu liefert das Integral:

$$V=\int_0^\infty dx\int_0^{\sqrt{1+x^2}}\frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,e^{-(\alpha^2x^2+\beta^2y^2)},$$

das in der vorstehenden Form nicht auf ein einfaches Integral zurückführbar ist, welches dagegen mittelst der Substitution $y=\sqrt{1+x^2}\,t$ in das folgende übergeht:

$$V=\int_0^\infty dx\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\,e^{-(\alpha^2x^2+\beta^2t^2+\beta^2x^2t^2)},$$

woraus durch Umkehrung der Integrationenfolge:

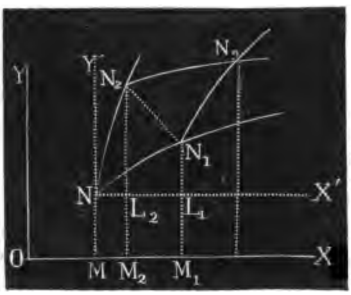
$$V=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\,e^{-\beta^2t^2}\int_0^\infty e^{-(\alpha^2+\beta^2t^2)x^2}\,dx,$$

oder endlich bei Ausführung der auf x bezüglichen Integration:

$$V = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(\alpha^2+\beta^2 t^2)}}\, e^{-\beta^2 t^2}.$$

II. Sowie vorhin eine Variabele (y) allein durch eine neue Veränderliche (t) ersetzt wurde, so kann auch für beide Variabele zugleich eine Substitution vorgenommen werden, indem man etwa $x = \varphi(s, t)$ und $y = \psi(s, t)$ setzt. Was dies heissen soll, wird mit vollkommener Klarheit aus der geometrischen Bedeutung des Doppelintegrales erhellen. Dieser zufolge denken wir uns nämlich die Basis des Volumens V in unendlich kleine Rechtecke zerlegt und V selbst als Summe der über jenen Rechtecken construirten Parallelepipede. Für die Grösse des V bleibt es aber gleichgültig, ob seine Basis in rechteckförmige oder in andersgestaltete Elemente getheilt wird, wenn nur diese Elemente die Basis und die über den Elementen errichteten Parallelepipede das gesuchte Volumen wirklich ausfüllen. Eine solche neue Zerlegung ergiebt sich von selbst, wenn man die Punkte der Coordinatenebene xy nicht mehr durch die rechtwinkligen Coordinaten x und y, sondern durch irgend welche andere Coordinaten s und t bestimmt, wobei wir das Wort Coordinaten in seiner weitesten Bedeutung nehmen. Die Gleichungen $x = \varphi(s, t)$ und $y = \psi(s, t)$ dienen jetzt, um von den früheren zu den neuen Coordinaten überzugehen, und es fragt sich nur noch, welche Zerlegungsart der Basis von V hieraus entspringt. So wie nun das frühere Element ein Viereck war, dessen Ecken durch die Coordinaten x und y, $x + dx$ und y, x und $y + dy$, endlich $x + dx$ und $y + dy$ bestimmt wurden, so können wir auch bei den neuen Coordinaten ein Element bilden, dessen vier Ecken die Coordinaten s und t, $s + ds$ und t, s und $t + dt$, endlich $s + ds$ und $t + dt$ besitzen. Nennen wir N, N_1, N_2, N_3 die soeben bestimmten vier Punkte, Fig. 52, so kann die Berechnung des Flächenelementes in der Weise geschehen, dass wir N, N_1, N_3, N_2 als das Doppelte des Dreieckes $N N_1 N_2$ betrachten und die Fläche des letzteren durch die Coordinaten seiner Ecken ausdrücken. Wir legen nämlich durch N ein rechtwinkliges Coordinatensystem parallel zu dem ursprünglichen, bezeichnen die neuen rechtwinkligen Co-

Fig. 52.



ordinaten von N_1 und N_2 mit $NL_1 = \xi_1$, $L_1 N_1 = \eta_1$, $NL_2 = \xi_2$, $L_2 N_2 = \eta_2$ und benutzen den bekannten Satz der analytischen Geometrie, dass die Fläche des Dreieckes $NN_1 N_2 = \frac{1}{2}(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)$ mithin das Flächenelement

$$NN_1 N_3 N_2 = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1$$

ist. Dabei finden weiter die Gleichungen statt:

$$\xi_1 = x_1 - x, \quad \eta_1 = y_1 - y, \quad \xi_2 = x_2 - x, \quad \eta_2 = y_2 - y,$$

und wenn man beachtet, dass N durch alleinige Aenderung des s in N_1 überging, und dass ebenso die partielle Aenderung des t von N nach N_2 führte, so erhellt unmittelbar die Richtigkeit der Gleichungen:

$$x_1 = x + \frac{\partial x}{\partial s} ds, \quad y_1 = y + \frac{\partial y}{\partial s} ds,$$

$$x_2 = x + \frac{\partial x}{\partial t} dt, \quad y_2 = y + \frac{\partial y}{\partial t} dt,$$

oder:

$$\xi_1 = \frac{\partial x}{\partial s} ds, \quad \eta_1 = \frac{\partial y}{\partial s} ds; \quad \xi_2 = \frac{\partial x}{\partial t} dt, \quad \eta_2 = \frac{\partial y}{\partial t} dt.$$

Die Substitution dieser Werthe giebt für das Flächenelement:

$$NN_1 N_3 N_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right) ds\, dt,$$

und wenn man sich hierin die Werthe von $x = \varphi(s, t)$ und $y = \psi(s,t)$ eingesetzt denkt, so ist jetzt das Flächenelement $NN_1 N_3 N_2$ durch s und t ausgedrückt. Das Produkt $z . NN_1 N_3 N_2$ stellt nun wiederum ein unendlich dünnes Parallelepiped dar und die Summe aller dieser Parallelepipede giebt V. So gelangen wir zu der Transformation:

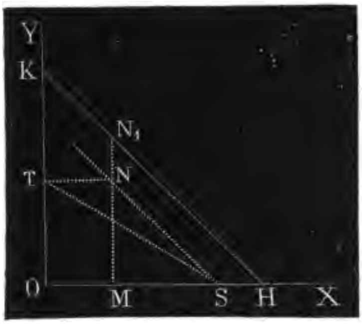
$$3) \qquad \int\int f(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int\int f[\varphi(s,t), \psi(s,t)] \left(\frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right) ds\, dt,$$

wobei wir die neuen für s und t geltenden Integrationsgrenzen deswegen noch nicht hingesetzt haben, weil sie in jedem speziellen Falle besonders zu ermitteln sind. Die folgenden Beispiele werden dies zeigen.

α. Ein sehr einfaches aus einer Geraden und einem Winkel bestehendes Coordinatensystem wäre folgendes, Fig. 53. Durch einen beliebigen Punkt N der xy Ebene lege man eine Gerade NS, welche mit der x Achse einen halben rechten Winkel bildet und bezeichne OS mit s; man ziehe ferner $NT \parallel OX$ und die Gerade TS, welche mit OS den Winkel $OST = w$ bilden möge.

Fig. 53.



Die Lage des Punktes N ist nun bestimmt, sobald s und w gegeben sind, da man entweder die Construktion rückwärts anwenden oder aus s und w die rechtwinkligen Coordinaten $OM = x$ und $MN = y$ ableiten kann; letztere sind

$$x = s - s \tan w,$$
$$y = s \tan w,$$

oder, wenn zur Abkürzung $\tan w = t$ gesetzt und t als neue Variabele angesehen wird:

$$x = s - st, \qquad y = st.$$

Das neue Flächenelement der xy Ebene, welches übrigens ein Trapez darstellt, ist demnach:

$$\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} = s\,ds\,dt,$$

und man hat daher die allgemeine Formel:

$$4)\qquad \int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\int f(s-st, st)\,s\,ds\,dt.$$

Wären $x = 0$ und $x = OH = h$, sowie $y = 0$ und $y = MN_1 = h - x$ die ursprünglichen Integrationsgrenzen für x und y, so würde der Punkt N alle innerhalb des gleichseitig rechtwinkligen Dreieckes HOK liegenden Stellen zu betreten haben; dasselbe geschieht, wenn s von 0 bis h und w von 0 bis $\frac{1}{4}\pi$ oder t von 0 bis 1 ausgedehnt wird; die Formel 4) geht dann in die speziellere über:

$$5)\qquad \int_0^h\int_0^{h-x} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^h\int_0^1 f(s-st, st)\,s\,ds\,dt,$$

und es ist hiermit die Umwandlung des ursprünglichen Integrales in ein anderes mit constanten Grenzen erreicht. Nehmen wir z. B.

$$f(x,y) = x^{l-1}y^{m-1}\varphi(x+y),$$

so giebt die Formel 5):

$$\int_0^h\int_0^h x^{l-1}y^{m-1}\varphi(x+y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^h\int_0^1 s^{l+m-1}\varphi(s)(1-t)^{l-1}t^{m-1}\,ds\,dt$$

$$=\int_0^h s^{l+m-1}\varphi(s)\,ds\int_0^1(1-t)^{l-1}t^{m-1}\,dt,$$

die auf t bezügliche Integration ist sogleich ausführbar und man gelangt zu dem eleganten Resultate:

$$6)\quad \int_0^h\int_0^{h-x} x^{l-1}y^{m-1}\varphi(x+y)\,dx\,dy=\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}\int_0^h s^{l+m-1}\varphi(s)ds.$$

Auf das linker Hand vorkommende Integral lässt sich noch das etwas allgemeinere Integral:

$$S=\int_0^a\int_0^{b\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)\right]} x^{l-1}y^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)dx\,dy$$

zurückführen, worin sich die Integrationen auf alle positiven x und y beziehen, welche der Bedingung $1\geqq\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\geqq 0$ genügen. Für $x=a\xi$ und $y=b\eta$ erhält man nämlich:

$$S=a^l b^m\int_0^1\int_0^{1-\xi}\xi^{l-1}\eta^{m-1}\varphi(\xi+\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

wo die Gleichung 6) anwendbar ist; es wird so:

$$7)\quad \int_0^a\int_0^{b\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)\right]} x^{l-1}y^{m-1}\varphi\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)dx\,dy$$

$$=a^l b^m\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}\int_0^1 s^{l+m-1}\varphi(s)\,ds.$$

β. Sehr häufig geht man von den ursprünglichen rechtwinkligen Coordinaten x und y zu Polarcoordinaten s und t über, indem man $x=s\cos t$, $y=s\sin t$ setzt, wo s den Radiusvector und t den

Winkel zwischen diesem und der x Achse bezeichnet. Für diesen Fall findet sich:

$$\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} = s\,ds\,dt,$$

Fig. 54.

was auch geometrisch aus der in Fig. 54 angegebenen Form des neuen Flächenelementes leicht nachweisbar wäre, und es ist folglich:

$$8)\qquad \int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\int f(s\cos t,\, s\sin t)\,s\,ds\,dt.$$

Besonderen Vortheil gewährt die Formel, wenn die Grenzen für x und y folgende sind:

$$x = 0,\quad x = r,\qquad y = 0,\quad y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

womit dem Punkte xy die Fläche eines mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreisquadranten als Spielraum angewiesen ist. Dieser Spielraum bleibt derselbe, wenn s von 0 bis r und t von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ ausgedehnt wird, und es ist daher:

$$9)\qquad \int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^r\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(s\cos t, s\sin t)\,s\,ds\,dt.$$

Handelt es sich um das etwas allgemeinere Integral:

$$V = \int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} F(x,y)\,dx\,dy,$$

worin sich die Integrationen auf alle positiven x und y beziehen, welche der Bedingung $1 \geqq \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \geqq 0$ genügen, so setze man zuerst $x = a\xi$, $y = b\eta$, wodurch:

$$V = ab\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} F(a\xi, b\eta)\,d\xi\,d\eta$$

wird, und wende nun die Formel 9) an; dies giebt:

$$10)\qquad \int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} F(x,y)\,dx\,dy = ab\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}\pi} F(as\cos t, bs\sin t)\,s\,ds\,dt.$$

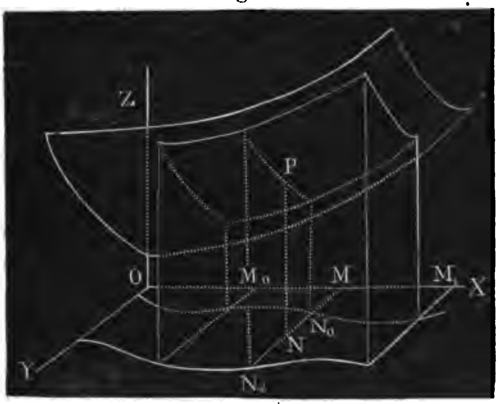
Ein Beispiel von dem vortheilhaften Gebrauche dieser Transformation giebt der nächste Paragraph.

§. 95.

Die Complanation der Flächen.

Die Gleichung einer auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Fläche sei wie früher $z = f(x, y)$ und die Aufgabe gestellt, die Grösse eines bestimmten Stückes der Fläche zu ermitteln. Dieses Stück bestimmen wir durch seine Projektion auf die Coordinatenebene xy, und zwar begrenzen wir jene Projektion durch zwei Gerade, die in den Entfernungen $OM_0 = x_0$, $OM_1 = x_1$ parallel zur y Achse gelegt sind (Fig. 55) und durch zwei Curven, in denen der Abscisse x die Coordinaten y_0 und y_1 entsprechen mögen. Lassen

Fig. 55.



wir x um dx, y um dy wachsen und bilden das Rechteck $dx\,dy$, so kann dieses als Horizontalprojektion eines unendlich kleinen Flächenstückes ω gelten; letzteres ist ein krummlinig begrenztes Viereck, dessen Ecken nicht in einer Ebene liegen. Wegen der unendlichen Abnahme des ω kann aber dieses Flächenelement als zusammenfallend angesehen werden mit der durch den Punkt xyz gelegten Tangentialebene der Fläche, und zwar beträgt der dabei begangene Fehler nur unendliche kleine Grössen höherer Ordnungen. Nennen wir für den Augenblick N den Neigungswinkel der Tangentialebene (oder der Ebene des ω) gegen die xy Ebene, so haben wir:

$$\omega . \cos N = dx\ dy \quad \text{oder} \quad \omega = \frac{dx\ dy}{\cos N}.$$

Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist aber einerlei mit dem Winkel, den die Senkrechten auf jenen Ebenen einschliessen, in unserem Falle ist daher N der Winkel, welchen die im Punkte xyz errichtete

Normale der Fläche mit der Achse der z bildet, also mit Beziehung auf die Formeln 10) des §. 22 (S. 89):

$$\cos N = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Das Flächenelement ω wird daher durch den Ausdruck:

$$dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

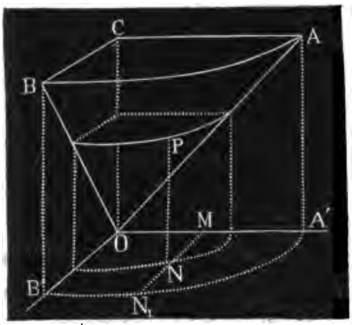
dargestellt und die Summe aller dieser Flächenelemente giebt die ganze Fläche, deren Grösse S heissen möge. Bilden wir zunächst die Summe aller von $y = y_0$ bis $y = y_1$ liegenden Elemente, indem wir x constant lassen, so bedeutet das Integral

$$\int_{y_0}^{y_1} dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

geometrisch einen bandförmigen Streifen der Fläche, dessen Horizontalprojektion das Rechteck aus den Seiten dx und $N_0N_1 = y_1 - y_0$ ist; die Summe aller derartigen von $x = x_0$ bis $x = x_1$ liegenden Streifen giebt nun die ganze Fläche:

$$1)\qquad S = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Fig. 56.



Beispiele für diese Complanationsformel sind folgende.

α. Der elliptische Kegel. In Fig. 56 sei $OC = c$ die Höhe eines elliptischen Kegels, ACB seine elliptische Basis mit den Halbachsen $AC = a$, $BC = b$; die Coordinatenebene xy möge parallel zur Ebene ACB durch die Spitze O gehen. Die Gleichung des Kegels ist dann:

$$z = c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

mithin

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\frac{a^2+c^2}{a^2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{b^2+c^2}{b^2}\left(\frac{y}{b}\right)^2}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

wobei, um abzukürzen, die Bezeichnungen:

$$2)\qquad \alpha = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{b}$$

eintreten mögen. Die Horizontalprojektion des Mantels $AOBA$ ist die Ellipse $A'OB'$ mit den Halbachsen a und b, folglich $x_0 = 0$, $x_1 = a$, $y_0 = 0$, $y_1 = b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ und:

$$S = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx\, dy \sqrt{\frac{\alpha^2\left(\frac{x}{a}\right)^2+\beta^2\left(\frac{y}{b}\right)^2}{\left(\frac{x}{a}\right)+\left(\frac{y}{b}\right)^2}}.$$

Durch Anwendung der Formel 10) des vorigen Paragraphen gestaltet sich dieses Integral wie folgt:

$$S = ab\int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} s\, ds\, dt \sqrt{\alpha^2 \cos^2 t + \beta^2 \sin^2 t},$$

wo man wegen der constanten Grenzen die Anordnung der Integrationen umkehren und die auf s bezügliche Integration sogleich ausführen kann; dies giebt:

$$3)\qquad S = \tfrac{1}{2}ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dt \sqrt{\alpha^2 \cos^2 t + \beta^2 \sin^2 t}.$$

Das Integral erhält eine geometrische Bedeutung, wenn man, die ganze Mantelfläche mit M bezeichnend, folgendermassen schreibt:

$$M = \tfrac{1}{2}\sqrt{ab}\,.\,4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dt \sqrt{\alpha^2 ab \cos^2 t + \beta^2 ab \sin^2 t};$$

es liegt nämlich darin der Satz, dass der Kegelmantel gleich dem Mantel eines Cylinders ist, dessen Höhe $\frac{1}{2}\sqrt{ab}$ beträgt und dessen Basis eine aus den Halbachsen $a_1 = \alpha\sqrt{ab}$ und $b_1 = \beta\sqrt{ab}$ construirte Ellipse ist. — Will man auf elliptische Funktionen zurückgehen, so beachte man, dass aus $a > b$ folgt $\alpha < \beta$, die Formel 3) giebt dann:

$$S = \tfrac{1}{2} ab\, \beta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} dt \sqrt{1 - \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2} \cos^2 t}$$

$$= \tfrac{1}{2} ab\, \beta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \sqrt{1 - \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2} \sin^2 \varphi},$$

wo von der Substitution $t = \frac{1}{2}\pi - \varphi$ Gebrauch gemacht wurde. Setzt man endlich noch für α und β ihre Werthe, so ist:

4) $$S = \tfrac{1}{2} a \sqrt{b^2 + c^2}\, E^1 \left(\frac{c \sqrt{a^2 - b^2}}{a \sqrt{b^2 + c^2}} \right).$$

β. Das dreiachsige Ellipsoid. Die Halbachsen der Fläche mögen a, b, c heissen, es sei zugleich $a > b > c$, und zur Abkürzung:

5) $$\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \alpha, \qquad \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b} = \beta.$$

Aus der bekannten Gleichung der Fläche, nämlich:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \text{ oder } z = c \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

findet man jetzt vermöge der Bedeutungen von α und β:

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{1 - \alpha^2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \beta^2 \left(\frac{y}{b}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}:$$

Handelt es sich um die Fläche des achten Theiles von dem Ellipsoid, so sind $x_0 = 0$, $x_1 = a$, $y_0 = 0$, $y_1 = b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$ die Integrationsgrenzen, und demnach ist

6) $$S = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} dx\, dy \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \beta^2 \left(\frac{y}{b}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}}$$

Hier liesse sich wiederum die Formel 10) des vorigen Paragraphen anwenden, doch wird die nachherige weitere Rechnung nicht ohne einige Kunstgriffe ausführbar; wir gehen daher einen anderen Weg, der zugleich die grossen Vortheile einer geometrischen Auffassung doppelter Integrale in helles Licht setzt. Aus der Gleichung 6) leitet man für $x = a\xi$, $y = b\eta$ sehr leicht die folgende ab:

7) $$S = ab \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi\, d\eta \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 \xi^2 - \beta^2 \eta^2}{1 - \xi^2 - \eta^2}},$$

und wenn dabei

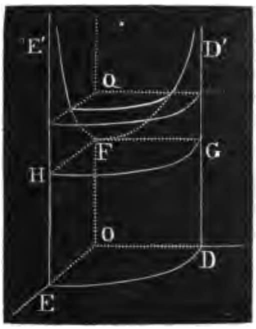
$$8)\qquad \zeta = \sqrt{\frac{1-\alpha^2\xi^2-\beta^2\eta^2}{1-\xi^2-\eta^2}}$$

gesetzt wird, so stimmt das in Nro 7) vorkommende Doppelintegral von $\zeta\, d\xi\, d\eta$ mit der Cubaturformel überein; betrachten wir daher ξ, η, ζ als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes, so bedeutet in den Gleichungen

$$9)\qquad S = ab\,V, \quad V = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} \zeta\, d\xi\, d\eta$$

V ein Volumen, dessen Horizontalprojektion oder Basis ein mit dem Halbmesser 1 beschriebener Kreis ist, wie man aus den Integrationsgrenzen sogleich ersieht, und das oberhalb durch die mittelst der Gleichung 8) charakterisirte Fläche begrenzt wird. Um von der Gestalt der letzteren eine Vorstellung zu erhalten, betrachten wir die Schnitte, welche die Fläche mit den Coordinatenebenen $\xi\zeta$ und $\eta\zeta$ bildet; aus den Gleichungen dieser Schnitte

Fig. 57.



$$\zeta = \sqrt{\frac{1-\alpha^2\xi^2}{1-\xi^2}}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{1-\beta^2\eta^2}{1-\eta^2}}$$

geht hervor, dass die Curven vertikal stehende Asymptoten in den Entfernungen $OD = OE = 1$ (Fig. 57) besitzen, dass also die Fläche ins Unendliche geht. Legen wir ferner einen horizontalen Querschnitt in der Höhe $OQ = \zeta$ durch dieselbe, so bleibt ζ in Nro. 8) constant und es ist aus der nunmehrigen Gleichung:

$$10)\qquad \frac{\zeta^2-\alpha^2}{\zeta^2-1}\,\xi^2 + \frac{\zeta^2-\beta^2}{\zeta^2-1}\,\eta^2 = 1$$

ersichtlich, dass jener Querschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\sqrt{\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-\alpha^2}}, \qquad \sqrt{\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-\beta^2}}$$

bildet, welche für $\zeta = 1 = OF$ in einen Punkt übergeht und sich für unendlich wachsende ζ mehr und mehr dem Kreise mit dem Halbmesser 1 nähert. Die Gestalt des Volumens V ähnelt demnach der eines unendlichen, trichterförmig ausgehöhlten Kreiscylinders und der Querschnitt des V ist ein Ringquadrant mit der Fläche

$$\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{4}\pi \sqrt{\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-\alpha^2}} \sqrt{\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-\beta^2}},$$

welche Q_ζ heissen möge. Der günstige Umstand, dass diese Querschnittsfläche so leicht zu bestimmen war, erlaubt nun eine andere Berechnung des V, indem man beachtet, dass V aus zwei Theilen besteht, deren erster ein Kreiscylinder von der Höhe $OF = 1$ ist und deren zweiter durch das Integral $\int Q_\zeta \, d\zeta$ ausgedrückt wird, wenn ζ von 1 bis ∞ geht; zufolge dieser Bemerkung ist:

$$V = \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}\pi \int_1^\infty \left\{ 1 - \frac{\zeta^2 - 1}{\sqrt{(\zeta^2 - \alpha^2)(\zeta^2 - \beta^2)}} \right\} d\zeta,$$

oder für $z = \frac{1}{u}$, und wenn Ω die Oberfläche des ganzen Ellipsoides bezeichnet:

$$11) \qquad \Omega = 2\pi a b \left[1 + \int_0^1 \left\{ 1 - \frac{1 - u^2}{\sqrt{(1 - \alpha^2 u^2)(1 - \beta^2 u^2)}} \right\} \frac{du}{u^2} \right].$$

Sind α und β sehr klein, so würde man für den eingeklammerten Ausdruck leicht eine rasch convergirende Reihe aufstellen können; im Gegenfalle ist es vortheilhafter, auf elliptische Funktionen zurückzugehen. Dies geschieht mittelst der Substitution $u = \frac{\sin\varphi}{\alpha}$; wegen $a > b$ ist dann auch $\alpha > \beta$, mithin $\frac{\beta}{\alpha}$ ein echter Bruch, welcher $\varkappa$ heissen möge; dem Werthe $u = 0$ entspricht $\varphi = 0$, für $u = 1$ erhält φ einen Werth φ_1 der Art, dass $\sin\varphi_1 = \alpha$. Demnach ist:

$$\Omega = 2\pi ab \left[1 + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\varphi_1} \left\{ \alpha^2 \cos\varphi - \frac{\alpha^2 - \sin^2\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} \right\} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} \right]$$

$$= 2\pi ab \left[1 + \alpha \int_0^{\varphi_1} \left\{ \cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} \right\} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{1}{\alpha} F(\varkappa, \varphi_1) \right].$$

Die noch übrige Integration lässt sich mittels der Bemerkung ausführen, dass

$$d\left\{ \cot\varphi \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi} \right\} = \frac{\varkappa^2 \sin^2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} - \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}}$$

ist, woraus man umgekehrt erhält

$$-\int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} = \cot\varphi \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi} - \varkappa^2 \int \frac{\sin^2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}}.$$

Vereinigt man diese Gleichung mit der folgenden:

$$\int \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\, d\varphi = -\frac{1}{\sin\varphi},$$

so ergiebt sich:

$$\int \left\{\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}\right\} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{\cos\varphi\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}-1}{\sin\varphi}$$
$$- \varkappa^2 \int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}.$$

Für $\varphi = \varphi_1$ wird nun $\sin\varphi_1 = \alpha$, $\cos\varphi_1 = \sqrt{1-\alpha^2}$, $\varkappa \sin\varphi_1 = \beta$; für $\varphi = 0$ erhält der vom Integralzeichen freie Ausdruck die Form $\frac{0}{0}$, deren wahrer Werth in diesem Falle die Null ist; daher bleibt:

$$\int_0^{\varphi_1} \left\{ \cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}} \right\} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2}-1}{\alpha} - \varkappa^2 \int_0^{\varphi_1} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2}-1}{\alpha} + E(\varkappa, \varphi_1) - F(\varkappa, \varphi_1),$$

und es ist nach diesen Bemerkungen zusammen:

$$\Omega = 2\pi a b \left[\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)} + \alpha E(\varkappa, \varphi_1) + \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) F(\varkappa, \varphi_1)\right],$$

oder endlich, wenn α und β durch a, b und c ausgedrückt werden:

$$12)\quad \Omega = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}} \left\{(a^2-c^2) E(\varkappa, \varphi_1) + c^2 F(\varkappa, \varphi_1)\right\}$$

$$\varkappa = \sqrt{\frac{a(b^2-c^2)}{b(a^2-c^2)}}, \quad \sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}, \quad \cos\varphi_1 = \frac{c}{a}.$$

γ. Für ein elliptisches Paraboloid, dessen Parameter $2a$ und $2b$ sein mögen, dessen Gleichung also

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$$

lauten würde, ist die allgemeine Complanationsformel:

$$13)\quad S = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} dx\, dy \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

Ohne diese Integration auszuführen, kann man auf der Stelle eine Vergleichung der Fläche S mit dem Volumen vornehmen, welches die Horizontalprojektion von S zur Basis hat und oberhalb durch ein getheiltes Hyperboloid begrenzt wird. Die Gleichung der letzteren Fläche ist nämlich:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ oder } z=c\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}},$$

mithin:

$$V=c\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}dx\,dy\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}},$$

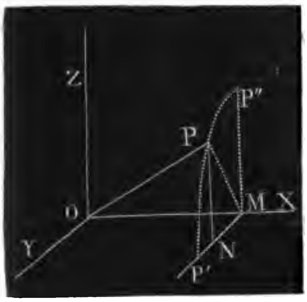
und wenn man dies mit S vergleicht, so folgt die elegante Beziehung $V=cS$, die sich leicht in Worte kleiden liesse.

§. 96.

Complanationsformel für Polarcoordinaten.

Nicht selten bedient man sich statt der rechtwinkligen Coordinaten $OM=x$, $MN=y$, $NP=z$, der sogenannten räumlichen Polarcoordinaten, indem man den Radiusvector $OP=r$, den Winkel $MOP=u$ und den Neigungswinkel NMP der Ebenen MOP und MOY in Rechnung bringt; die Formeln dazu sind:

Fig. 58.



1) $$x=r\cos u,\quad y=r\sin u\cos t,\quad z=r\sin u\sin t.$$

Denkt man sich diese Werthe in die Gleichung der Fläche eingesetzt, so lässt sich dieselbe auf r reduziren und auf die Form $r=\Phi(u,t)$ bringen, wobei r als abhängige Variabele erscheint. Um nun die Formel:

2) $$\int\int f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int\int f(r\cos u,\ r\sin u\cos t)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dt$$

zum Uebergange von dem einen zum anderen Coordinatensysteme benutzen zu können, ist es vor Allem nöthig, aus der Funktion

3) $$f(x,y)=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

die partiellen Differenzialquotienten von z zu entfernen und dafür die partiellen Differenzialquotienten der neuen abhängigen Variabelen einzuführen, was auf folgende Weise geschieht. Da z eine Funktion von x und y war, mithin auch von u und t abhängt, so ist:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Eliminirt man hieraus $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$, indem man zur Abkürzung setzt:

$$4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = L; \\ &\frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = M, \\ &\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = N, \end{aligned} \right.$$

so findet sich:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{L}{N}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{M}{N}.$$

Die Substitution dieser Werthe in Nro 3) und 2) giebt, wenn man beachtet, dass auf der rechten Seiten von Nro. 2) der Faktor N gleichfalls vorkommt:

$$5) \qquad S = \int\int dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$
$$= \int\int du\, dt \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

Die Differenziation der Gleichungen 1) liefert nun folgende Werthe:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial r}{\partial u} \cos u - r \sin u,$$
$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial t} \cos u,$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \left(\frac{\partial r}{\partial u} \sin u + r \cos u\right) \cos t,$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{\partial r}{\partial t} \cos t - r \sin t\right) \sin u,$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(\frac{\partial r}{\partial u} \sin u + r \cos u\right) \sin t,$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{\partial r}{\partial t} \sin t + r \cos t\right) \sin u,$$

und man erhält aus denselben für L, M, N die Ausdrücke:

$$L = -r\left(\frac{\partial r}{\partial u}\sin u + r\cos u\right)\sin u,$$

$$M = r\left(\frac{\partial r}{\partial u}\cos u - r\sin u\right)\sin u\cos t - r\frac{\partial r}{\partial t}\sin t,$$

$$N = -r\left(\frac{\partial r}{\partial u}\cos u - r\sin u\right)\sin u\sin t - r\frac{\partial r}{\partial t}\cos t,$$

endlich nach leichter Reduktion:

$$L^2 + M^2 + N^2 = r^2\left[\left\{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2\right\}\sin^2 u + \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right].$$

Die allgemeine Complanationsformel nimmt vermöge dieser Substitution die folgende Gestalt an:

6) $$S = \int\int r\,du\,dt\sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2\right\}\sin^2 u + \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2}$$

und man wird sich derselben in allen den Fällen bedienen, wo die Gleichung der Fläche bei Polarcoordinaten wesentlich einfacher als bei rechtwinkligen Coordinaten ist.

§. 97.

Die drei- und mehrfachen Integrale.

Sowie wir das Doppelintegral als Grenzwerth einer Doppelsumme betrachteten, so sehen wir auch das dreifache Integral:

1) $$W = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

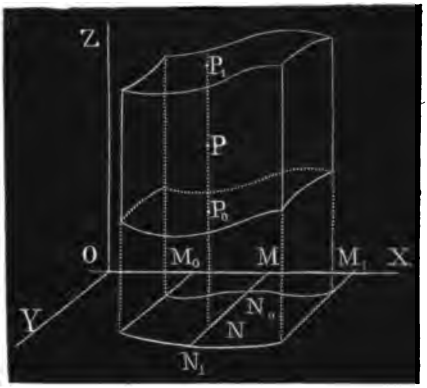
als Grenzwerth der dreifachen Summe an, welche entsteht, wenn man in dem Ausdrucke $f(x, y, z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, den unabhängigen Variabelen x, y, z alle Werthe ertheilt, welche sich aus den Intervallen $x = x_0$ bis $x = x_1$, $y = y_0$ bis $y = y_1$ und $z = z_0$ bis $z = z_1$ herausgreifen lassen. Nicht selten gestattet auch dieser Process eine geometrische Auffassung. Sehen wir z. B. in dem Integrale:

2) $$W = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} dx\,dy\,dz$$

x, y, z als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes an, so würde das

Produkt $dx\ dy\ dz$ das Volumen eines Parallelepipedes bedeuten, dessen drei in einer Ecke zusammenstossende Kanten dx, dy und dz sind; W ist demnach die Summe einer unendlichen Menge solcher Volumenelemente, mithin selbst ein Volumen, welches auf folgende Weise zu Stande kommt. Wir denken uns zwei Flächen construirt, deren Gleichungen $z_1 = f_1(x,y)$ und $z_0 = f_0(x,y)$ sein mögen, und summiren zunächst alle von $z = z_0$ bis $z = z_1$ vertikal aneinander gereihten Elemente; der Ausdruck:

Fig. 59.



$$\int_{z_0}^{z_1} dx\, dy\, dz = dx\, dy\, (z_1 - z_0)$$

bedeutet jetzt ein Parallelepiped, dessen Höhe $z_1 - z_0$ von endlicher Länge, dessen Querschnitt $dx\ dy$ aber unendlich klein ist; man hat nun weiter:

$$W = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} (z_1 - z_0)\, dx\ dy = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} z_1\, dx\ dy - \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} z_0\, dx\ dy,$$

und hier können die Betrachtungen des §. 91 angewendet werden; sie zeigen, dass W ein Volumen bedeutet, welches dieselbe Horizontalprojektion wie das in §. 91 betrachtete hat, und das ausserdem zwischen den zwei durch $z_1 = f_1(x,y)$ und $z_0 = f_0(x,y)$ repräsentirten Flächen liegt (Fig. 59). — Eine ähnliche Anschauungsweise gestattet das allgemeinere Integral 1), nur muss man sich jedes Volumenelement $dx\ dy\ dz$ erst mit einem Faktor $F(x,y,z)$ multiplizirt denken, bevor zur Summirung geschritten wird. Noch klarer wird dies, venn man die mechanischen Begriffe der Masse und Dichtigkeit zu Hülfe nimmt. Ist nämlich ein Körper durchaus homogen, so gilt bekanntlich die Regel, dass die Masse das Produkt aus seiner Dichtigkeit und seinem Volumen ist; ändert sich aber die Dichtigkeit von Punkt zu Punkt, betrachtet man sie demnach als Funktion der drei rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes, so darf jene Regel nicht mehr für irgend ein endliches Stück des Körpers angewendet werden, wohl aber für ein unendlich kleines. Bezeichnen wir demnach mit $F(x,y,z)$ die im Punkte xyz stattfindende Dichtigkeit, so ist $F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ die Masse des in demselben Punkte vorhandenen Körperelementes, d. h. kurz das Massenelement; die Summe aller nach den drei Dimensionen des Raumes hin vertheilten Massenelemente giebt die Gesammtmasse des Körpers und diese ist die Bedeutung von W. Dividirt man endlich W durch das Volumen V desselben Körpers, so erhält man die **mittlere Dichtigkeit** desselben.

In allen den Fällen, wo die erste, auf z bezügliche Integration unmittelbar ausführbar ist, wie in dem speziellen Beispiele 2), reduzirt sich das dreifache Integral 1) von selbst auf ein doppeltes, dessen weitere Behandlung den bereits entwickelten Regeln unterliegt; ist aber die erste Integration ohne Weitläufigkeiten nicht zu bewirken, so kann man zwei verschiedene Wege einschlagen, die im Folgenden bestehen.

I. Das dreifache Integral W lässt sich ansehen als zusammengesetzt aus einem Doppelintegrale (in Beziehung auf z und y) und aus einem nachherigen einfachen; reduzirt man zunächst nach irgend einer der früheren Methoden das Doppelintegral zu einem einfachen Integrale, so giebt dieses mit der letzten Integration zusammen wieder ein Doppelintegral, dessen Reduktion dann von Neuem zu versuchen ist. So z. B. kann man aus dem dreifachen Integrale:

$$3)\qquad T=\int_0^h\int_0^{h-x}\int_0^{h-x-y} x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}f(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$$

$$=\int_0^h x^{l-1}\,dx\int_0^{h-x}\int_0^{h-x-y} y^{m-1}z^{n-1}f(x+y+z)\,dy\,dz$$

zuerst die doppelte auf z und y bezügliche Integration herausheben und zur Abkürzung $h-x=k$ und $f(x+y+z)=\varphi(y+z)$ setzen; der Werth dieses Doppelintegrales ist dann nach Formel 6) in §. 94 zu finden, nämlich:

$$\int_0^k\int_0^{k-y} y^{m-1}z^{n-1}\varphi(y+z)\,dy\,dz=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\int_0^k s^{m+n-1}\varphi(s)\,ds,$$

mithin durch Substitution in 3) und wenn man wieder $k=h-x$ und $\varphi(s)=f(x+s)$ einsetzt:

$$T = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^h x^{l-1} dx \int_0^{h-x} s^{m+n-1} f(x+s)\, ds$$

$$= \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^h \int_0^{h-x} x^{l-1} s^{m+n-1} f(x+s)\, dx\, ds.$$

Die Formel 6) in §. 94 kann hier wiederum angewendet werden und giebt:

$$T = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \cdot \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m+n)}{\Gamma(l+m+n)} \int_0^h s^{l+m+n-1} f(s)\, ds;$$

hält man dies mit 3) zusammen, so gelangt man zu einer Gleichung, welche sich zu folgendem Theoreme formuliren lässt:

Wenn sich die in der Gleichung

$$T = \int\int\int x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} f(x+y+z)\, dx\, dy\, dz$$

postulirten Integrationen auf alle positiven x, y und z beziehen, welche der Bedingung:

$$h \geqq x + y + z \geqq 0$$

genügen, so ist der Werth der dreifachen Integrales:

$$T = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n)} \int_0^h s^{l+m+n-1} f(s)\, ds.$$

In dem speziellen Falle $h = 1$, $f(s) = 1$ kann auch die auf s bezügliche Integration ausgeführt werden und giebt wegen $\mu\,\Gamma(\mu) = \Gamma(1+\mu)$ die Formel:

4) $$\int\int\int x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1}\, dx\, dy\, dz = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(1+l+m+n)}$$

wobei die Integration auf alle positiven der Bedingung $1 \geqq x + y + z \geqq 0$ genügenden x, y, z ausgedehnt sind. Setzt man:

$$x = \left(\frac{\xi}{a}\right)^p, \qquad y = \left(\frac{\eta}{b}\right)^q, \qquad z = \left(\frac{\zeta}{c}\right)^r,$$

$$l = \frac{\lambda}{p}, \qquad m = \frac{\mu}{q}, \qquad n = \frac{\nu}{r},$$

und schreibt am Ende wieder x, y, z für ξ, η, ζ, so gelangt man zu dem allgemeineren Theoreme:

5) $$\int\int\int x^{\lambda-1}y^{\mu-1}z^{\nu-1}\,dx\,dy\,dz = \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{q}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{p}+\frac{\mu}{q}+\frac{\nu}{r}\right)}\,\frac{a^p b^q c^r}{pqr},$$

worin sich die Integrationen auf alle positiven x, y, z beziehen, welche der Bedingung:

6) $$1 \geqq \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \geqq 0$$

genügen. — Die Formel 5) dient zur Auflösung vieler geometrischer Aufgaben über die Bestimmung der Volumina, sowie mechanischer Probleme die Ermittelung von Massen, Schwerpunkten und Trägheitsmomenten betreffend; nimmt man z. B. $\lambda = \mu = \nu = 1$ und $p = q = r = 2$, so wird T das Volumen vom achten Theile eines dreiachsigen Ellipsoides, nämlich $T = \frac{1}{6}\pi abc$; für $p = q = r = 4$ würde man den achten Theil des Volumens erhalten, welches von der Fläche:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{y}{b}\right)^4 + \left(\frac{z}{c}\right)^4 = 1$$

eingeschlossen wird.

II. Das zweite Verfahren zur Reduktion dreifacher Integrale besteht darin, dass man an die Stelle der ursprünglichen unabhängigen Variabelen x, y, z drei neue Variabele, etwa r, s, t einführt, welche mit jenen durch Gleichungen von der Form $x = \varphi(r, s, t)$, $y = \psi(r, s, t)$, $z = \chi(r, s, t)$ verbunden sind. Geometrisch ist dies der Uebergang von einem Coordinatensysteme zum anderen und wird auf folgende Weise bewerkstelligt. Das Integral sei:

7) $$W = \int\int\int F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

so verwandelt sich $F(x, y, z)$ mittelst jener Substitution in eine Funktion von r, s, t, welche $\Phi(r, s, t)$ heissen möge, also:

8) $$f[\varphi(r, s, t), \psi(r, s, t), \chi(r, s, t)] = \Phi(r, s, t),$$

und es kommt nun darauf an, das neue Volumenelement zu finden, welches an die Stelle des früheren $dx.dy\,dz$ tritt. Letzteres war ein Parallelepiped, dessen acht Ecken folgende Coordinaten hatten:

$$x, y, z;\ x+dx, y, z;\ x, y+dy, z;\ x, y, z+dz;$$
$$x+dx, y+dy, z;\ x+dx, y, z+dz;\ x, y+dy, z+dz;$$
$$x+dx, y+dy, z+dz;$$

in gleicher Weise ist das neue Volumenelement ein schiefes Parallelepiped, dessen Ecken P, P_1, P_2, P_3 u. s. w. die neuen Coordinaten:

$$r,\ s,\ t;\quad r+dr,\ s,\ t;\quad r,\ s+ds,\ t;\quad r,\ s,\ t+dt \text{ u. s. w.}$$

besitzen und dessen Inhalt, wegen der unendlichen Kleinheit der Dimensionen, gleich dem Sechsfachen der schiefen Pyramide $PP_1P_2P_3$ ist. Legen wir durch P ein Coordinatensystem parallel dem ersten und bezeichnen wir die rechtwinkligen neuen Coordinaten von P_1, P_2, P_3 mit $\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1$, $\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2$, $\xi_3\,\eta_3\,\zeta_3$, so wird der sechsfache Inhalt der Pyramide $PP_1P_2P_3$, also das Volumenelement, durch den aus der analytischen Geometrie bekannten Ausdruck:

$$\xi_1(\eta_2\zeta_3-\eta_3\zeta_2)+\eta_1(\zeta_2\xi_3-\zeta_3\xi_2)+\zeta_1(\xi_2\eta_3-\xi_3\eta_2)$$

dargestellt; dabei ist in Beziehung auf das ursprüngliche rechtwinklige Coordinatensystem:

$$\xi_1=x_1-x=\left(x+\frac{\partial x}{\partial r}dr\right)-x=\frac{\partial x}{\partial r}dr,$$

$$\eta_1=\frac{\partial y}{\partial r}dr,\qquad \zeta_1=\frac{\partial z}{\partial r}dr,$$

ebenso sind ξ_2, η_2, ζ_2 die partiell in Beziehung auf s, und ξ_3, η_3, ζ_3 die partiell in Beziehung auf t genommenen Differenziale von x, y, z. In den neuen Coordinaten r, s, t ausgedrückt, ist also das Volumenelement:

$$\left[\frac{\partial x}{\partial r}\left(\frac{\partial y}{\partial s}.\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial t}.\frac{\partial z}{\partial s}\right)+\frac{\partial y}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial s}.\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial z}{\partial t}.\frac{\partial x}{\partial s}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial z}{\partial r}\left(\frac{\partial x}{\partial s}.\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial x}{\partial t}.\frac{\partial y}{\partial s}\right)\right]dr\,ds\,dt.$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$9)\quad \Omega=\frac{\partial x}{\partial r}\left(\frac{\partial y}{\partial s}.\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial t}.\frac{\partial z}{\partial s}\right)+\frac{\partial y}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial s}.\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial z}{\partial t}.\frac{\partial x}{\partial s}\right)$$
$$+\frac{\partial z}{\partial r}\left(\frac{\partial x}{\partial s}.\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial x}{\partial t}.\frac{\partial y}{\partial s}\right),$$

so erhalten wir die Transformation des dreifachen Integrales:

$$10)\quad \int\!\!\int\!\!\int F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int\!\!\int\!\!\int \Phi(r,s,t).\Omega\,dr\,ds\,dt.$$

Als Anwendung derselben wählen wir den Uebergang von rechtwinkligen Coordinaten zu räumlichen Polarcoordinaten; hier ist, wenn u für s gesetzt wird:

$$x=r\cos u,\quad y=r\sin u\cos t,\quad z=r\sin u\sin t,$$

und man findet mittelst der Formel 9):

$$\Omega=r^2\sin u;$$

die Umwandlung ist demnach

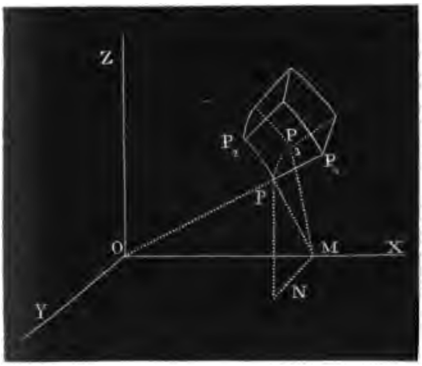
11) $$\int\int\int F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$
$$=\int\int\int F(r\cos u,\ r\sin u\cos t,\ r\sin u\sin t)\,r^2\sin u\,dr\,du\,dt.$$

Man kann dieselbe auch leicht direkt erhalten, wenn man r, u, t um ihre Differenziale zunehmen lässt und bemerkt, dass das entstehende Volumenelement die Form eines einem Kugelgewölbe entnommenen Gewölbsteines besitzt; es ist nämlich für $OP=r$, $\angle MOP = u$, $\angle NMP = t$ (Fig. 60), das Volumenelement $= PP_1 . PP_2 . PP_3$, dabei $PP_1 = dr$, $PP_2 = r\,du$, ferner $MP = r\sin u$, $\angle PMP_3 = dt$, mithin $PP_3 = r\sin u\,dt$, woraus für das Volumenelement der Werth

$$r^2\sin u\,dr\,du\,dt$$

wie oben folgt.

Fig. 60.



Als Beispiel für den Gebrauch der Formel 11) diene die Reduktion des dreifachen Integrales:

$$P=\int\int\int\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

worin sich die Integrationen auf alle positiven x, y, z beziehen mögen, welche die Bedingung:

$$1 \geqq \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2 \geqq 0$$

befriedigen; die geometrische Bedeutung von P ist dann die Masse des Octanten eines mit den Halbachsen a, b, c beschriebenen Ellipsoides, in welchem die Dichtigkeit an der Stelle xyz durch

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{r}$$

ausgedrückt wird, das also aus einer stetigen Folge homogener concentrischer Kugelschaalen besteht. Mittelst der Polarcoordinaten wird:

$$P=\int\int\int r\sin u\,dr\,du\,dt,$$

wo noch die Integrationsgrenzen zu bestimmen sind. Integriren wir zuerst in Beziehung auf r, d. h. summiren wir alle in gerader Linie vom Mittelpunkte bis zur Oberfläche des Ellipsoides liegenden Massenelemente, so fängt r mit $r = 0$ an und hört bei einem der Oberfläche des Ellipsoides zugehörigen Werthe $r = r_1$ auf; dieses r_1 findet sich, indem man die Gleichung der Fläche in Polarcoordinaten umsetzt, sie lautet dann:

$$\left(\frac{r_1 \cos u}{a}\right)^2 + \left(\frac{r_1 \sin u \cos t}{b}\right)^2 + \left(\frac{r_1 \sin u \sin t}{c}\right)^2 = 1,$$

oder:

$$r_1{}^2 = \frac{1}{\left(\frac{\cos u}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin u \cos t}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sin u \sin t}{c}\right)^2};$$

ferner müssen, um den Octanten des Körpers zu erhalten, u sowohl als t von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ ausgedehnt werden und es ist daher:

$$P = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{r_1} r \sin u \, du \; dt \; dr,$$

oder wenn die auf r bezügliche Integration ausgeführt und für $r_1{}^2$ sein Werth substituirt wird:

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin u \, du \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dt}{\left(\frac{\cos u}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin u \cos t}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sin u \sin t}{c}\right)^2}.$$

Der hier vorkommende Nenner kann auch in der Form:

$$\left(\frac{\cos^2 u}{a^2} + \frac{\sin^2 u}{b^2}\right)\cos^2 t + \left(\frac{\cos^2 u}{b^2} + \frac{\sin^2 u}{c^2}\right)\sin^2 t$$

dargestellt werden, wofür kurz $m \cos^2 t + n \sin^2 t$ geschrieben werden möge. Die auf t bezügliche Integration ist dann leicht zu bewerkstelligen, nämlich:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dt}{m \cos^2 t + n \sin^2 t} = \frac{1}{2}\pi \frac{1}{\sqrt{mn}},$$

und wenn man die Werthe von m und n wieder einsetzt, so erhält man jetzt folgendes einfache Integral:

$$P = \frac{1}{4}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin u \, du}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2 u}{a^2} + \frac{\sin^2 u}{b^2}\right)\left(\frac{\cos^2 u}{a^2} + \frac{\sin^2 u}{c^2}\right)}},$$

oder für $\cos u = q$, also $\sin u\, du = -dq$ und $\sin^2 u = 1 - q^2$:

$$P = \tfrac{1}{4}\pi\, bc \int_0^1 \frac{dq}{\sqrt{\left(1+\frac{b^2-a^2}{a^2}\,q^2\right)\left(1+\frac{c^2-a^2}{a^2}\,q^2\right)}}.$$

Eine elegantere Form erhält das Integral, wenn die Excentricitäten des Ellipsoides in Rechnung gebracht werden; setzen wir nämlich $a > b > c$ voraus und bezeichnen wie folgt:

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \beta, \qquad \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a} = \gamma, \quad \text{wo } \beta < \gamma,$$

so erhält P die Form:

$$P = \tfrac{1}{4}\pi\, bc \int_0^1 \frac{dq}{\sqrt{(1-\beta^2 q^2)(1-\gamma^2 q^2)}}.$$

Will man endlich auf elliptische Integrale zurückgehen, so setzt man $\gamma q = \sin\varphi$, $\gamma = \sin\varphi_1$ und es wird:

$$P = \tfrac{1}{4}\pi\,\frac{bc}{\gamma}\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 \sin^2\varphi}} = \tfrac{1}{4}\pi\,\frac{bc}{\gamma}\,F\left(\frac{\beta}{\gamma},\,\varphi_1\right),$$

mithin die ganze Masse des fraglichen Ellipsoides:

$$M = 2\pi\,\frac{bc}{\gamma}\,F\left(\frac{\beta}{\gamma},\,\varphi_1\right), \qquad \cos\varphi_1 = \frac{c}{a},$$

woraus sich durch Division mit $V = \frac{4}{3}\pi\, abc$ die mittlere Dichtigkeit desselben ableiten liesse.

Die hier auseinandergesetzten Methoden sind auch auf mehr als dreifache Integrale anwendbar, doch können wir uns tieferer Untersuchungen darüber um so eher enthalten, als solche mehrfache Integrale selten vorkommen, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil sie keine geometrische oder mechanische, sondern nur eine rein analytische Bedeutung haben.

Cap. XIX.

Differenzialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variabelen.

§. 98.

Grundbegriffe; Trennung der Variabelen.

Die bisherigen Integrationen, sie mochten nun ein- oder mehrfache sein, bezogen sich immer auf entwickelte Differenziale, d. h. auf gegebene Funktionen der vorhandenen Variabelen; es kann aber dagegen der Fall vorkommen, dass von einer Funktion der Differenzialquotient nicht unmittelbar bekannt ist, sondern nur eine Beziehung zwischen ihm und der ursprünglichen Funktion vorliegt und dass hieraus die Natur der Funktion bestimmt werden soll. So könnte z. B. nach der Funktion y von x gefragt werden, welche ihrem Differenzialquotienten gleich, für die also $\frac{dy}{dx} = y$ ist; ebenso liesse sich die Frage nach der Curve stellen, deren Subtangente gleich der doppelten Abscisse, d. h. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$ wäre u. s. w., und es würde bei solchen Problemen immer darauf ankommen, aus der gegebenen zwischen x, y, dx und dy stattfindenden Relation eine neue von dx und dy freie Gleichung abzuleiten, mittelst deren sich schliesslich y durch x ausdrücken liesse. Alle jene Gleichungen, in denen sich eine Beziehung zwischen einer noch unbekannten Funktion und einem oder mehreren ihrer Differenzialquotienten ausspricht, heissen **Differenzialgleichungen**; die Aufgabe ist, sie zu **integriren**, d. h. aus der Differenzialgleichung eine weitere

Gleichung, die sogenannte **Integralgleichung** abzuleiten, in der keine Differenziale, sondern nur die ursprünglichen Variabelen und etwaige Constanten vorkommen. Gewöhnlich classifizirt man die Differenzialgleichungen nach der Ordnung des höchsten vorkommenden Differenzialquotienten, indem man sagt: dass die Differenzialgleichung von der $n$ten Ordnung sei, wenn der höchste in ihr enthaltene Differenzialquotient von der $n$ten Ordnung ist. Das allgemeine Schema der Differenzialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variabelen x und y ist demnach:

$$1)\qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

und wenn man sich die Gleichung auf $\frac{dy}{dx}$ reduzirt denkt:

$$2)\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)} \text{ oder } \varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy = 0.$$

Bevor wir die Integration der Differenzialgleichungen näher betrachten, wollen wir erst einen Blick auf die geometrische Bedeutung dieser Operation werfen. Sehen wir in einer Gleichung von der Form:

$$3)\qquad \frac{dy}{dx} = \chi(x,y)$$

x und y als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes an, so ist zwar die Natur der Curve noch nicht bekannt, auf welcher sich derselbe befindet, man kennt aber die Richtung der Tangente an dieser Linie; denn die Gleichung 3) giebt $\tan\tau = \chi(x, y)$, wo τ den Winkel zwischen der Abscissenachse und der Tangente am Punkte xy bezeichnet. Geben wir dem x und y zwei willkürliche Anfangswerthe $x = x_0$ und $y = y_0$, so lässt sich die Tangente vermöge der Gleichung $\tan\tau_0 = \chi(x_0, y_0)$ construiren; auf dieser nehmen wir nahe an $x_0 y_0$ einen zweiten Punkt $x_1 y_1$ und betrachten das zwischen $x_0 y_0$ und $x_1 y_1$ liegende Stück der Tangente, welches t_0 heissen möge, als näherungsweise zusammenfallend mit der Curve. Von diesem zweiten Curvenpunkte $x_1 y_1$ ausgehend, können wir die vorige Construktion wiederholen, also $\tan\tau_1 = \chi(x_1, y_1)$ bestimmen, die Tangente ziehen, auf ihr ein Stück t_1 abschneiden und damit zu einem dritten Punkte $x_2 y_2$ gelangen u. s. f. Das so construirte Polygon schliesst sich der gesuchten Curve offenbar um so genauer an, je kleiner seine Seiten t_0, t_1, t_2 etc. sind, und man ersieht hieraus die Möglichkeit einer zwar näherungsweisen aber bis zu jedem beliebigen Genauigkeitsgrade verfolgbaren Integration der gegebenen Differenzialgleichung. Man bemerkt zugleich eine gewisse Unbestimmtheit, welche in der Lösung der Aufgabe liegt. Da nämlich der erste Punkt $x_0 y_0$ willkürlich bleibt, so giebt es nicht eine, sondern unendlich viele Curven mit der in Nro. 3) verlangten Eigenschaft; diese Curven sind im Allgemeinen von derselben Natur und nur verschieden in der Lage oder in den Dimensionen. So z. B. genügt der anfangs erwähnten Differenzialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$ jede Gleichung von der Form $y = \sqrt{kx}$, wo k beliebig bleibt, d. h. in jeder Parabel ist die Subtangente der doppelten Abscisse gleich. Auch analytisch begreift sich das Vorkommen einer willkürlichen Constante leicht, wenn man die Differenzialgleichung entstehen lässt; differenzirt man nämlich eine Gleichung von der Form $F(x, y, k) = 0$, worin k eine Constante bezeichnet, so folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0,$$

und wenn k aus beiden Gleichungen eliminirt wird, so entsteht eine neue Gleichung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$, d. h. eine Differenzialgleichung, und letztere bleibt dieselbe, welchen Werth man auch dem k ertheilt haben möge. Umgekehrt ist $F(x, y, k) = 0$ die zu Grunde liegende Integralgleichung; soll dieselbe allgemein sein, so muss darin, wie vorher, die willkürliche Constante k vorkommen; ausserdem würde man nur eine spezielle oder, wie man zu sagen pflegt, eine partikuläre Auflösung der Differenzialgleichung haben.

Die Integration einer Differenzialgleichung gelingt immer, wenn sich eine Trennung der Variabelen vornehmen lässt, d. h. wenn man die Differenzialgleichung auf die Form:

$$4)\qquad X dx + Y dy = 0$$

bringen kann, wo X eine Funktion von x allein und Y eine Funktion von y allein bedeutet. Das allgemeine Integral wird nämlich in diesem Falle:

$$5)\qquad \int X dx + \int Y dy - Const. = 0;$$

man überzeugt sich hiervon sehr leicht, wenn man die linke Seite einstweilen mit $f(x, y)$ bezeichnet und den in §. 8 bewiesenen Satz:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

in Anwendung bringt; es ist dann $\frac{\partial f}{\partial x} = X$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Y$, weil in Nro. 5) die Integrationen so geschehen, als wären x und y von einander unabhängige Variabele; man erhält folglich $X + Y\frac{dy}{dx} = 0$, was mit der Gleichung 4) übereinstimmt. — Etwas allgemeiner als die Differenzialgleichung 4) würde die folgende sein:

6) $$X_1 Y_2 dx + X_2 Y_1 dy = 0,$$

in welcher X_1 und X_2 von Y, Y_1 und Y_2 von x frei sein mögen; durch Division mit $X_2 Y_2$ wird daraus:

$$\frac{X_1}{X_2} dx + \frac{Y_1}{Y_2} dy = 0,$$

mithin durch Integration:

7) $$\int \frac{X_1}{X_2} dx + \int \frac{Y_1}{Y_2} dy = Const.$$

Als geometrische Anwendung hiervon behandeln wir das Problem, die Curve zu finden, in welcher die Subtangente eine gegebene Funktion $\varphi(x)$ der Abscisse ist. Wir haben in diesem Falle die Differenzialgleichung:

$$y : \frac{dy}{dx} = \varphi(x),$$

oder nach Trennung der Variabelen:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\varphi(x)},$$

mithin durch Integration:

$$dy = Const. + \int \frac{dx}{\varphi(x)}.$$

Um auf y zu reduziren, setzen wir $e^{Const.} = C$, wo C eine neue willkürliche Constante bezeichnet und erhalten so:

$$y = C e^{\int \frac{dx}{\varphi(x)}}$$

als Gleichung der gesuchten Curve. — In ganz ähnlicher Weise lässt sich die Aufgabe behandeln, die Curven zu finden, bei denen die Subtangente von der Form $\frac{\varphi(x)}{\psi(y)}$ ist; man erhält als Integralgleichung:

$$\int \frac{dy}{y\psi(y)} = \int \frac{dx}{\varphi(x)} + Const.$$

Ueberhaupt bieten die Subtangenten und Subnormalen der Curven, als Funktionen der Abscissen oder Ordinaten betrachtet, eine ziemliche Auswahl solcher leicht zu integrirender Differenzialgleichungen dar.

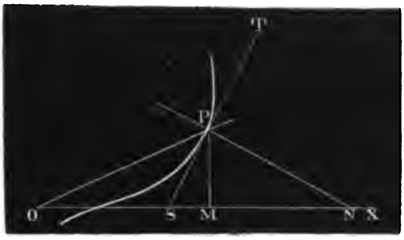
§. 99.

Substitution neuer Variabelen.

Wenn sich die Trennung der Veränderlichen unmittelbar nicht bewirken lässt, so ist es nicht selten von Vortheil, statt der ursprünglichen Variabelen neue Variabelen durch Substitution einzuführen und damit die gegebene Differenzialgleichung in eine andere zu transformiren, welche jene Sonderung gestattet. Das Technische des Verfahrens wird man aus folgenden Beispielen ersehen.

I. Es werde die Curve gesucht, in welcher der Winkel, den die Tangente im Punkte xy mit der Abscissenachse macht, eine gegebene Funktion des Winkels zwischen Radiusvector und Abscissenachse ist, d. h. $\tau = f(u)$, wenn in Fig. 61 $\angle XSP = \tau$ und $\angle XOP = u$. Da in diesem Falle auch $\tan \tau$ eine Funktion von $\tan u$, etwa $\tan \tau = \varphi(\tan u)$ sein muss, so hat man unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten die Differenzialgleichung:

Fig. 61.



$$1) \qquad \frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

in welcher die Variabelen im Allgemeinen nicht, sondern nur in dem speziellen Falle trennbar sind, wenn $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ eine Potenz von $\frac{y}{x}$ ist. Setzt man dagegen $\frac{y}{x} = t$, wo t eine neue abhängige Variabele bezeichnet, so wird:

$$y = xt, \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t,$$

und die Differenzialgleichung 1) erhält die Form:

$$2) \qquad x\frac{dt}{dx} = \varphi(t) - t \quad \text{oder} \quad \frac{dt}{\varphi(t) - t} = \frac{dx}{x},$$

in welcher die Variabelen gesondert sind. Die Integration liefert jetzt eine Gleichung von der Gestalt $\psi(t) = lx + Const.$, und wenn man statt t seinen Werth $\frac{y}{x}$ wieder einsetzt, so ist $\psi\left(\frac{y}{x}\right) = lx + Const.$ das Integral der ursprünglichen Differenzialgleichung.

Soll z. B. $\tau = 2u$ sein, so folgt:

$$tan\,\tau = \frac{2\,tan\,u}{1 - tan^2 u},$$

und durch Vergleichung mit $tan\,\tau = \varphi(tan\,u)$ ergiebt sich, dass hier

$$\varphi(t) = \frac{2t}{1-t^2} \text{ und } \varphi(t) - t = \frac{1+t^2}{1-t^2}\,t$$

ist; daraus folgt weiter:

$$\psi(t) = \int \frac{dt}{\psi(t) - t} = \int \left\{\frac{1}{t} - \frac{2t}{1+t^2}\right\} dt$$
$$= lt - l(1+t^2),$$

und die Integralgleichung lautet demnach für $Const. = l\left(\frac{1}{2C}\right)$:

$$l\left(\frac{y}{x}\right) - l\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = l\left(\frac{x}{2C}\right),$$

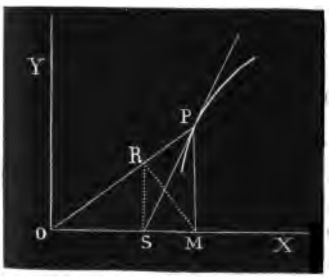
d. h.

$$2Cy = x^2 + y^2, \quad y = C \pm \sqrt{C^2 - x^2}.$$

Die gesuchte Curve ist folglich ein Kreis mit dem willkürlichen Halbmesser C; der Kreis berührt die Abscissenachse und der Berührungspunkt ist der Anfang der Coordinaten.

Die Gleichung 1) bildet das Schema der sogenannten homogenen, d. h. aller der Differenzialgleichungen (erster Ordnung), in denen eine Beziehung zwischen zwei gleichartigen Grössen, wie dort zwischen den Tangenten zweier Winkel, ausgesprochen ist. Ein paar Beispiele solcher Differenzialgleichungen sind noch folgende.

Fig. 62.



Für eine auf rechtwinklige Coordinaten bezogene Curve sei $OM = x$, $MP = y$ (Fig. 62), MR senkrecht auf dem Radiusvector OP, RS senkrecht auf OM und die Gerade SP die Tangente im Punkte P, also:

$$x - y\cot\tau = x\cos^2 u,$$

wenn $\tau = \angle MSP$ und $u = \angle MOP$. Die Differenzialgleichung der Curve lautet dann:

$$x - y\,\frac{dx}{dy} = x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2$$

oder, wenn sie auf die in Nro. 1) betrachtete Form gebracht wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Die Substitution $y = xt$ giebt weiter:

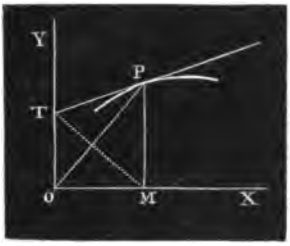
$$t\,dt = \frac{dx}{x}, \qquad t^2 = l(x^2) + C,$$

und die Gleichung der Curve ist daher, wenn noch der Gleichförmigkeit wegen $C = -l(a^2)$ gesetzt wird:

$$y = x\sqrt{l\left(\frac{x^2}{a^2}\right)}.$$

Für $x < a$ ist y imaginär, für $x = a$ wird $y = 0$, und von hier ab wachsen die Ordinaten ins Unendliche. Die Curve besitzt vier Wendepunkte an den Stellen $x = y = \pm a\sqrt{e}$.

Fig. 63.



Für eine zweite Curve gelte folgende Tangentenconstruktion. Man ziehe (Fig. 63) von dem Endpunkte M der Abscisse des Curvenpunktes P eine Senkrechte auf den Radiusvector bis sie die Ordinatenachse in T schneidet und dann TP, welches die Tangente sein soll, so ist die Differenzialgleichung der krummen Linie:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{xy} = \frac{y}{x} - \frac{1}{\frac{y}{x}}.$$

Mittelst der Substitution $y = xt$ wird hieraus:

$$t\,dt = -\frac{dx}{x}, \qquad t^2 = C - l(x^2),$$

und mithin ist für $C = l(a^2)$:

$$y = x\sqrt{l\left(\frac{a^2}{x^2}\right)}$$

die Gleichung der Curve. Letztere besitzt eine schleifenförmige Gestalt, ähnlich jener der Lemniscate.

II. Die Trennung der Variabelen gelingt auch bei der folgenden Gleichung:

3) $$\frac{dy}{dx} + Xy = X_1,$$

worin X und X_1 Funktionen von x allein bezeichnen. Denken wir uns nämlich y als Produkt zweier neuen Variabelen u und v, setzen also:

$$y = uv, \quad \frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx},$$

so geht die Gleichung 3) in die folgende über:

$$v\left(\frac{du}{dx} + Xu\right) + \left(u\frac{dv}{dx} - X_1\right) = 0.$$

Diese ist offenbar erfüllt, wenn die noch unbekannten Funktionen u und v den Bedingungen:

$$\frac{du}{dx} + Xu = 0, \quad u\frac{dv}{dx} - X_1 = 0$$

genügen. Aus der ersten dieser Gleichungen erhalten wir durch Trennung der Variabelen und nachherige Integration:

$$\frac{du}{u} = -X\,dx, \qquad lu = C + \int X\,dx,$$

oder wenn $e^C = k$ gesetzt wird:

$$u = ke^{-\int X\,dx}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt unter Benutzung des für u gefundenen Werthes:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{X_1}{u} = \frac{1}{k}X_1\,e^{+\int X dx},$$

$$v = Const. + \frac{1}{k}\int X_1\,e^{+\int X dx}dx.$$

Vermöge der Gleichung $y = uv$ wird nun für $k.Const. = K$:

4) $$y = \left(e^{-\int X dx}\right) \cdot \left(K + \int X_1\,e^{+\int X dx}\,dx\right),$$

wo es nicht nöthig ist, den angedeuteten Integrationen Constanten beizugeben, weil letztere in K vereinigt sind.

Beispielsweise betrachten wir die Curve, deren Tangente im Punkte xy von der Ordinatenachse ein Stück abschneidet, das aus der vierten Proportionale zu a, x, y und aus einer Linie b besteht, wobei a und b gegebene Geraden bezeichnen. Die Differenzialgleichung ist dann:

$$y - x\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{a} + b,$$

oder, wenn sie auf die Form der Gleichung 3) gebracht wird:

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x}\right)y = -\frac{b}{x};$$

man hat weiter:

$$X = \frac{1}{a} - \frac{1}{x},\ \int X\,dx = \frac{x}{a} - lx,\quad X_1 = -\frac{b}{x},$$

und folglich nach Nro. 4):

$$y = x e^{-\frac{x}{a}} \left\{ K - b \int \frac{1}{x^2}\, e^{\frac{x}{a}}\, dx \right\}.$$

Um die noch übrige Integration auszuführen, sei $x = at$; es wird dann bei theilweiser Integration:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2} e^{\frac{x}{a}} dx &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{t^2}\, e^t\, dt, \\ &= \frac{1}{a} \left\{ -\frac{1}{t}\, e^t + \int \frac{1}{t}\, e^t\, dt \right\}, \\ &= \frac{1}{a} \left\{ -\frac{1}{t}\, e^t + li\,(e^t) \right\}. \end{aligned}$$

Daraus ergiebt sich, wenn der Werth von $t = \frac{x}{a}$ restituirt wird:

$$y = x e^{-\frac{x}{a}} \left\{ K - \frac{b}{a}\, li\left(e^{\frac{x}{a}} \right) \right\} + b,$$

als Gleichung der gesuchten Curve.

III. Zu bemerken ist endlich noch, dass auch die allgemeinere Gleichung:

$$5) \qquad f'(y) \frac{dy}{dx} + X f(y) = X_1,$$

worin $f(y)$ eine Funktion von y allein und $f'(y)$ ihre Derivirte bedeutet, mittelst der vorigen Formeln integrirt werden kann. Für $f(y) = z$, also $f'(y)\,dy = dz$ wird nämlich aus 5):

$$\frac{dz}{dx} + Xz = X_1;$$

diese Gleichung stimmt mit Nro. 3) überein, man findet daher z nach Formel 4), und weil $z = f(y)$ war, so ist die Integralgleichung:

$$6) \qquad f(y) = \left(e^{-\int X dx} \right) . \left(K + \int X_1 e^{+\int X dx}\, dx \right),$$

woraus y entwickelt werden kann, wenn es nöthig sein sollte.

§. 100.

Vom integrirenden Faktor.

I. Ausser dem Falle, wo die Trennung der Variabelen zu erreichen ist, giebt es noch einen zweiten, in welchem eine Differenzialgleichung von der Form:

1) $$\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy = 0$$

allgemein integrirt werden kann. Erkennt man nämlich in der linken Seite, für sich allein betrachtet, das totale Differenzial einer Funktion $f(x,y)$, ist also:

$$\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = df,$$

so kann die Gleichung 1) nur dann bestehen, wenn $f(x,y) = Const.$ ist, und damit hat man unmittelbar die gesuchte Integralgleichung. So z. B. wird man der Differenzialgleichung:

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

auf der Stelle ansehen, dass sie mit der Gleichung $d(xy) = 0$ einerlei und folglich $xy = Const.$ ihr Integral ist. — Soll aber dieses Verfahren einen wissenschaftlicheren Werth als den eines blossen *aperçu* erhalten, so sind offenbar zwei Aufgaben zu lösen; man muss erstlich ein Kriterium angeben, mittelst dessen sich entscheiden lässt, ob die linke Seite der Gleichung 1) ein vollständiges Differenzial ist oder nicht, und man hat zweitens, wenn das Letztere der Fall sein sollte, die zu Grunde liegende Funktion $f(x,y)$ und damit die Integralgleichung selbst zu entwickeln. Zur Lösung dieser Aufgaben dienen folgende Erörterungen:

Die linke Seite der Gleichung 1), oder kurz der Ausdruck:

$$\varphi\,.\,dx + \psi\,.\,dy$$

ist mit dem totalen Differenziale von f, d. h. mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

jedenfalls identisch, wenn die Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \psi$$

stattfinden; differenzirt man die erste derselben partiell in Beziehung auf y und die zweite partiell in Beziehung auf x, so entstehen die neuen Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

deren linke Seiten identisch sind (Formel 3 in §. 13); es muss daher:

2) $$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

sein, und wenn diese Bedingung erfüllt ist, so bildet $\varphi . dx + \psi . dy$ das vollständige Differenzial von f. Um die letztere Funktion zu bestimmen, erinnern wir an die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi$, aus welcher folgt:

$$f = \int \varphi . dx + K,$$

wo sich die Integration auf x allein (bei constant gelassenem y) bezieht und K eine Constante bezeichnet, die von x frei ist, demohngeachtet aber y enthalten, also eine Funktion von y sein kann. Sie bestimmt sich, wenn man die Gleichung partiell in Beziehung auf y differenzirt, wodurch:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial K}{\partial y}$$

entsteht; dies muss mit ψ einerlei sein und man hat daher:

$$\frac{\partial K}{\partial y} = \psi - \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx,$$

folglich:

$$K = C + \int \psi . dy - \int dy \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx.$$

In den früheren Werth von f substituirt, giebt dies die Integralgleichung $f = 0$, nämlich:

3) $$C + \int \varphi . dx + \int \psi . dy - \int dy \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = 0,$$

worin die angedeuteten Integrationen jederzeit partiell auf die Variabele zu beziehen sind, deren Differenzial unter dem Integralzeichen vorkommt.

So ist z. B. die in Nro 2) angegebene Bedingung bei der folgenden Differenzialgleichung erfüllt:

$$(x^m + y) dx + (y^n + x) dy = 0,$$

nämlich:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1 = \frac{\partial \psi}{\partial x};$$

die Ausführung der in Nro. 3) angedeuteten Integrationen giebt:

$$\int \varphi . dx = \int (x^m + y) dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + xy,$$

$$\int \psi . dx = \int (y^n + x) dy = \frac{y^{n+1}}{n+1} + xy,$$

$$\int dy \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = \int dy \int dx = yx,$$

und daher ist die gesuchte Integralgleichung:

$$C + \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{n+1}}{n+1} + xy = 0.$$

II. Es kann auch der Fall vorkommen, dass eine Differenzialgleichung zwar durch Differenziation einer Gleichung von der Form $f(x, y) = Const.$ entstanden ist, dass aber gleichwohl die Bedingung in 2) unerfüllt bleibt. Stellt sich nämlich das Differenzial der Gleichung $f = Const.$ unter die Form:

4) $$(\varphi . dx + \psi . dx)\chi = 0,$$

wo φ, ψ und χ Funktionen von x und y bezeichnen, so wird man den gemeinschaftlichen Faktor χ weglassen, weil die linke Seite $= 0$, χ aber von Null verschieden ist; in der nunmehrigen Gleichung $\varphi . dx + \psi . dy = 0$ bildet die linke Seite kein vollständiges Differenzial mehr und daher findet die Gleichung 2) nicht statt. Aus der Gleichung $\frac{x}{y} = Const.$ z. B. folgt

$$\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy = \frac{1}{y^2}[y\ dx - x\ dy] = 0,$$

oder:

$$y\ dx - x\ dy = 0;$$

in der ersten Form hat man linker Hand ein vollständiges Differenzial und in der That ist auch

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(-\frac{x}{y^2}\right)}{\partial x};$$

in der zweiten Form, dagegen ist die linke Seite durch Verlust des gemeinschaftlichen Faktors $\frac{1}{y^2}$ zu einem unvollständigen Differenzial geworden und die Gleichung 2) trifft nicht mehr zu. Wenn nun überhaupt die in der Differenzialgleichung:

5) $$\varphi . dx + \psi . dy = 0$$

vorkommenden Funktionen der Bedingung $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ nicht genügen, so würde die vorige Integrationsmethode immer noch anwendbar sein, sobald sich der sogenannte integrirende Faktor χ finden liesse, nach dessen Zusatz die Gleichung 5) in Nro. 4), d. h. in ein vollständiges Differenzial überginge; man könnte nämlich $\varphi . \chi = \varphi_1$, $\psi . \chi = \psi_1$ setzen und dann mit φ_1 und ψ_1 ebenso wie vorhin mit φ und ψ operiren. Der Faktor χ muss aber so beschaffen sein, dass

$$\frac{\partial(\varphi . \chi)}{\partial y} = \frac{\partial(\psi . \chi)}{\partial x}$$

ist; entwickelt man diese partiellen Differenzialquotienten, so wird:

6) $$\varphi \frac{\partial \chi}{\partial y} - \psi \frac{\partial \chi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \chi = 0.$$

Die Aufsuchung des integrirenden Faktors erheischt demnach selbst wieder die Integration einer Differenzialgleichung, und da letztere meistentheils verwickelter als die ursprüngliche Differenzialgleichung ist, so hat man im Allgemeinen keinen sonderlichen Gewinn von diesem Verfahren, doch schliesst dies nicht aus, dass in speziellen Fällen die Kenntniss der Gleichung 6) von Nutzen sein kann. Wäre z. B. die gegebene Differenzialgleichung:

7) $$(Xy - X_1)\, dx + dy = 0,$$

wo X und X_1 Funktionen von x allein bezeichnen, so ist die Gleichung 6):

$$(Xy - X_1) \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x} + X\chi = 0;$$

man kann ihr dadurch genügen, dass man sich χ als Funktion von x allein denkt, wodurch $\frac{\partial \chi}{\partial y} = 0$ und:

$$-\frac{\partial \chi}{\partial x} + X\chi = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\chi} = X dx,$$

$$l\chi = \int X dx, \quad \chi = e^{\int X dx}$$

wird. Die nunmehrige Differenzialgleichung:

$$(Xy - X_1) e^{\int X dx} dx + e^{\int X dx} dy = 0$$

erfüllt in der That die Bedingung der Integrabilität (Nro. 2), wenn

$$\varphi = (Xy - X_1) e^{\int X dx}, \quad \psi = e^{\int X dx}$$

gesetzt wird; zugleich ist:

$$\int \varphi \,.\, dx = y \int X e^{\int X dx} dx - \int X_1 e^{\int X dx} dx,$$

$$\int \psi \,.\, dy = e^{\int X dx} y,$$

$$\int dy \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx = y \int X e^{\int X dx} dx,$$

und so ergiebt sich als Integralgleichung von Nro. 7):

8) $$C + y e^{\int X dx} - \int X_1 e^{\int X dx} dx = 0,$$

sie ist dieselbe, welche auf anderem Wege in §. 99, II. gefunden wurde.

§. 101.

Differenzialgleichungen verschiedener Grade.

I. Wir haben bisher solche Differenzialgleichungen erster Ordnung behandelt, in denen nur die ersten Potenzen von y und $\frac{dy}{dx}$ vorkamen, welche also rücksichtlich dieser Ausdrücke vom ersten Grade, oder, wie man häufig sagt, **linear** waren; es könnte aber der Fall eintreten, dass die gegebene Differenzialgleichung höhere Potenzen von $\frac{dy}{dx}$ enthielte, und es würde das Schema einer Differenzialgleichung erster Ordnung und n^{ten} Grades folgendes sein:

$$1)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^n + F_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + F_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \ldots + F_{n-1}\frac{dy}{dx} + F = 0,$$

worin $F_1, F_2, \ldots F_{n-1}, F_n$ Funktionen von x und y bezeichnen. Das zunächst sich darbietende Verfahren zur Integration einer derartigen Differenzialgleichung besteht darin, dass man die Gleichung in Beziehung auf $\frac{dy}{dx}$ als Unbekannte auflöst, wodurch man im Allgemeinen n verschiedene Werthe $f_1, f_2, \ldots f_n$, sämmtlich Funktionen von x und y, erhält und nachher die n Differenzialgleichungen:

$$2)\qquad \frac{dy}{dx} = f_1, \qquad \frac{dy}{dx} = f_2, \ldots . \frac{dy}{dx} = f_n$$

einzeln nach den vorigen Methoden integrirt. Nennen wir:

$$3)\quad \varphi_1(x, y, C_1) = 0, \quad \varphi_2(x, y, C_2) = 0, \ldots \varphi_n(x, y, C_n) = 0$$

die Integralgleichungen jener n Differenzialgleichungen, so ist jede von ihnen auch eine Auflösung der ursprünglichen Differenzialgleichung; die allgemeinste Lösung derselben entsteht nun durch das Produkt:

$$4)\qquad \varphi_1(x, y, C_1) \cdot \varphi_2(x, y, C_2) \ldots . \varphi_n(x, y, C_n) = 0;$$

die Allgemeinheit dieser Gleichung wird übrigens nicht beeinträchtigt, wenn man $C_1 = C_2 \ldots = C_n = C$ nimmt; denn setzt man der Reihe nach jeden einzelnen Faktor des obigen Ausdruckes $= 0$ und giebt dem C alle möglichen Werthe, so erhält C unter Anderem auch die Werthe $C_1, C_2, \ldots C_n$ wieder.

Beispielsweise sei die gegebene Differenzialgleichung:

5) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{xy}{a^2} = 0.$$

Die beiden einzelnen daraus entspringenden Differenzialgleichungen sind in diesem Falle:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{\sqrt{xy}}{a} = 0, \quad \frac{dy}{dx} + \frac{\sqrt{xy}}{a} = 0,$$

und die Integralgleichungen derselben:

$$y - \tfrac{1}{3}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}} + C_1 = 0, \quad y + \tfrac{1}{3}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}} + C_2 = 0,$$

das allgemeine Integral ist folglich:

$$\left(y + C_1 - \tfrac{1}{3}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}}\right)\left(y + C_2 + \tfrac{1}{3}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}}\right) = 0,$$

oder wenn $C_1 = C_2 = C$ genommen wird:

6) $$(y + C)^2 - \tfrac{1}{9}\frac{x^3}{a} = 0.$$

II. Das beschriebene Verfahren verliert seine Brauchbarkeit wenn die Wurzeln der gegebenen Gleichung sehr verwickelte Ausdrücke oder gar nicht angebbar sind; es ist dann häufig vortheilhaft, die Gleichung 1) auf y oder auf x zu reduziren, d. h. ihr eine der folgenden Formen zu verleihen:

7) $$y = \Phi\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \text{ oder } x = \Psi\left(y, \frac{dy}{dx}\right),$$

wobei $\frac{dy}{dx}$ kurz mit y' bezeichnet werden möge, und sie in der neuen Gestalt noch einmal zu differenziren. Aus $y = \Phi(x, y')$ ergiebt sich auf diese Weise:

8) $$y' = \frac{\partial \Phi(x, y')}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(x, y')}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dx},$$

d. h. eine Differenzialgleichung zwischen den beiden Variabelen x und y'; durch Integration folgt daraus eine Gleichung von der Form $f(x, y', C) = 0$, welche mit $y = \Phi(x, y')$ verbunden dienen kann, um durch Elimination von y' zu einer Gleichung zwischen x und y zu gelangen. — Ist dagegen die gegebene Differenzialgleichung auf die Form $x = \Psi(y, y')$ gebracht, so wird:

$$1 = \frac{\partial \Psi(y, y')}{\partial y} y' + \frac{\partial \Psi(y, y')}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dx},$$

oder wenn man die Beziehung:

$$9)\qquad \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy} y'$$

in Anwendung bringt:

$$10)\qquad 1 = y' \frac{\partial \Psi(y, y')}{\partial y} + y' \frac{\partial \Psi(y, y')}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dy}.$$

Diese Differenzialgleichung enthält nur y und y', ihr Integral ist daher von der Form $f(y, y', C) = 0$, und wenn man zwischen dieser und der vorigen Gleichung $x = \Psi(y, y')$ die Variabele y' eliminirt, so ergiebt sich das Integral der ursprünglichen Differenzialgleichung.

Beispiel. Eine Gerade von unveränderlicher Länge a bewege sich so, dass der eine Endpunkt auf der Abscissen-, der andere auf der Ordinatenachse fortgleitet; man sucht die Curve, welche von jener Geraden während der ganzen Bewegung berührt wird. Nennen wir x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Curvenpunktes, so muss das zwischen die Coordinatenachsen fallende Stück der an xy gelegten Tangente constant $= a$ sein; diese Bemerkung liefert die Differenzialgleichung:

$$(xy' - y) \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'} = a,$$

oder auf y reduzirt:

$$11)\qquad y = xy' - \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Die Differenziation dieser Gleichung giebt nach beiderseitiger Hebung von y':

$$12)\qquad 0 = \left\{ x - \frac{a}{\sqrt{1 + y'^2}^{\,3}} \right\} \frac{dy'}{dx},$$

und daraus folgt entweder:

$$13)\qquad \frac{dy'}{dx} = 0, \quad \text{oder} \quad x - \frac{a}{\sqrt{1 + y'^2}^{\,3}} = 0.$$

Die erste Gleichung giebt $y' = C$ und durch Substitution in Nro. 11):

$$y = Cx - \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}},$$

d. h. eine Gerade, was in der That richtig ist, da alle Tangenten an einer Geraden mit letzterer zusammenfallen und im vorliegenden Falle das zwischen die Coordinatenachsen fallende Stück der Geraden $= a$ ist. Die zweite Gleichung in 13) liefert:

$$y' = \frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}},$$

29*

mithin durch Substitution in Nro. 11):

$$y = -\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Die beiden Integrale der Differenzialgleichung sind daher:

$$y - Cx + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}} = 0 \text{ und } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0.$$

III. Auch in dem Falle, wo die gegebene Differenzialgleichung auf die homogene Form:

14) $$y'^n + F_1\left(\frac{y}{x}\right)y'^{n-1} + F_2\left(\frac{y}{x}\right)y'^{n-2} + \dots$$
$$\dots + F_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)y' + F_n\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

gebracht werden kann, hat die Integration meistens keine Schwierigkeiten. Es liegt nämlich sehr nahe, $\frac{y}{x} = t$ zu setzen, wodurch die Gleichung sich unter die allgemeine Form:

15) $$f(y', t) = 0$$

stellt, die man entweder in Beziehung auf y' oder, wenn dies umständlich wäre, nach t auflösen kann, wodurch man entweder $y' = \varphi(t)$ oder $t = \psi(y')$ zum Resultat erhält. Andererseits ist wegen $y = xt$:

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t, \qquad y' - t = x\frac{dt}{dx}.$$

und

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{y' - t}.$$

Hat man y' durch t ausgedrückt, so enthält die rechte Seite nur t, war aber t durch y ausgedrückt, so kommt rechter Hand nur y' vor; in jedem Falle sind die Variabelen gesondert und es ist:

16) $$lx = \int \frac{dt}{y' - t},$$

oder auch:

17) $$lx = -l(y' - t) + \int \frac{dy'}{y' - t},$$

und man wird von diesen Gleichungen die erste oder die zweite benutzen, jenachdem y' durch t oder t durch y' ausgedrückt ist. Im ersten Falle giebt die Integration ein Resultat von der Form $lx = \chi(t) + Const.$ und man braucht nur für t seinen Werth einzusetzen; im zweiten Falle ist das Ergebniss von der Form $lx = \chi(y') + Const.$

und es bedarf noch der Elimination von y' aus der vorstehenden und der ursprünglichen Gleichung.

Sucht man z. B. die Curve, deren Bogen s mit den rechtwinkligen Coordinaten x und y des Endpunktes durch die Gleichung $s = \sqrt{2xy}$, oder

$$\int \sqrt{1+y'^2}\, dx = \sqrt{2xy}$$

verbunden ist, so lautet die Differenzialgleichung:

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{\frac{x}{2y}}\, y' + \sqrt{\frac{y}{2x}};$$

für $y = xt$ findet sich hieraus:

$$y' = \frac{t+(1-t)\sqrt{2t}}{2t-1}, \quad y'-t = \frac{(1-t)\sqrt{2t}}{\sqrt{2t}-1},$$

die Gleichung 11) wird daher im vorliegenden Falle:

$$lx = \int \frac{\sqrt{2t}-1}{(1-t)\sqrt{2t}} dt = C - l(1-t) - \int \frac{dt}{(1-t)\sqrt{2t}}.$$

Hier ist die noch übrige Integration durch Wegschaffung des Wurzelzeichens ($t = u^2$) leicht auszuführen und giebt:

$$lx = C - l(1-t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\left(\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}\right),$$

in rechtwinkligen Coordinaten ist daher für $t = \frac{y}{x}$ die Gleichung der Curve:

$$\frac{x-y}{k} = \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

wobei $e^{+C} = k$ gesetzt wurde. Zur Construktion der Curve würden übrigens Polarcoordinaten bequemer sein.

Für ein zweites Beispiel sei $s = \sqrt{mx^2+ny^2}$, also durch Differenziation:

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{mx+nyy'}{\sqrt{mx^2+ny^2}},$$

und vermöge der Substitution $y = xt$:

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{m+nty'}{\sqrt{m+nt^2}},$$

$$(m+nt^2)(1+y'^2) = (m+nty')^2.$$

Diese Gleichung ist in jedem Falle leicht auf y' oder t zu reduziren; am einfachsten wird die Sache für $n = 1$, man findet nämlich:

$$y' - t = \frac{\sqrt{m-1}\,\sqrt{m+t^2}}{\sqrt{m}},$$

und nach Formel 16):

$$lx = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m-1}}\int\frac{dt}{\sqrt{m+t^2}},$$

$$= \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m-1}}\,l(t+\sqrt{m+t^2})+C,$$

oder wenn $C = Ca$ gesetzt wird, wo a eine neue willkürliche Constante bezeichnet:

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{y+\sqrt{mx^2+y^2}}{x}\right)^{\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m-1}}};$$

es ist übrigens nicht schwer, die Gleichung auf y zu reduziren; für $m = \frac{4}{3}$ z. B., und wenn man zur Vereinfachung $\frac{2}{4}a$ an die Stelle von a treten lässt, hat man

$$s = \sqrt{\tfrac{4}{3}x^2+y^2}\,, \qquad y = \left(\frac{x}{3a}-1\right)\sqrt{ax}.$$

§. 102.

Die singulären Auflösungen der Differenzialgleichungen.

In dem Abschnitte II. des vorigen Paragraphen begegneten wir der eigenthümlichen Erscheinung, dass eine Differenzialgleichung zwei Auflösungen zuliess, von welchen die erste eine willkürliche Constante besass, die zweite nicht; aus

1) $$y = xy' - \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

folgte nämlich:

2) $$y = Cx - \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}} \text{ und auch } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$$

da nun das erste Integral insofern das allgemeinere ist, als es eine willkürliche Constante C enthält, so sollte man erwarten, dass das zweite Integral für irgend einen speziellen Werth von C aus jenem hervorgehen müsste; dies ist aber nicht der Fall und man muss daher die zweite Auflösung als eine in ihrer Art einzig dastehende betrachten. Wie nun eine solche besondere oder singuläre Auflösung einer Differenzialgleichung mit dem allgemeinen Integrale zusammenhängt, wird aus folgenden Bemerkungen erhellen, die wir an die geometrische Bedeutung der Gleichung 1) anknüpfen. Die Gleichung einer beliebigen Geraden ist bekanntlich von der Form $y = Cx + c$; soll das zwischen die Coordinatenachsen fallende Stück derselben die Länge a besitzen, so muss aus leicht zu übersehenden geometrischen Gründen $c = -\frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$, mithin:

$$y - Cx + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}} = 0 \tag{3}$$

die Gleichung der Geraden sein. Eine zweite Gerade der Art wäre:

$$y - C_1 x + \frac{aC_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0; \tag{4}$$

aus beiden Gleichungen lassen sich die Coordinaten des Durchschnittes der zwei Geraden bestimmen, welcher der Aufgabe zufolge der Durchschnitt zweier benachbarten Tangenten an der gesuchten krummen Linie ist. Dieser Punkt wird selbst zu einem Curvenpunkte, wenn die Tangenten in einander fallen, also C_1 in C übergeht; dieser Process wird aber dadurch angedeutet, dass man $C + dC$ für C_1 schreibt und sich an die bekannte Regel $f(C + dC) = f(C) + df(C)$ erinnert; demnach ist die Gleichung 4):

$$\left\{y - Cx + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}\right\} + d\left\{y - Cx + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}\right\} = 0.$$

Benutzt man hier die Gleichung 3), dividirt nachher mit dC und beachtet, dass es sich um eine partiell auf C bezügliche Differenziation handelt, so kann die Gleichung 4) durch die folgende ersetzt werden:

$$\frac{\partial\left\{y - Cx + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}\right\}}{\partial C} = 0. \tag{5}$$

Die Gleichungen 3) und 5) repräsentiren jetzt zwei unendlich naheliegende Tangenten der gesuchten Curve; man findet daraus:

$$x = \frac{a}{\sqrt{1+C^2}^{\,3}}, \quad y = \frac{aC^3}{\sqrt{1+C^2}^{\,3}}$$

als Coordinaten ihres Durchschnittes, d. h. eines Curvenpunktes; die Elimination von C giebt endlich eine Gleichung zwischen x und y

selbst, d. h. die Gleichung der Curve:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Kommt es nur auf die letztere an, so konnte man sich die Aufsuchung der Werthe von x und y ersparen und die willkürliche Constante C unmittelbar aus den Gleichungen 3) und 5) eliminiren.

Die vorstehenden Bemerkungen sind leicht auf den allgemeinen Fall zu übertragen, wo bei der Integration einer Differenzialgleichung $F(x, y, y') = 0$ bereits zu einer Integralgleichung:

6) $$f(x, y, C) = 0$$

gelangt ist, welche eine willkürliche Constante in sich enthält. Wir denken uns nämlich $f(x, y, C) = 0$ als Gleichung einer Curve und den beliebigen Parameter C als stetig veränderlich; die Gleichung $f(x, y, C + dC) = 0$, welche mit Nro. 6) verbunden in der Form:

7) $$\frac{\partial f(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

dargestellt werden kann, bedeutet jetzt eine unendlich naheliegende Curve derselben Art, welche gleichfalls die in der Differenzialgleichung $F(x, y, y') = 0$ ausgesprochene Eigenschaft besitzt. Dieselbe Eigenschaft muss auch dem Durchschnitte der beiden Curven 6) und 7) zukommen, also einem Punkte, dessen Coordinaten aus den Gleichungen 6) und 7) entwickelt und unter den Formen $x = \varphi(C)$, $y = \psi(C)$ dargestellt werden könnten. Was von einem solchen Punkte gilt, gilt von allen den Punkten, welche entstehen, wenn man sich die ganze Schaar der gleichartigen Curven von stetig veränderlichen Parametern aufgezeichnet und die Durchschnitte je zweier Nachbarcurven construirt denkt. Alle diese Durchschnitte bilden in continuirlicher Folge eine neue krumme Linie, die sogenannte Umhüllungscurve jener Schaar; ihre Gleichung findet sich, indem man C aus den Gleichungen $x = \varphi(C)$ und $y = \psi(C)$, oder kürzer aus den Gleichungen $f = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial C} = 0$ eliminirt; sie enthält C nicht mehr und ist eine singuläre Curve mit der durch $F(x, y, y') = 0$ charakterisirten Eigenschaft.

Als Beispiel diene folgende Aufgabe. Man sucht eine krumme Linie, deren Normale die mittlere geometrische Proportionale ist zwischen dem Stücke, welches sie selbst von der Abscissenachse abschneidet, und zwischen einer gegebenen Geraden a. Die Differenzialgleichung der Curve lautet:

8) $$y\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{a(x + yy')};$$

zu ihrer Integration empfiehlt sich das im vorigen Paragraphen unter Nro. II. beschriebene Verfahren und zwar ist es am vortheilhaftesten, auf x zu reduziren, weil die Entwickelung von y eine quadratische Gleichung geben würde. Man hat nun:

9) $$y^2(1+y'^2)-ayy'=ax,$$

und hieraus folgt durch Differenziation, indem man von den Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx}=y', \qquad \frac{dy'}{dx}=y'\frac{dy'}{dy}$$

Gebrauch macht:

$$(2yy'-a)\left\{yy'\frac{dy'}{dy}+(1+y'^2)\right\}=0.$$

Diese Gleichung zerfällt in die zwei nachstehenden:

10) $$yy'\frac{dy'}{dy}=-(1+y'^2), \qquad 2yy'=a,$$

welche durch Trennung der Variabelen integrirt werden können. Die erste Gleichung giebt:

$$\int\frac{y'\,dy'}{1+y'^2}=-\int\frac{dy}{y},$$

oder $\frac{1}{2}l(1+y'^2)=-ly+Const.$, d. i. wenn $Const.=lk$ gesetzt wird:

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{k}{y}, \quad y'=\frac{\sqrt{k^2-y^2}}{y};$$

das Integral ist demnach, wenn die vorstehenden Werthe in die Gleichung 9) substituirt werden:

$$k^2=a\,(x+\sqrt{k^2-y^2})$$

oder für $k^2=ac$, wo nun c die willkürliche Constante bezeichnet:

11) $$(x-c)^2+y^2=ac.$$

Die zweite Gleichung in Nro 10) liefert $y'=\frac{a}{2y}$, und durch Substitution in Nro. 9):

12) $$y^2-ax=\tfrac{1}{4}a^2.$$

Hier ist das erste Integral allgemein, das zweite ein singuläres, welches man nach der angezeigten Methode aus jenem ableiten kann, indem man:

$$f(x,y,c)=(x-c)^2+y^2-ac=0$$

setzt und c aus dieser Gleichung und der folgenden

$$\frac{\partial f(x,y,c)}{\partial c}=-2(x-c)-a=0$$

eliminirt; die letztere Gleichung giebt $c = x + \frac{1}{2}a$, und in die vorige Gleichung eingesetzt:

$$\tfrac{1}{4}a^2 + y^2 - a(x + \tfrac{1}{2}a) = 0,$$

was mit Nro. 12) übereinstimmt. Geometrisch bedeutet die Gleichung 11) eine Schaar von Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Abscissenachse liegen und deren Halbmesser sich in der Weise ändern, dass, wenn c der Abstand eines Centrums vom Coordinatenanfange ist, $\sqrt{ac}$ den zugehörigen Halbmesser angiebt; alle diese Kreise werden von der durch die Gleichung 12) charakterisirten Parabel eingehüllt.

Es versteht sich übrigens von selbst, dass nicht immer eine singuläre Lösung vorhanden zu sein braucht, namentlich fehlt sie immer dann, wenn die aus den Gleichungen $f = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial C} = 0$ gezogene neue Gleichung nur einen speziellen Fall der Gleichung $f = 0$ darstellt.

§. 103.

Integration durch Versuche.

Die bisher auseinandergesetzten Methoden zur Integration der Differenzialgleichungen zeichnen sich dadurch aus, dass sie der Willkür nichts überlassen und wenigstens in vielen Fällen mit Sicherheit zum allgemeinen und dem etwaigen singulären Integrale führen. Will aber die Integration einer Differenzialgleichung trotz der Anwendung aller bisherigen Mittel nicht gelingen, so muss man zu anderen Methoden greifen, deren gemeinschaftlicher Charakter darin besteht, dass die Integralgleichung hypothetisch angenommen und versucht wird, ob sie der Differenzialgleichung genügt; Hauptsache dabei ist, die richtige Form des Integrales zu treffen, und man wird sich bei dieser Wahl am besten durch Analogieen leiten lassen, indem man die Differenzialgleichung mit solchen Differenzialgleichungen vergleicht, die von ähnlicher Form und deren Integrale bekannt sind, es ist dann immer zu erwarten, dass auch das Integral ungefähr dieselbe Form haben werde, wie jenes bekannte Integral.

Dieses indirekte Verfahren ist z. B. anwendbar auf die Differenzialgleichung:

$$1)\qquad \frac{dx}{\sqrt{1 + ax^2 + bx^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1 + ay^2 + by^4}} = 0,$$

in welcher zwar die Variabelen gesondert sind, die Integration aber gleichwohl insofern umständlich werden würde, als sie mittelst elliptischer Funktionen ausgeführt werden müsste. Um eine Andeutung über die Form des Integrales zu erhalten, betrachten wir vorerst den speziellen Fall:

2) $$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0;$$

hier ist die Integration sehr leicht und giebt:

3) $$\operatorname{Arcsin} x+\operatorname{Arcsin} y=Const.$$

Die Gleichung scheint von transcendenter Form zu sein, ist es aber in der That nicht; die Summe zweier Bögen macht offenbar wieder einen Bogen aus, nennen wir μ dessen Sinus, so kann $Const. = \operatorname{Arcsin}\mu$ gesetzt werden, wo μ die neue willkürliche Constante bezeichnet. Statt der Gleichung $\operatorname{Arcsin} x+\operatorname{Arcsin} y=\operatorname{Arcsin}\mu$ kann auch die folgende:

$$\sin(\operatorname{Arcsin} x+\operatorname{Arcsin} y)=\mu$$

gesetzt werden, wo man linker Hand die bekannte Formel für $\sin(u+v)$ in Anwendung bringen und die Gleichungen $\sin u=x$, $\cos u=\sqrt{1-x^2}$, $\sin v=y$, $\cos v=\sqrt{1-y^2}$ berücksichtigen muss. Das gesuchte Integral ist demnach:

4) $$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\mu.$$

Will man es in rationaler Form, wenigstens in Beziehung auf x und y, dargestellt sehen, so kann dies durch folgende kleine Rechnung bewerkstelligt werden; es ist:

$$\mu^2=x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2},$$

5) $$\mu^2-(x^2+y^2)=2xy\left\{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy\right\}.$$

Ferner hat man aus der ersten Gleichung:

$$1-\mu^2=(1-x^2)(1-y^2)-2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}+x^2y^2,$$

wo die rechte Seite ein vollständiges Quadrat ist, daher:

$$\sqrt{1-\mu^2}=\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy.$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes in die Gleichung 5) wird letztere rational, nämlich:

$$x^2+y^2+2\sqrt{1-\mu^2}\,xy-\mu^2=0,$$

oder für $\mu^2=\frac{1}{\lambda}$:

6) $$\lambda(x^2+y^2)+2\sqrt{\lambda(\lambda-1)}\,xy-1=0.$$

Das Integral der Differenzialgleichung 2) ist demnach eine in Beziehung auf x und y rationale und symmetrische Funktion zweiten Grades. — Kehren wir nun zu der allgemeineren Gleichung 1) zurück, so liegt die Vermuthung nahe, dass ihr Integral eine symmetrische Funktion vierten Grades sein werde, also von der Form:

$$7)\qquad f(x,y) = Ax^2y^2 + B(x^2+y^2) + 2Cxy - 1 = 0,$$

worin die Coefficienten A, B, C vor der Hand noch unbestimmt bleiben mögen. Um zu versuchen, ob die vorstehende Form der Differenzialgleichung genügt, geben wir $f(x,y)$ die beiden Gestalten:

$$f = (Ay^2+B)x^2 + 2Cy.x + (By^2-1) = Yx^2 + 2Y_1x + Y_2,$$
$$f = (Ax^2+B)y^2 + 2Cx.y + (Bx^2-1) = Xy^2 + 2X_1y + X_2,$$

worin Y, Y_1, Y_2, X, X_1, X_2 zur Abkürzung dienen, und entwickeln die beiden partiellen Differenzialquotienten:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(Yx+Y_1), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(Xy+X_1).$$

Substituiren wir sie in die aus der Gleichung $f(x,y) = 0$ folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0,$$

so wird:

$$(Yx+Y_1)dx + (Xy+X_1)dy = 0,$$

oder:

$$8)\qquad \frac{dx}{Xy+X_1} + \frac{dy}{Yx+Y_1} = 0.$$

Die zweite Form $f = Xy^2 + 2X_1y + X_2 = 0$ giebt ferner, wenn man sie als quadratische Gleichung behandelt:

$$Xy + X_1 = \sqrt{X_1^2 - XX_2}$$

ebenso die erste Form:

$$Yx + Y_1 = \sqrt{Y_1^2 - YY_2}$$

und indem man diese Werthe in Nro. 8) substituirt, erhält man:

$$9)\qquad \frac{dx}{\sqrt{X_1^2 - XX_2}} + \frac{dy}{\sqrt{Y_1^2 - YY_2}} = 0$$

als die Differenzialgleichung, welcher die in Nro. 7) gemachte Annahme genügt. Die Gleichung 7) würde nun das Integral der ursprünglichen Differenzialgleichung sein, wenn die Gleichungen 1) und 9) identisch wären. Vermöge der Werthe von X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 hat man statt Nro. 9) zu setzen:

$$\frac{dx}{\sqrt{1+\frac{A-B^2+C^2}{B}x^2-Ax^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1+\frac{A-B^2+C^2}{B}y^2-Ay^4}}=0,$$

woraus durch Vergleichung mit der Differenzialgleichung:

10) $$\frac{dx}{\sqrt{1+ax^2+bx^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1+ay^2+by^4}}=0$$

folgende Bedingungen hervorgehen:

11) $$A-B^2+C^2=Ba\,,\quad A=-b.$$

Hier lassen sich zwei der Coefficienten bestimmen, etwa $A=-b$, $C=\sqrt{B^2+Ba+b}$, der dritte (B) bleibt unbestimmt und ist die Integrationsconstante. Diese Untersuchung zeigt, dass in der That die Gleichung:

12) $$Ax^2y^2+B(x^2+y^2)+2Cxy-1=0$$

das allgemeine Integral der Differenzialgleichung 10) darstellt, sobald die Coefficienten A, B, C den in 11) ausgesprochenen Bedingungen genügen; letztere sind auch jederzeit erfüllbar, da man z.B. B immer so gross wählen kann, dass C reell wird.

Ausser der obigen rationalen Form ist noch die irrationale Form des Integrales von Wichtigkeit; man erhält sie auf folgendem Wege. Sei $1+ay^2+bx^4=f(x)$, so hat man nach dem Früheren:

$$Xy+X_1=\sqrt{X_1{}^2-XX_2}=\sqrt{B}\sqrt{1+\frac{A-B^2+C^2}{B}x^2-Ax^4}$$
$$=\sqrt{B}\sqrt{f(x)},$$

oder umgekehrt:

$$\sqrt{f(x)}=\frac{Xy+X_1}{\sqrt{B}}\text{ und }\sqrt{f(y)}=\frac{Yx+Y_1}{\sqrt{B}}.$$

Vermöge der Werthe von X, X_1, Y, Y_1 findet man hieraus sehr leicht:

$$x\sqrt{f(y)}+y\sqrt{f(x)}=\frac{2Ax^2y^2+B(x^2+y^2)+Cxy}{\sqrt{B}},$$

d. i. wenn man nach Nro. 12) $1-Ax^2y^2$ für $B(x^2+y^2)+2Cxy$ schreibt:

$$x\sqrt{f(y)}+y\sqrt{f(x)}=\frac{1+Ax^2y^2}{\sqrt{B}},$$

oder endlich, weil $A=-b$ und B eine beliebige Constante war:

13) $$\frac{x\sqrt{f(y)}+y\sqrt{f(x)}}{1-bx^2y^2}=Const.$$

Diese Integralgleichung ist für die Differenzialgleichung 10) dasselbe, was die Gleichung 4) in Beziehung auf die Differenzialgleichung 2); in der That werden beide für $a = -1$, $b = 0$ identisch.

Die Differenzialgleichung 10) steht in genauem Zusammenhange mit der Theorie elliptischer Integrale; betrachten wir nämlich die Gleichung:

14) $$\Lambda(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

als Definition der transcendenten Funktion $\Lambda(x)$, und verlangen wir die Angabe der Bedingungen, unter welchen die Gleichung:

15) $$\Lambda(x) + \Lambda(y) = \Lambda(s)$$

für ein gegebenes constantes s bestehen kann, so giebt die Differenziation:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0,$$

d. h. eine Gleichung, welche mit der Differenzialgleichung 10) übereinstimmt, sobald $a = -(1+k^2)$, $b = k^2$:

$$f(x) = (1-x^2)(1-k^2x^2)$$

gesetzt wird. Das Integral derselben ist folglich:

$$\frac{x\sqrt{f(y)} + y\sqrt{f(x)}}{1-k^2x^2y^2} = Const.$$

und hier bestimmt sich die Constante durch die Bemerkung, dass für $y = 0$, x in s übergeht; dies giebt $s = Const.$, also mit dem Vorigen:

16) $$s = \frac{x\sqrt{f(y)} + y\sqrt{f(x)}}{1-k^2x^2y^2}$$

als Bedingung für die Existenz der Gleichung 15), oder der mit ihr identischen:

17) $$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{f(s)}}.$$

Das vorstehende Resultat ist nichts Anderes, als das Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Art; für $x = \sin\varphi$, $y = \sin\psi$, $s = \sin\omega$ wird nämlich $\sqrt{f(x)} = \cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \cos\varphi\,.\,\Delta(\varphi)$, die Gleichung 17) geht in die folgende über:

$$F(\varphi) + F(\psi) = F(\omega),$$

und besteht unter der Bedingung:

$$\sin \omega = \frac{\sin \varphi \cos \psi \, \Delta(\psi) + \sin \psi \cos \varphi \, \Delta(\varphi)}{1 - k^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi},$$

welche mit der in §. 86 entwickelten Formel 15) übereinstimmt.

Dasselbe indirekte Verfahren der Integration durch Versuche ist auch auf die allgemeinere Differenzialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4}},$$

und auf manche ihr ähnliche anwendbar, doch werden die Entwickelungen zu weitläufig, als dass sie hier Platz finden könnten.

§. 104.

Integration durch Reihen.

Der vorigen Methode insofern ähnlich, als sie gleichfalls auf Voraussetzungen beruht, ist die Integration durch Reihen; sie gründet sich auf die einfache Bemerkung, dass das Integral $y = \varphi(x)$ einer Differenzialgleichung $F(x, y, y') = 0$ in vielen Fällen eine mittelst der Theoreme von Taylor oder Mac Laurin in Potenzenreihen verwandelbare Funktion sein wird, und dass es daher auch möglich sein muss, von der Differenzialgleichung aus zu derselben Reihe zu gelangen. Dies geschieht auf folgende Weise. Dem Theoreme von Taylor zufolge ist, wenn überhaupt eine Reihe für $\varphi(x)$ existirt:

$$1) \qquad \varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0) \frac{x - x_0}{1} + \varphi''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots,$$

wo x_0 einen beliebigen Spezialwerth von x bezeichnet. Denken wir uns die Differenzialgleichung $F(x, y, y')$ auf $y' = \varphi'(x)$ reduzirt, indem wir:

$$y' = \varphi'(x) = f_1(x, y)$$

setzen, so würde die successive Differenziation dieser Gleichung zu Ausdrücken von folgender Form führen:

$$\varphi''(x) = f_2(x, y), \qquad \varphi'''(x) = f_3(x, y) \text{ u. s. w.},$$

und für $x = x_0$ würden aus den bisherigen Gleichungen die nachstehenden werden:

$$2) \qquad \varphi'(x_0) = f_1(x_0, y_0), \qquad \varphi''(x_0) = f_2(x_0, y_0) \text{ u. s. w.},$$

in welchen Y_0 den individuellen Werth des y bezeichnet, der dem Werthe $x = x_0$ entspricht. Durch Substitution der unter Nro. 2) bemerkten Ausdrücke in Nro. 1) folgt nun:

3) $$y = y_0 + f_1(x_0, y_0)\frac{x - x_0}{1} + f_2(x_0, y_0)\frac{(x - x_0)^2}{1.2} + f_3(x_0, y_0)\frac{(x - x_0)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

und wenn die Reihe rechter Hand convergirt, so ist diese Auflösung zulässig; dagegen würde die Divergenz der Reihe ein Zeichen sein, dass y einer Potenzenreihe nicht gleich sein kann.

Die gegebene Differenzialgleichung sei z. B.

4) $$\varphi'(x) = y' = 1 + \lambda(y - x),$$

so giebt die successive Differenziation:

$$\varphi''(x) = y'' = \lambda(y' - 1) = \lambda^2(y - x),$$
$$\varphi'''(x) = y''' = \lambda^2(y' - 1) = \lambda^3(y - x)$$
u. s. w.,

und für $x = x_0$, $y = y_0$:

$$\varphi'(x_0) = 1 + \lambda(y_0 - x_0),$$
$$\varphi''(x_0) = \lambda^2(y_0 - x_0),$$
$$\varphi'''(x_0) = \lambda^3(y_0 - x_0)$$
u. s. w.;

mithin ist das gesuchte Integral:

$$y = y_0 + \frac{1 + \lambda(y_0 - x_0)}{1}(x - x_0) + \frac{\lambda^2(y_0 - x_0)}{1.2}(x - x_0)^2 + \frac{\lambda^3(y_0 - x_0)}{1.2.3}(x - x_0)^2 + \ldots,$$

oder auch:

$$y = \lambda + (y_0 - x_0)\left\{1 + \frac{\lambda(x - x_0)}{1} + \frac{\lambda^2(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots\right\}.$$

Die eingeklammerte Reihe convergirt immer und lässt sich leicht summiren, dies giebt:

$$y = x + (y_0 - x_0)e^{\lambda(x - x_0)} = x + (y_0 - x_0)e^{-\lambda x_0}e^{\lambda x},$$

d. i., wenn der constante Faktor mit C bezeichnet wird:

5) $$y = x + Ce^{\lambda x},$$

was man auch direkt leicht finden könnte.

Statt der Taylor'schen Reihe benutzt man häufig den Mac Laurin'schen Satz (d. h. man setzt $x_0 = 0$), in welchem Falle y die Form $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 +$ etc. erhält; die Coefficienten lassen sich entweder wie vorhin oder kürzer dadurch bestimmen, dass man die für y angenommene Form in die gegebene Gleichung substituirt und wie im vorigen Paragraphen die resultirende Gleichung zu einer identischen macht. Sei z. B.:

6) $$y' + y^2 = f(x)$$

die gegebene Differenzialgleichung und $f(x)$ eine Funktion von der Form $a_0 + a_1 x + a_1 x^2 +$ etc., so giebt die Annahme:

7) $$y = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots$$

statt der Gleichung 6) die folgende:

$$\begin{aligned} 1 A_1 + A^2 + (2 A_2 + 2 A A_1) x + (3 A_3 + 2 A A_2 + A_1^2) x^2 + \dots \\ = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \end{aligned}$$

welche offenbar richtig ist, wenn beiderseits x^0, x^1, x^2 u. s. w. dieselben Coefficienten besitzen; man findet daraus der Reihe nach:

8) $$A_1 = a_0 - A^2, \quad A_2 = \tfrac{1}{2}(a_1 - 2 a_0 A + 2 A^3) \text{ u. s. w.,}$$

d. h. die Werthe aller Coefficienten mit Ausnahme von A, welcher unbestimmt bleibt und die Integrationsconstante ist.

Das obige Verfahren beruht auf der stillschweigenden Voraus setzung, dass die der Differenzialgleichung $F(x, y, y') = 0$ genügende Funktion $y = \varphi(x)$ in eine Reihe von der Form $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 +$ etc. verwandelbar sei, und wird daher in allen den Fällen unrichtig, wo jene Voraussetzung nicht zutrifft. Die Rechnung zeigt dies immer von selbst an und nöthigt dann zu einer anderen Annahme. Ist z. B.:

9) $$y' = 2 - \frac{y}{x}$$

die gegebene auf gewöhnlichem Wege leicht integrable Differenzialgleichung, so würde die Supposition $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 +$ etc. zu der Gleichung:

$$\begin{aligned} A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + \dots \\ = 2 - \frac{A_0}{x} - A_1 - A_2 x - A_3 x^2 - \dots \end{aligned}$$

führen, welche nur durch die Werthe $A_0 = 0$, $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 \dots = 0$ zu befriedigen ist. Dies gäbe $y = x$, d. h. ein partikuläres Integral, weil keine willkürliche Constante vorkommt. Um das allgemeine Integral zu finden, machen wir die allgemeinere Voraussetzung:

10) $$y = A x^{\mu} + A_1 x^{\mu+1} + A_2 x^{\mu+2} + \dots,$$

welche die folgende Gleichung liefert:

$$\mu A x^{\mu-1} + (\mu+1) A_1 x^{\mu} + (\mu+2) A_2 x^{\mu+1} + \ldots.$$
$$= 2 - A x^{\mu-1} - A_1 x^{\mu} - A_2 x^{\mu+1} - \ldots..$$

Dieser kann man durch $\mu = -1$ genügen; sie wird dann:

$$-\frac{A}{x^2} + A_2 + 2 A_3 x + 2 A_4 x^2 + \ldots.$$
$$= 2 - \frac{A}{x^2} - \frac{A_1}{x} - A_2 - A_3 x - A_4 x^2 - \ldots.,$$

und es folgen daraus für A_1, A_2, A_3 etc. die Werthe:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = A_4 \ldots = 0,$$

während A unbestimmt bleibt. Das gesuchte Integral ist demnach:

11) $$y = \frac{A}{x} + x.$$

Der allgemeineren Voraussetzung 10) wird man sich überhaupt in vielen der Fälle bedienen, wo die erste Form der Potenzenreihe unrichtig wird.

Weiter noch reicht man oft mit der Annahme, dass y der Quotient zweier Reihen von der Form 10) sei, und es kann dabei ein doppelter Vortheil gewonnen werden. Man findet nämlich häufig, dass eine an sich noch ziemlich einfache Funktion bei der Verwandlung in eine Reihe sehr zusammengesetzte Coefficienten liefert, während sie, als Quotient zweier Reihen betrachtet, viel weniger complicirt erscheint. So sind z. B. in der Gleichung:

$$\tan x = A_1 x + A_3 x^3 + A_5 x^5 + \ldots.$$

die Grössen A_1, A_3, A_5, ... von sehr verwickelter Zusammensetzung, während die Coefficienten in:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{b_1 x - b_3 x^3 + b_5 x^5 - \ldots.}{a_0 - a_2 x^2 + a_4 x^4 - \ldots.}$$

nach einem äusserst einfachen Gesetze fortschreiten. Dazu kommt noch der wesentliche Umstand, dass die zweite Form von $\tan x$ für alle x, die erste dagegen nur für solche x gilt, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen. Um das in solchen Fällen eingetretene Verfahren an einem Beispiele zu zeigen, wollen wir die Differenzialgleichung:

12) $$y' + y^2 = \lambda x$$

behandeln, welche den direkten Methoden Trotz bieten und, auf dieselbe Weise wie Nro. 6) integrirt, eine Reihe von nicht übersehbarem Bildungsgesetze liefern würde. Bezeichnen wir mit $\varphi(x)$ und

$\psi(x)$ zwei nach Potenzen von x fortschreitende Reihen und setzen:

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \tag{13}$$

so geht die Gleichung 12) in die folgende über:

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\varphi(x)^2 - \varphi(x)\psi'(x)}{\psi(x)^2} = \lambda x,$$

und diese wird sehr einfach, wenn wir $\varphi(x) = \psi'(x)$ setzen; wir erhalten nämlich:

$$\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = \lambda x \text{ oder } \psi''(x) = \lambda x\, \psi(x).$$

Die weitere Annahme:

$$\psi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots.$$

giebt nun durch Substitution in die vorige Gleichung:

$$\begin{aligned} 1.2 A_2 &+ 2.3 A_3 x + 3.4 A_4 x^2 + 4.5 A_5 x^3 + \dots. \\ &= A_0 \lambda x + A_1 \lambda x^2 + A_2 \lambda x^3 + \dots, \end{aligned}$$

und daraus folgen für die Coefficienten die Werthe:

$$A_2 = A_5 = A_8 = A_{11} \dots = 0,$$

$$A_3 = \frac{\lambda}{2.3} A_0, \qquad A_6 = \frac{\lambda^2}{2.3.5.6}, \qquad A_9 = \frac{\lambda^3}{2.3.5.6.8.9}, \dots.$$

$$A_4 = \frac{\lambda}{3.4} A_1, \qquad A_7 = \frac{\lambda^2}{3.4.6.7} \qquad A_{10} = \frac{\lambda^3}{3.4.6.7.9.10}, \dots.$$

welche nach einem leicht zu erkennenden Gesetze fortschreiten; A_0 und A_1 bleiben vor der Hand noch unbestimmt. Führen wir zur Abkürzung folgende Bezeichnung ein:

$$X_0 = 1 + \frac{\lambda x^3}{2.3} + \frac{\lambda^2 x^6}{2.3.5.6} + \frac{\lambda^3 x^9}{2.3.5.6.8.9} + \dots,$$

$$X_1 = x + \frac{\lambda x^4}{3.4} + \frac{\lambda^2 x^7}{3.4.6.7} + \frac{\lambda^3 x^{10}}{3.4.6.7.9.10} + \dots,$$

wo X_0 und X_1 die Summen zweier jederzeit convergirender Reihen sind, so haben wir:

$$\psi(x) = A_0 X_0 + A_1 X_1,$$
$$\psi'(x) = A_0 X'_0 + A_1 X'_1,$$

und der Werth von $y = \varphi(x) : \psi(x) = \psi'(x) : \psi(x)$ ist:

$$y = \frac{A_0 X'_0 + A_1 X'_1}{A_0 X_0 + A_1 X_1},$$

oder endlich, wenn der Quotient $A_1 : A_0$ mit C bezeichnet wird:

$$14)\qquad y = \frac{X'_0 + CX'_1}{X_0 + CX_1}.$$

In ähnlicher vortheilhafter Form würde sich die allgemeinere sogenannte Riccati'sche Gleichung:

$$y' + ax^2 = by^m$$

integriren lassen; doch versparen wir weitere Untersuchungen hierüber bis dahin, wo die Differenzialgleichungen höherer Ordnungen behandelt worden sind.

Cap. XX.

Differenzialgleichungen höherer Ordnungen zwischen zwei Variabelen.

§. 105.

Differenzialgleichungen zweiter Ordnung; einfachste Formen.

Eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung zwischen zwei Variabelen x und y hat im Allgemeinen die Form:

$$1) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

oder, auf den zweiten Differenzialquotienten reduzirt,

$$2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

und die Aufgabe ist wie früher y als Funktion von x zu bestimmen. Den Sinn dieses Problemes kann man sich auf ähnliche Weise verdeutlichen, wie es in §. 98 bei den Differenzialgleichungen erster Ordnung geschah. Man betrachte nämlich x und y als rechtwinklige Coordinaten eines Curvenpunktes, mithin $\frac{dy}{dx}$ als die Tangente des Winkels, welchen das Curvenelement ds mit der Abscissenachse bildet, und beachte, dass mittelst der zweiten Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2}$ einen bestimmten Werth erhält, sobald x, y, und $\frac{dy}{dx}$ gegeben sind; die Construktion der fraglichen Curve geschieht dann auf folgende Weise. Man gehe von einem beliebigen Punkte $x_0\, y_0$ aus, wähle den entsprechenden Werth von $\frac{dy}{dx} = y'$ gleichfalls willkürlich, etwa $= y_0'$, und berechne den zugehörigen Werth von $\frac{d^2 y}{d x^2} = y''$, welcher y_0'' heissen möge; wäre nun $y = \varphi(x)$ die Gleichung der gesuchten Curve, so würden für unendlich kleine δ die Beziehungen:

$$\frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\delta} = \varphi'(x),$$

$$\frac{\varphi(x+2\delta) - 2\varphi(x+\delta) + \varphi(x)}{\delta^2} = \varphi''(x),$$

oder

$$\varphi(x+\delta) = \varphi(x) + \delta\varphi'(x),$$

$$\varphi(x+2\delta) = 2\varphi(x+\delta) - \varphi(x) + \delta^2\varphi''(x)$$

stattfinden und dazu dienen, um aus $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ der Reihe nach $\varphi(x+\delta)$ und $\varphi(x+2\delta)$ abzuleiten; in unserem Falle sind für $x = x_0$ jene Werthe in der That bekannt, man kann also, von dem Punkte $x_0 y_0$ ausgehend, zwei neue unendlich naheliegende Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ bestimmen und zwar wären die Abscissen derselben:

$$x_1 = x_0 + \delta, \qquad x_2 = x_0 + 2\delta,$$

und die Ordinaten:

$$y_1 = y_0 + y_0'\delta, \quad y_2 = -y_0 + 2y_1 + y_0''\delta^2.$$

Betrachtet man jetzt $x_2 y_2$ als neuen Ausgangspunkt, so lassen sich wiederum zwei neue Punkte $x_3 y_3$, $x_4 y_4$ bestimmen u. s. w. Man ersieht aus dieser Construktion, dass die gegebene Differenzialgleichung das gemeinschaftliche Merkmal einer unendlichen Menge von gleichartigen Curven enthält; sie bestimmt jede dieser Curven vollständig, sobald ein Punkt $x_0 y_0$ der letzteren und die Richtung der Tangente in diesem Punkte, d. h. y_0' gegeben oder willkürlich angenommen ist. Im Allgemeinen bleiben also zwei Grössen in der Bestimmung von y beliebig, d. h. das allgemeine Integral einer Differenzialgleichung zweiter Ordnung enthält zwei Integrationsconstanten. Dies ist auch analytisch leicht einzusehen. Eine Gleichung zwischen x, y, y', y'' würde durch einmalige Integration zu einer Gleichung zwischen x, y, y', d. h. zu einer Differenzialgleichung erster Ordnung werden, welche nach den früheren Methoden zu integriren ist; auf jeden Fall bedarf es im Ganzen zweier Integrationen, deren jede eine willkürliche Constante mit sich bringt, und demnach muss das gesuchte y von der Form $\varphi(x, C, C_1)$ sein*).

*) Eine Ausnahme würde die obige Behauptung in dem Falle erleiden, wo man entweder bei der ersten oder bei der zweiten Integration statt des allgemeinen Integrales das singuläre Integral nähme. In jedem speziellen

Diese Bemerkung deutet zugleich den Weg an, der bei der Integration der Differenzialgleichungen zweiter Ordnung meistentheils eingeschlagen werden muss, wie man aus den nachherigen Beispielen sehen wird.

Wir betrachten zuerst die einfachsten Formen der Differenzialgleichung 2), bei welchen zugleich die Integration vollständig ausführbar ist.

Erste Form. Die rechte Seite von Nro. 2) enthalte x allein, sei kurz $f(x) = X$, mithin:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = X. \tag{3}$$

Die Gleichung ist offenbar identisch mit $\frac{dy'}{dx} = X$, woraus

$$y' = \frac{dy}{dx} = \int X dx + C$$

folgt; die zweite Integration liefert ebenso leicht:

$$y = \int dx \int X dx + Cx + C_1.$$

Eine bequemere Form erhält das Integral durch die Bemerkung, dass bei theilweiser Integration:

$$\int x X dx = x \int X dx - \int dx \int X dx$$

ist, mithin das Doppelintegral als Differenz zweier einfacheren Ausdrücke angesehen werden kann; dies giebt:

$$y = x \int X dx - \int x X dx + Cx + C_1. \tag{4}$$

Zweite Form. Der zweite Differenzialquotient von y sei als Funktion von y allein gegeben, nämlich:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Y. \tag{5}$$

Hier kann man statt der linken Seite den Ausdruck:

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy} y'$$

eintreten lassen, und es sind in der nunmehrigen Gleichung:

Falle lassen sich die so entstehenden singulären Integrale der Differenzialgleichung ohne wesentliche Schwierigkeit entwickeln, indem man bei der betreffenden Integration die Lehren des §. 102 in Anwendung bringt; ebendeswegen werden wir in den folgenden Untersuchungen den singulären Integralen keine besondere Aufmerksamkeit mehr widmen.

$$y' \frac{dy'}{dy} = Y \text{ oder } y'dy' = Ydy$$

die Variabelen gesondert. Das erste Integral der Gleichung 5) ist daher:

$$\tfrac{1}{2}y'^2 = Const. + \int Ydy \text{ oder } y' = \sqrt{C + 2\int Ydy}.$$

Vermöge des Werthes von y' erhält man daraus:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int Ydy}}$$

und durch nochmalige Integration:

6) $$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int Ydy}} + C_1.$$

Ein für spätere Untersuchungen nicht unwichtiges Beispiel bildet die Differenzialgleichung:

7) $$\frac{d^2y}{dx^2} = k^2y.$$

Hier ist $2\int Ydy = k^2y^2$, mithin das vollständige Integral:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + k^2y^2}} + C_1 = \frac{1}{k} l(ky + \sqrt{C + k^2y^2}) + C_1;$$

um auf y zu reduziren, bilde man daraus die Gleichung:

$$e^{k(x-C_1)} - ky = \sqrt{C + k^2y^2},$$

und quadrire dieselbe; man findet sehr leicht:

$$y = \tfrac{1}{2}\left\{e^{k(x-C_1)} - Ce^{-k(x-C_1)}\right\};$$

d. i. wenn man zur Abkürzung die constanten Faktoren

$$\tfrac{1}{2}e^{-kC_1} = A, \quad -\tfrac{1}{2}Ce^{kC_1} = B$$

setzt, wo nun A und B ebenso willkürliche Constanten wie früher C und C_1 sind:

8) $$y = Ae^{kx} + Be^{-kx}.$$

Wäre dagegen die Differenzialgleichung gegeben:

9) $$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2y,$$

so würde man $2\int Ydy = -k^2y^2$ erhalten und daraus:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C - k^2y^2}} + C_1 = \frac{1}{k} Arcsin \frac{ky}{\sqrt{C}} + C_1,$$

und umgekehrt:

$$y = \frac{\sqrt{C}}{k} \sin k(x - C_1),$$

oder wenn man auflöst und die Constanten ändert:

10) $$y = A_1 \cos kx + B_1 \sin kx.$$

Dieses Resultat hätte sich übrigens aus den vorigen dadurch herleiten lassen, dass man $k\sqrt{-1} = ki$ an die Stelle von k treten liess, die Gleichung:

$$e^{\pm kxi} = \cos kx \pm i \sin kx$$

benutzte und zuletzt $A + B = A_1$, $(A - B)i = B_1$ setzte*).

Dritte Form. Die Differenzialgleichung enthalte nur den ersten und zweiten Differenzialquotienten der Unbekannten, es sei also:

11) $$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ oder } \frac{dy'}{dx} = f(y').$$

In der zweiten Gestalt sind die Variabelen leicht zu trennen, nämlich:

12) $$dx = \frac{dy'}{f(y')} \text{ also } x = \int \frac{dy'}{f(y')} + C.$$

Um ferner y zu finden, hat man:

---

*) Auf das obenentwickelte Integral der Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ay\,, \qquad a = \pm k^2$$

lässt sich das der folgenden (nicht zur zweiten Form gehörenden) Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ay + bx + c$$

zurückführen. Giebt man ihr nämlich die Gestalt:

$$y'' = ay + bx + c$$

und differenzirt zweimal, so wird:

$$\frac{d^2y''}{dx^2} = ay''.$$

Diese Gleichung stimmt mit der ersten überein und ihr Integral ist bei positiven $a = +k^2$:

$$y'' = Ae^{kx} + Be^{-kx},$$

und bei negativen $a = -k^2$:

$$y'' = A_1 \cos kx + B_1 \sin kx.$$

Andererseits folgt aus $y'' = ay + bx + c$ umgekehrt:

$$y = \frac{y'' - bx - c}{a},$$

und indem man den Werth von y'' substituirt, ergiebt sich y. — Wäre die Gleichung allgemeiner $y'' = ay + \psi(x)$, so würde dieser Kunstgriff nichts helfen, sondern ein anderes Verfahren eintreten müssen, welches in §. 107 auseinandergesetzt ist.

13) $$dy = y'\,dx = y'\,\frac{dy'}{f(y')},\ \text{folglich}\ y = \int \frac{y'\,dy'}{f(y')} + C_1.$$

Die Integralformeln in 12) und 13) geben x und y ausgedrückt durch die dritte Variabele y'; eliminirt man sie aus beiden Gleichungen, so bleibt eine Gleichung zwischen x, y, C, C_1 übrig, welche das allgemeine Integral ist.

Auf eine Gleichung von der Form 11) führt z. B. das geometrische Problem: aus einer gegebenen Relation zwischen dem Krümmungshalbmesser C eines Curvenpunktes xy und zwischen dem Winkel ω, welchen dieser Krümmungshalbmesser mit der Ordinatenachse bildet, die Gleichung der Curve in rechtwinkligen Coordinaten abzuleiten. Ist nämlich $\varrho = F(\omega)$ die gegebene Beziehung, so hat man vermöge der Bemerkung, dass $\omega = \tau$, $\tan\omega = y'$ und $\varrho = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} : y''$ ist,

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = F(\operatorname{Arctan} y'),$$

oder umgekehrt:

$$y'' = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{F(\operatorname{Arctan} y')},$$

mithin nach den Formeln 12) und 13):

$$x = \int \frac{F(\operatorname{Arctan} y')}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,dy' + C,$$

$$y = \int \frac{y'\,F(\operatorname{Arctan} y')}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,dy' + C_1.$$

Betrachtet man nicht y', sondern $\operatorname{Arctan} y' = \omega$ als unabhängige Variabele, setzt also $y' = \tan\omega$, so gewinnen die obigen Gleichungen die symmetrische Gestalt:

$$x = \int F(\omega)\cos\omega\,d\omega + A,$$

$$y = \int F(\omega)\sin\omega\,d\omega + B,$$

und man kann am Ende, wenn es sonst möglich ist, ω eliminiren. Für $\varrho = a\sec\omega$ z. B. ergiebt sich $x = a\omega + A$, $y = a\,l\sec\omega + B$ oder:

$$y - B = a\,l\sec\frac{x-A}{a},$$

als Gleichung der gesuchten Curve.

Eine ähnliche geometrische Aufgabe ist: die Gleichung einer krummen Linie in rechtwinkligen Coordinaten auszudrücken, wenn der Bogen s eine gegebene Funktion des Winkels τ sein soll, den die Tangente am Endpunkte des Bogens mit der Abscissenachse einschliesst. Aus $s = F(\tau)$ folgt hier:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2} = F'(\tau)\frac{d\tau}{dx},$$

und weil $\tau = Arctan\, y'$:

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{F'(Arctan\, y')}{1+y'^2}y'', \quad y'' = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{F'(Arctan\, y')}.$$

Benutzt man die Gleichungen 12) und 13) und setzt nachher $Arctan\, y' = \tau$ wieder ein, so findet man sehr leicht:

$$x = \int F'(\tau)\cos\tau\, d\tau + A.$$

$$y = \int F'(\tau)\sin\tau\, d\tau + B.$$

woraus τ zu eliminiren ist. So erhält man z. B. für $s = 4k\cos\tau$:

$$x - A = k(2\tau - \sin 2\tau),$$

$$y - B = -k\cos 2\tau,$$

und wenn man 2τ mit einem einzigen Buchstaben t bezeichnet, $x - A = u$, $y - B = v - k$ setzt, so lehrt die Vergleichung mit den Werthen von u und v auf S. 66, dass die gesuchte Curve eine gewöhnliche Cycloide mit k als Halbmesser des erzeugenden Kreises ist.

§. 106.

Fortsetzung und Schluss.

Vierte Form. In der Differenzialgleichung mögen nur x, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ vorkommen, sie sei also:

1) $$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \text{ oder } y'' = f(x, y').$$

Giebt man ihr die Gestalt:

2) $$\frac{dy'}{dx} = f(x, y'),$$

so enthält sie nur die beiden Variabelen x und y' und ist in Beziehung auf y' eine Differenzialgleichung erster Ordnung; man findet daraus y' und zwar in der Form:

$$3)\qquad y' = \frac{dy}{dx} = \varphi(x), \text{ mithin } y = \int \varphi(x)\,dx + Const.$$

Dieses Verfahren passt z. B. auf das geometrische **Problem**, die Curve zu finden, in welcher der **Krümmungshalbmesser** eine vorgeschriebene Funktion der zugehörigen Abscisse ist, etwa $\varrho = \psi(x)$. Die Differenzialgleichung lautet hier:

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \psi(x),$$

oder auf y'' reduzirt:

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{(1+y')^{\frac{3}{2}}}{\psi(x)},$$

was mit Nro. 1) übereinstimmt. Die Trennung der Variabelen giebt:

$$\frac{dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{\psi(x)}.$$

Durch Integration folgt hieraus:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \int \frac{dx}{\psi(x)} + C = X + C,$$

wo X zur Abkürzung eingeführt ist; man hat nun weiter:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{X+C}{\sqrt{1-(X+C)^2}},$$

also bei nochmaliger Integration:

$$y = \int \frac{X+C}{\sqrt{1-(X+C)^2}}\,dx + C_1.$$

So würde z. B. $\varrho = \frac{x^2}{a}$ folgende Werthe bringen:

$$X = -\frac{a}{x}, \qquad y = \int \frac{Cx-a}{\sqrt{x^2-(Cx-a)^2}}\,dx + C_1,$$

die noch übrige Integration ist leicht auszuführen und giebt verschiedene Curven, jenachdem man die willkürliche Constante der Einheit gleich, oder kleiner oder grösser wählt; im ersten Falle erhält man eine algebraische Curve, nämlich:

$$y = \tfrac{1}{3}(x-2a)\sqrt{\frac{2x-a}{a}} + C_1;$$

im zweiten Falle ist die Curve logarithmischer Natur, im letzten Falle hängt sie von der Funktion *Arcsin* ab.

F ü n f t e F o r m. Die gegebene Differenzialgleichung enthalte nur y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ nach dem Schema:

4) $$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right), \text{ oder } y'' = f(y, y').$$

Lässt man, wie es schon früher geschah,

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy} y'$$

an die Stelle von y'' treten, so nimmt die Gleichung folgende Gestalt an:

5) $$y' \frac{dy'}{dy} = f(y, y'),$$

und ist eine Differenzialgleichung erster Ordnung zwischen den bei den Variabelen y und y'; man findet daraus:

6) $$y' = \frac{dy}{dx} = \varphi(y),$$

mithin bei Trennung der Variabelen und Integration:

7) $$x = \int \frac{dy}{\varphi(y)} + Const.$$

Nach dieser Methode lässt sich z. E. das geometrische Problem lösen: die Curve zu finden, in welcher der Krümmungshalbmesser eine gegebene Funktion der zugehörigen Ordinate ist, etwa $\varrho = \psi(y)$. Die Differenzialgleichung lautet nämlich:

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \psi(y) \text{ oder } y'' = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\psi(y)}.$$

formell übereinstimmend mit Nro. 4. Nach dem angezeigten Verfahren wird:

$$\frac{y'\,dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dy}{\psi(y)},$$

und durch Integration:

$$-\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \int \frac{dy}{\psi(y)} + C = Y + C,$$

wo Y zur Abkürzung dient. Der Werth von y' ist jetzt:

$$y' = \frac{\sqrt{1-(Y+C)^2}}{Y+C} = \frac{dy}{dx},$$

mithin die Gleichung der gesuchten Curve:

$$x = \int \frac{Y+C}{\sqrt{1-(Y+C)^2}}\, dy + C_1.$$

Das Resultat hat mit dem der vorigen geometrischen Aufgabe viel Aehnlichkeit; in der That sind beide Probleme nicht wesentlich verschieden, da man nur x mit y und entsprechend X mit Y zu vertauschen braucht, um das eine aus dem anderen abzuleiten.

Als zweite geometrische Anwendung diene die Bestimmung der Curven, in welchen der Krümmungshalbmesser mit der zugehörigen Normale in gegebenem constanten Verhältnisse steht. Aus der genannten Bedingung folgt unmittelbar, wenn $1 : \mu$ jenes Verhältniss ist:

$$\mu\, \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = y\sqrt{1+y'^2},$$

oder:

$$y y'' = \mu(1+y'^2).$$

Die Substitution $y'' = y' \dfrac{dy'}{dy}$ giebt bei Sonderung der Variabelen:

$$\frac{y'\, dy'}{1+y'^2} = \mu\, \frac{dy}{y},$$

ferner durch Integration, wenn die Constante mit $\mu l b$ bezeichnet wird:

$$\tfrac{1}{2} l(1+y'^2) = \mu\, l\left(\frac{y}{b}\right), \quad y' = \frac{\sqrt{y^{2\mu} - b^{2\mu}}}{b^{\mu}},$$

endlich:

$$x = b^{\mu} \int \frac{dy}{\sqrt{y^{2\mu} - b^{2\mu}}} + a.$$

Man findet mittelst dieser Formel sehr leicht, dass die Curve für $\mu = -1$ ein Kreis, für $\mu = +1$ eine Kettenlinie*), für $\mu = -\frac{1}{2}$ eine Cycloide und für $\mu = +\frac{1}{2}$ eine Parabel ist.

Als letztes Beispiel für dieses Verfahren diene die Behandlung der Aufgabe: die Gleichung der Curve zu finden, deren Bögen proportional den an die Endpunkte derselben gelegten Tangenten sind.

---

*) Die Gleichung derselben in rechtwinkligen Coordinaten ξ, η ist:

$$\eta = \tfrac{1}{2} k \left(e^{\frac{\xi}{k}} + e^{-\frac{\xi}{k}}\right),$$

wo k die im Anfangspunkte stehende Ordinate, den sogenannten Parameter bezeichnet.

Rechnen wir den Bogen s von einem Punkte aus, dessen Abscisse a ist, und bezeichnen wir mit $1 : \mu$ das Verhältniss des Bogens zur Tangente, so lautet die Bedingungsgleichung:

$$\mu \int_a^x \sqrt{1+y'^2}\, dx = \frac{y}{y'} \sqrt{1+y'^2};$$

aus ihr folgt durch Differenziation und Reduktion auf y'':

$$y'' = (1-\mu) \frac{y'^2(1+y'^2)}{y},$$

und mittelst der für y'' angegebenen Substitution:

$$\frac{dy'}{dy} = (1-\mu) \frac{y'(1+y'^2)}{y}.$$

Die Sonderung der Variabelen giebt weiter:

$$\frac{dy'}{y'(1+y'^2)} = (1-\mu) \frac{dy}{y},$$

und die Integration dieser Gleichung, wenn die Integrationsconstante mit $-(1-\mu) l k$ bezeichnet wird:

$$l y' - \tfrac{1}{2} l (1+y'^2) = (1-\mu) l \left(\frac{y}{k}\right) = l \left(\frac{y}{k}\right)^{1-\mu}$$

oder:

$$l \left(\frac{y'^2}{1+y'^2}\right) = l \left(\frac{y}{k}\right)^{2-2\mu}.$$

Der Werth von y', durch y ausgedrückt, ist demnach:

$$y' = \frac{y^{1-\mu}}{\sqrt{k^{2-2\mu} - y^{2-2\mu}}} = \frac{dy}{dx},$$

mithin die Gleichung der gesuchten Curve:

$$x = \int dy \sqrt{\left(\frac{y}{k}\right)^{2\mu-2} - 1} + h.$$

Die Integrationsconstanten h und k bestimmen sich im speziellen Falle durch die zwei Bedingungen, dass $s = 0$ werden muss für $x = a$, und dass die Curve durch einen gegebenen Punkt $x_0 y_0$ gehen soll. Die Gleichung der gesuchten Curve ist übrigens für $\mu = \frac{3}{2}$ algebraisch und zwar:

$$(x-h)^2 = \tfrac{4}{9} \frac{(y-k)^3}{k},$$

in allen übrigen Fällen aber transcendent.

§. 107.

Die linearen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung.

Unter einer linearen Differenzialgleichung versteht man wie früher eine solche, in der sowohl y als die Differenzialquotienten dieser Funktion nur in der ersten Potenz vorkommen; demnach ist die Gleichung:

$$1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+X_1\frac{dy}{dx}+X_2y=X,$$

worin X_1, X_2 und X als Funktionen von x allein angesehen werden, das allgemeine Schema einer linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung.

I. Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, wenn nämlich $X=0$, X_1 und X_2 constant sind, so lässt die Aehnlichkeit, die zwischen der Gleichung:

$$2)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0,$$

und der in §. 105 unter Nro. 7) betrachteten Differenzialgleichung stattfindet, auf eine ähnliche exponentiale Form des Integrales schliessen; wir setzen daher $y=e^{\lambda x}$, wo λ einen vor der Hand noch unbestimmten Coefficienten bedeutet. Aus der Differenzialgleichung 2) wird dann die algebraische Gleichung:

$$3)\qquad \lambda^2+a\lambda+b=0,$$

und diese ist erfüllbar, indem man λ gleich einer von den beiden Wurzeln dieser Gleichung nimmt. Bezeichnen wir die letzteren mit λ_1 und λ_2, so genügt jede der Funktionen:

$$y=e^{\lambda_1x} \text{ und } y=e^{\lambda_2x}$$

der aufgestellten Differenzialgleichung. Indessen sind sie nur partikuläre Integrale derselben, da ihnen willkürliche Constanten abgehen. Man sieht aber auf der Stelle, dass auch die allgemeineren Ausdrücke:

$$C_1e^{\lambda_1x} \text{ und } C_2e^{\lambda_2x},$$

wo C_1 und C_2 beliebige constante Faktoren sind, die Differenzialgleichung befriedigen und man kann nun leicht das allgemeine Integral aus den obigen Ausdrücken zusammensetzen; es ist:

$$4)\qquad y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x},$$

was man ohne Mühe prüfen wird. Das hiermit gefundene Integral bedarf keiner weiteren Erörterung, wenn die Wurzeln λ_1 und λ_2 der quadratischen Hülfsgleichung 3) reell und verschieden, wohl aber für die Fälle, wo sie gleich (also reell) oder imaginär sind.

Für $\lambda_2 = \lambda_1$ würde die Formel 4) zur folgenden werden:

$$y = (C_1 + C_2) e^{\lambda_1 x} = Const.\, e^{\lambda_1 x},$$

und nicht mehr das allgemeine Integral der ursprünglichen Differenzialgleichung darstellen; man erhält dann letzteres auf folgendem Wege. Sei δ die Differenz zwischen λ_2 und λ_1, mithin $\lambda_2 = \lambda_1 + \delta$, so ist nach Nro. 4), indem man die Exponentialreihe benutzt:

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 e^{\delta x}) \\ &= e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 + C_2 \delta x + \tfrac{1}{2} C_2 \delta^2 x^2 + \ldots), \end{aligned}$$

oder wenn $C_1 + C_2 = C$ und $C_2 \delta = C'$ gesetzt wird, wo nun C und C' ebenso beliebig sind wie früher C_1 und C_2:

$$y = e^{\lambda_1 x}(C + C' x + \tfrac{1}{2} C' \delta x^2 + \tfrac{1}{6} C' \delta^2 x^3 + \ldots).$$

Für $\delta = 0$ werden λ_1 und λ_2 gleich und es ist für diesen Fall

5) $$y = (C + C' x) e^{\lambda_1 x}$$

das allgemeine Integral der Differenzialgleichung 2). Besitzt die quadratische Hülfsgleichung imaginäre Wurzeln, etwa:

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \qquad \lambda_2 = \alpha - \beta i,$$

so verwandelt sich die Formel 4) in die folgende:

$$y = C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - i \sin\beta x),$$

d. i. wenn $C_1 + C_2 = A$ und $(C_1 - C_2) i = B$ gesetzt wird:

6) $$y = e^{\alpha x}(A \cos\beta x + B \sin\beta x).$$

II. Die allgemeinere Differenzialgleichung:

7) $$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = X$$

lässt sich dadurch integriren, dass man dem y eine ähnliche Form wie Nro. 4) giebt, sie aber dahin verallgemeinert, dass die Coefficienten C_1 und C_2 nicht mehr als constant, sondern als zwei unbekannte Funktionen von x angesehen werden. Nehmen wir also:

8) $$y = u_1 e^{\lambda_1 x} + u_2 e^{\lambda_2 x},$$

wo λ_1 und λ_2 dieselbe Bedeutung wie vorhin haben, so wird:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lambda_1 u_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 u_2 e^{\lambda_2 x} \\ &\quad + e^{\lambda_1 x} \frac{du_1}{dx} + e^{\lambda_2 x} \frac{du_2}{dx}, \end{aligned}$$

und da wir über u_1 und u_2 noch disponiren können, so dürfen wir voraussetzen, dass:

$$9)\qquad e^{\lambda_1 x}\frac{du_1}{dx}+e^{\lambda_2 x}\frac{du_2}{dx}=0$$

sei, wodurch sich die vorige Gleichung auf die erste Reihe reduzirt. Differenziren wir die nunmehrige Gleichung:

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_1 u_1 e^{\lambda_1 x}+\lambda_2 u_2 e^{\lambda_2 x}$$

noch einmal, so wird:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\lambda_1{}^2 u_1 e^{\lambda_1 x}+\lambda_2{}^2 u_2 e^{\lambda_2 x}+\lambda_1 e^{\lambda_1 x}\frac{du_1}{dx}+\lambda_2 e^{\lambda_2 x}\frac{du_2}{dx}.$$

Wir substituiren nun die für y, y', y'' gefundenen Werthe in die ursprüngliche Differenzialgleichung, und erhalten dadurch:

$$(\lambda_1{}^2+a\lambda_1+b)\,u_1 e^{\lambda_1 x}+(\lambda_2{}^2+a\lambda_2+b)\,u_2 e^{\lambda_2 x}$$
$$+\lambda_1 e^{\lambda_1 x}\frac{du_1}{dx}+\lambda_2 e^{\lambda_2 x}\frac{du_2}{dx}=X,$$

welche Gleichung sich bedeutend vereinfacht, wenn man bemerkt, dass $\lambda^2+a\lambda+b$ für $\lambda=\lambda_1$ und für $\lambda=\lambda_2$ verschwindet; es bleibt nämlich:

$$10)\qquad \lambda_1 e^{\lambda_1 x}\frac{du_1}{dx}+\lambda_2 e^{\lambda_2 x}\frac{du_2}{dx}=X.$$

Die Gleichungen 9) und 10) dienen zur Bestimmung der Differenzialquotienten von u_1 und u_2, mithin auch zur Ermittelung von u_1 und u_2 selbst; man findet:

$$\frac{du_1}{dx}=\frac{Xe^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1-\lambda_2},\qquad u_1=\frac{C_1+\int Xe^{-\lambda_1 x}\,dx}{\lambda_1-\lambda_2},$$
$$\frac{du_2}{dx}=\frac{Xe^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2-\lambda_1},\qquad u_2=\frac{C_2+\int Xe^{-\lambda_2 x}\,dx}{\lambda_2-\lambda_1},$$

wo C_1 und C_2 die Integrationsconstanten bezeichnen; nach Formel 8) ist jetzt:

$$11)\qquad y=\frac{(C_1+\int Xe^{-\lambda_1 x}\,dx)\,e^{\lambda_1 x}-(C_2+\int Xe^{-\lambda_2 x}\,dx)\,e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1-\lambda_2}$$

das allgemeine Integral der Differenzialgleichung 7). — Für $\lambda_1=\lambda_2$ bedarf die Formel einer Modifikation, die sich auf ähnliche Weise wie in I. ausführen lässt. Setzen wir nämlich $\lambda_2-\lambda_1=\delta$, also $\lambda_2=\lambda_1+\delta$, so wird:

$$y = -e^{\lambda_1 x}\frac{(C_1 + \int Xe^{-\lambda_1 x}\,dx) - (C_2 + \int Xe^{-\lambda_1 x}e^{-\delta x}\,dx)e^{\delta x}}{\delta},$$

und durch Entwickelung der Grössen $e^{\delta x}$ und $e^{-\delta x}$:

$$y = \frac{e^{\lambda_1 x}}{\delta}\{C_2 - C_1 + C_2\,\delta x + \delta x\int Xe^{-\lambda_1 x}dx - \delta\int xXe^{-\lambda_1 x}dx + \text{etc.}\},$$

wo unter „etc.“ alle die Glieder verstanden sind, die δ^2, δ^3, δ^4 etc. als Faktoren enthalten; für $C_2 - C_1 = C\delta$ und indem man $C'\delta x$ für $C_2\delta x$ schreibt, lässt sich δ heben, und schliesslich ergiebt sich für $\delta = 0$:

12) $$y = (C + C'x - \int xXe^{-\lambda_1 x}\,dx + x\int Xe^{-\lambda_1 x}\,dx)e^{\lambda_1 x}.$$

Wären endlich die Wurzeln λ_1 und λ_2 imaginär, so würde man wie früher $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ setzen; aus der Formel 11) wird in diesem Falle:

13) $$y = \frac{e^{\alpha x}}{\beta}\Big\{(A - \int Xe^{-\alpha x}\sin\beta x\;dx)\cos\beta x + (B + \int Xe^{-\alpha x}\cos\beta x\;dx)\sin\beta x\Big\}.$$

Als Beispiele mögen die Werthermittelungen einiger bestimmten Integrale dienen. Sei erstlich:

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}\,\frac{dt}{\varkappa^2 + t^2},$$

so giebt die ein- und zweimalige Differenziation, welche letztere gerade noch erlaubt ist:

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{\varkappa^2 + t^2}\,dt, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}\,\frac{t^2\,dt}{\varkappa^2 + t^2},$$

und hieraus kann man die Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \varkappa^2 y = -\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}\,dt = -\tfrac{1}{2}\pi$$

bilden; im Vergleich mit Nro. 7) ist $a = 0$, $b = -\varkappa^2$, $X = -\frac{1}{2}\pi$, ferner $\lambda = \pm\varkappa$, also vermöge der Formel 11):

$$y = Ae^{\varkappa x} + Be^{-\varkappa x} + \frac{\pi}{2\varkappa^2},$$

wo A und B neue willkürliche Constanten bezeichnen. Um sie im vorliegenden Falle zu bestimmen, bemerken wir, dass für $x = 0$ ursprünglich:

31*

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \int_0^\infty \frac{dt}{\varkappa^2 + t^2} = \frac{\pi}{2\varkappa}$$

wird; setzt man für y seinen nachherigen Werth, so sind diese Gleichungen:

$$A + B + \frac{\pi}{2\varkappa^2} = 0, \quad \varkappa A - \varkappa B = \frac{\pi}{2\varkappa},$$

woraus $A = 0$ und $B = -\frac{\pi}{2\varkappa^2}$ folgen. Die Vergleichung der früheren und späteren Werthe von y, y' und y'' liefert nun folgende drei Integralformeln:

$$\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t} \frac{dt}{\varkappa^2 + t^2} = \frac{\pi}{2\varkappa^2}(1 - e^{-\varkappa x}),$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos xt}{\varkappa^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2\varkappa} e^{-\varkappa x}, \quad \int_0^\infty \frac{t \sin xt}{\varkappa^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-\varkappa x},$$

welche mit den Resultaten des §. 92 übereinstimmen. Für ein zweites Beispiel sei:

$$y = \int_0^\infty \frac{dt}{\varkappa^2 + t^2} e^{-xt}$$

und x wesentlich positiv. Man findet sehr leicht:

$$\frac{dy}{dx} = -\int_0^\infty \frac{t\,dt}{\varkappa^2 + t^2} e^{-xt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = +\int_0^\infty \frac{t^2\,dt}{\varkappa^2 + t^2} e^{-xt},$$

und daraus die Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \varkappa^2 y = \int_0^\infty e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}.$$

Nach Formel 13) giebt dies für $\alpha = 0$, $\beta = \varkappa$, $X = \frac{1}{x}$

$$y = \left\{A - \int \frac{\sin \varkappa x}{x} dx\right\} \frac{\cos \varkappa x}{\varkappa} + \left\{B + \int \frac{\cos \varkappa x}{x} dx\right\} \frac{\sin \varkappa x}{\varkappa},$$

bei Aenderung der Integrationsconstanten darf man dafür schreiben:

$$y = \left\{A_1 - \int_0^{\varkappa x} \frac{\sin u}{u} du\right\} \frac{\cos \varkappa x}{\varkappa} + \left\{B_1 + \int_\infty^{\varkappa x} \frac{\cos u}{u} du\right\} \frac{\sin \varkappa x}{\varkappa},$$

wie sich unter Anderem leicht mittelst Reihenverwandlungen verifiziren liesse; erinnert man sich zugleich an die Definitionen des Integralsinus und Integralcosinus, so ist:

$$y = \left\{A_1 - Si(\varkappa x)\right\}\frac{\cos\varkappa x}{\varkappa} + \left\{B_1 + Ci(\varkappa x)\right\}\frac{\sin\varkappa x}{\varkappa}.$$

Um die Constanten A_1 und B_1 dem vorliegenden Falle anzupassen, nehmen wir erst $x = 0$, wodurch y seiner ursprünglichen Bedeutung nach in $\frac{\pi}{2\varkappa}$ übergeht; mit dem nachherigen Werthe von y verglichen, giebt dies $A_1 = \frac{1}{2}\pi$, also:

$$y = \left\{\tfrac{1}{2}\pi - Si(\varkappa x)\right\}\frac{\cos\varkappa x}{\varkappa} + \left\{B_1 + Ci(\varkappa x)\right\}\frac{\sin\varkappa x}{\varkappa};$$

nehmen wir zweitens $x = \infty$, so verschwindet y, zugleich wird $Si(\infty) = \frac{1}{2}\pi$, $Ci(\infty) = 0$, folglich:

$$0 = B_1\frac{\sin\infty}{\varkappa},$$

bei der Unbestimmtheit von $\sin\infty$, welches alle möglichen zwischen -1 und $+1$ liegenden Zahlen bedeuten kann, ist die obige Bedingung nur durch $B_1 = 0$ erfüllbar. Wir gelangen so zu dem Resultate:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\varkappa^2 + t^2}e^{-xt} = \left\{\tfrac{1}{2}\pi - Si(\varkappa x)\right\}\frac{\cos\varkappa x}{\varkappa} + Ci(\varkappa x)\frac{\sin\varkappa x}{\varkappa},$$

welches durch beliebige Differenziationen in Beziehung auf x oder $\varkappa$ eine Reihe anderer und ähnlicher Formeln liefert.

§. 108.

Fortsetzung und Schluss.

Wenn wir uns im vorigen Paragraphen auf den Fall constanter Coefficienten X_1 und X_2 beschränkten, so haben wir nun die allgemeinere Voraussetzung variabeler Coefficienten zu machen, wobei wir ähnlich wie früher unterscheiden, ob die rechte Seite der Differenzialgleichung (X in Nro. 1 des vorigen §.) der Null gleich oder von ihr verschieden ist.

I. Kennt man zwei partikuläre Integrale y_1 und y_2 der Differenzialgleichung:

$$1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + X_1\frac{dy}{dx} + X_2 y = 0,$$

so ist das allgemeine Integral wie früher:

2) $$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

wo C_1 und C_2 die willkürlichen Constanten bezeichnen; die Richtigkeit dieser Bemerkung bestätigt sich augenblicklich, sobald der für y angegebene Werth in die Differenzialgleichung substituirt und beachtet wird, dass der Voraussetzung zufolge die Gleichungen:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + X_1 \frac{dy_1}{dx} + X_2 y_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + X_1 \frac{dy_2}{dx} + X_2 y_2 = 0$$

stattfinden. Zwischen den beiden partikulären Integralen y_1 und y_2 muss nun, eben weil sie beide einer dritten Gleichung genügen, eine Beziehung existiren, vermöge deren das eine aus dem anderen abgeleitet werden kann; dieser Zusammenhang wird auf folgende Weise sichtbar. Es sei Y eine bekannte Funktion, welche die Differenzialgleichung befriedigt, d. h. ein partikuläres Integral derselben, so kann man sich denken, dass das andere die Form Yz habe, wo z der Quotient beider Partikularintegrale, mithin eine noch unbekannte Funktion von x ist. Die Substitution $y = Yz$ giebt nun statt der Gleichung 1) die folgende:

$$Y \frac{d^2 z}{dx^2} + 2 \frac{dY}{dx} \frac{dz}{dx} + \frac{d^2 Y}{dx^2} z$$
$$+ X_1 \left(Y \frac{dz}{dx} + \frac{dY}{dx} z \right) + X_2 Y_z = 0,$$

oder in anderer Anordnung:

$$Y \frac{d^2 z}{dx^2} + \left(X_1 Y + 2 \frac{dY}{dx} \right) \frac{dz}{dx}$$
$$+ \left(\frac{d^2 Y}{dx^2} + X_1 \frac{dY}{dx} + X_2 Y \right) z = 0,$$

nach der gemachten Voraussetzung verschwindet hier der Coefficient von z und es bleibt, wenn der Differenzialquotient von z mit z' bezeichnet wird:

$$Y \frac{dz'}{dx} + \left(X_1 Y + 2 \frac{dY}{dx} \right) z' = 0.$$

Diese Differenzialgleichung kann durch Sonderung der Variabelen leicht integrirt werden, nämlich:

$$\frac{dz'}{z'} = - \left(2 \frac{1}{Y} \frac{dY}{dx} + X_1 \right) dx,$$

$$lz' = -2lY - \int X_1\,dx,$$

ferner durch Rückgang auf z' und z:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{Y^2}e^{-\int X_1\,dx},$$

$$z = \int \frac{dx}{Y^2}e^{-\int X_1\,dx}.$$

Setzt man nunmehr Y und Yz an die Stelle der beiden partikulären Integrale y_1 und y_2 in die Formel 2), so ist:

3) $$y = Y\left\{C_1 + C_2\int\frac{dx}{Y^2}e^{-\int X_1\,dx}\right\}.$$

Das allgemeine Integral der Differenzialgleichung 1) würde sich also jederzeit entwickeln lassen, wenn man nur eines ihrer partikulären Integrale anzugeben wüsste. Zur Aufsuchung dieses letzteren giebt es zwar keine allgemeine Regel, doch aber ein Hülfsmittel, nämlich die Substitution von Reihen, deren Anwendung hier ganz dieselbe ist, wie bei den Differenzialgleichungen erster Ordnung.

Beispiel 1. Die gegebene Differenzialgleichung sei:

4) $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + k^2y = 0,$$

und behufs der Auffindung eines partikulären Integrales:

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots.,$$

wodurch man statt der Gleichung 4) die folgende erhält:

$$\frac{2A_1}{x} + (6A_2 + k^2A_0) + (12A_3 + k^2A_1)x$$
$$+ (20A_4 + k^2A_2)x^2 + \ldots.,$$

aus dieser ergeben sich für die Coefficienten folgende Werthe:

$$A_1 = 0,\quad A_2 = -\frac{k^2}{6},\quad A_3 = 0,\quad A_4 = +\frac{k^4}{6.20},\ldots.$$

und es ist daher:

$$y = A_0\left\{1 - \frac{k^2x^2}{1.2.3} + \frac{k^4x^4}{1.2.3.4.5} - \ldots.\right\}.$$

Dieser Ausdruck lässt vermuthen, dass:

$$y = \frac{A_0}{k}.\frac{\sin kx}{x} \text{ und einfacher } Y = \frac{\sin kx}{x}$$

ein partikuläres Integral der Differenzialgleichung sein werde, was sich in der That bestätigt, wenn man Y für y in Nro. 4) substituirt. Der Formel 3) zufolge ist nun das allgemeine Integral:

$$y = \frac{\sin kx}{x}\left\{C_1 + C_2\int\frac{x^2\,dx}{\sin^2 kx}e^{-l(x^0)}\right\},$$
$$= \frac{\sin kx}{x}\left\{C_1 - C_2\,\frac{\cot kx}{k}\right\},$$

oder endlich, indem man $C_2 = -C_0 k$ setzt:

5) $$y = \frac{C_0 \cos kx + C_1 \sin kx}{x}.$$

Beispiel 2. Die gegebene Differenzialgleichung sei:

6) $$\frac{d^2y}{dx^2} - (x^2+3)\,y = 0,$$

und hypothetisch:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots\dots$$

Durch Substitution dieses Werthes bestimmen sich die Coefficienten A_2, A_3, A_4 etc. leicht, A_0 und A_1 bleiben unbestimmt und man hat:

$$y = A_0\left\{1 + \tfrac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2.3.4}x^4 + \frac{23}{2.4.5.6}x^6 + \dots\right\}$$
$$+ A_1\left\{x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2.4}x^5 + \frac{1}{2.4.6}x^7 + \dots\right\}.$$

Dies wäre schon das allgemeine Integral 6), aber es steht insofern unter einer ungünstigen Form, als man das Bildungsgesetz der Coefficienten erster Reihe nicht übersieht. Die zweite Reihe dagegen scheint einfacher gebildet und mit der folgenden:

$$x\left\{1 + \tfrac{1}{1}(\tfrac{1}{2}x^2) + \frac{1}{1.2}(\tfrac{1}{2}x^2)^2 + \dots\right\} = xe^{\frac{1}{2}x^2}$$

identisch zu sein; in der That genügt der Ausdruck $xe^{\frac{1}{2}x^2}$ der Differenzialgleichung 6) und kann demnach für Y genommen werden; die Formel 3) giebt nun:

7) $$y = xe^{\frac{1}{2}x^2}\left\{C_1 + C_2\int\frac{dx}{x^2}\,e^{-x^2}\right\}.$$

II. Betrachten wir endlich die allgemeinste lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

8) $$\frac{d^2y}{dx^2} + X_1\,\frac{dy}{dx} + X_2\,y = X,$$

so liegt die Vermuthung nicht fern, dass ihr Integral von ähnlicher Form wie das Integral der ähnlichen Differenzialgleichung 1) sein werde; wir nehmen daher analog der Gleichung 2):

9) $$y = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

und verstehen dabei unter y_1 und y_2 die beiden partikulären Integrale der einfacheren Gleichung:

10) $$\frac{d^2 y}{d x^2} + X_1 \frac{dy}{dx} + X_2 y = 0,$$

unter u_1 und u_2 zwei noch unbekannte Funktionen von x. Die letzteren bestimmen wir nach der schon im vorigen Paragraphen bei Nro. II. angewandten Methode, welche man die Variation der Constanten genannt hat. Unterwerfen wir u_1 und u_2 der Bedingung:

11) $$y_1 \frac{d u_1}{dx} + y_2 \frac{d u_2}{dx} = 0,$$

so wird der Differenzialquotient von y

$$\frac{dy}{dx} = u_1 \frac{d y_1}{dx} + u_2 \frac{d y_2}{dx};$$

wir differenziren diese Gleichung noch einmal und substituiren die Werthe von y, y' und y'' in die Gleichung 8); dadurch nimmt letztere die folgende Form an:

$$\begin{aligned} & u_1 \left\{ \frac{d^2 y_1}{d x^2} + X_1 \frac{d y_1}{d x} + X_2 y_1 \right\} \\ + & u_2 \left\{ \frac{d^2 y_2}{d x^2} + X_1 \frac{d y_2}{d x} + X_2 y_2 \right\} \\ + & \frac{d y_1}{d x} \frac{d u_1}{d x} + \frac{d y_2}{d x} \frac{d u_2}{d x} = X_1. \end{aligned}$$

Der Voraussetzung nach genügten y_1 und y_2 der Differenzialgleichung 10), daher verschwinden die mit u_1 und u_2 multiplizirten Glieder, und als zweite Bedingung für u_1 und u_2 bleibt:

12) $$\frac{d y_1}{d x} \frac{d u_1}{d x} + \frac{d y_2}{d x} \frac{d u_2}{d x} = X.$$

Aus den Gleichungen 11) und 12) findet man:

$$\frac{d u_1}{d x} = \frac{X y_2}{y_2 \dfrac{d y_1}{d x} - y_1 \dfrac{d y_2}{d x}}$$

$$\frac{d u_2}{d x} = \frac{X y_1}{y_1 \dfrac{d y_2}{d x} - y_2 \dfrac{d y_1}{d x}},$$

oder kürzer, wenn man den Differenzialquotienten einer gebrochenen Funktion $\frac{p}{q}$ mit $\left[\frac{p}{q}\right]'$ bezeichnet:

$$\frac{d u_1}{d x} = \frac{X}{y_2 \left[\dfrac{y_1}{y_2}\right]'}, \quad \frac{d u_2}{d x} = \frac{X}{y_1 \left[\dfrac{y_2}{y_1}\right]'}.$$

Durch Integration folgen hieraus die Werthe von u_1 und u_2, nach Formel 9) endlich ist

$$13)\qquad y = y_1 \left\{ \int \frac{X\,dx}{y_2 \left[\frac{y_1}{y_2}\right]'} + C_1 \right\} + y_2 \left\{ \int \frac{X\,dx}{y_1 \left[\frac{y_2}{y_1}\right]'} + C_2 \right\}$$

das allgemeine Integral der Differenzialgleichung 8).

Beispiel 1. Bildet man aus der Differenzialgleichung

$$14)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + k^2 y = X$$

zunächst die einfachere Differenzialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + k^2 y = 0,$$

welche mit der unter Nro. 4) betrachteten identisch ist, so sind nach Formel 5)

$$y_1 = \frac{\cos kx}{x} \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{\sin kx}{x}.$$

die partikulären Integrale der letzteren; die Formel 13) giebt nun

$$15)\ y = \frac{\cos kx}{x}\left\{C_1 - \frac{1}{k}\int X \sin kx\,dx\right\} + \frac{\sin kx}{x}\left\{C_2 + \frac{1}{k}\int X \cos kx\,dx\right\}$$

als allgemeines Integral von Nro. 14).

Beispiel 2. Die gegebene Differenzialgleichung sei

$$16)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2}y = X,$$

mithin die entsprechende einfachere Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2}y = 0.$$

Als partikuläres Integral derselben findet man x und als allgemeines $C_1 x + C_2 x l x$, mithin $y_1 = x$, $y_2 = x l x$ und nach Formel 13)

$$17)\quad y = x\ \ C_1 - \int \left\{ x\,X\,lx\,dx \right\} + x lx \left\{ C_2 + \int X\,dx \right\}$$

als allgemeines Integral der Differenzialgleichung 16).

§. 109.

Nichtlineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung.

Wenn eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung weder linear ist, noch einer der in den §§. 105 und 106 betrachteten Formen angehört, mithin keine der Grössen x, y, $\frac{dy}{dx}$ in ihr fehlt, so hat man nur wenig Mittel zu ihrer Integration. Das nächstliegende ist offenbar, durch Substitution neuer Variabelen eine der früheren Formen herbeizuführen; um aber zahlreicher Versuche überhoben zu sein und eine möglichst vortheilhafte Substitution rasch zu finden, kann man sich der Methode der Variation der Constanten bedienen. Letztere besteht immer darin, dass man die Differenzialgleichung vorerst durch Weglassung eines ihrer Glieder vereinfacht, diese spezialisirte Differenzialgleichung integrirt und nun dem Integrale der allgemeinen Differenzialgleichung dieselbe Form giebt, nur mit dem Unterschiede, dass man die Grössen, welche in dem Integrale der spezialisirten Differenzialgleichung als willkürliche Constanten figurirten, als unbekannte Funktionen der unabhängigen Variabelen ansieht. Eine Anwendung dieses Verfahrens ist folgende. Die gegebene Differenzialgleichung sei

1) $$\frac{d^2y}{dx^2} + X\frac{dy}{dx} + Y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

worin X und Y Funktionen von x und y allein bezeichnen mögen. Wäre die Differenzialgleichung einfacher:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + X\frac{dy}{dx} = 0, \text{ d. h. } \frac{dy'}{dx} + Xy' = 0,$$

so würde die Integration sehr leicht sein, man fände nämlich

$$y' = \frac{dy}{dx} = Ce^{-\int X dx},$$

woraus y selbst leicht herzuleiten ist. Versuchen wir nun, ob der Differenzialgleichung genügt werden kann, wenn man für y' einen Ausdruck von derselben Form setzt, aber an die Stelle der Integrationsconstante C eine neue Funktion z von x treten lässt. Mittelst der Substitutionen

2) $$\frac{dy}{dx} = ze^{-\int X dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dz}{dx} - Xz\right)e^{-\int X dx}$$

verwandelt sich die Gleichung 1) in die folgende

$$\frac{dz}{dx} + Yz^2e^{-\int X dx} = 0,$$

oder, indem man beachtet, dass die Beziehungen

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}, \quad ze^{-\int X dx} = \frac{dy}{dx}$$

stattfinden:

$$\left\{\frac{dz}{dy} + Yz\right\}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Da im Allgemeinen y' von Null verschieden ist, so muss der Inhalt der Parenthese gleich Null sein. Dies giebt eine Differenzialgleichung mit gesonderten Variabelen und zwar:

$$z = C_0 e^{-\int Y dy};$$

ferner durch Substitution in Nro. 2):

$$\frac{dy}{dx} = C_0 e^{-\int Y dy} e^{-\int X dx};$$

hier sind die Variabelen nochmals trennbar und man gelangt so zu dem allgemeinen Integrale:

3) $$\int e^{\int Y dy} dy = C_0 \int e^{-\int X dx} dx + C_1.$$

Als geometrisches Beispiel diene die Aufgabe: die Curve zu finden, in welcher die von einer gegebenen Ordinate ab gerechnete Fläche u in constantem Verhältnisse zu dem Rechtecke steht, dessen eine Seite die letzte Ordinate y der Fläche u, und dessen andere Seite das harmonische Mittel aus der Abscisse x und der Subtangente t ist. Bezeichnen wir mit $\mu : 1$ das gegebene Verhältniss, so lautet die Bedingung:

4) $$u = \mu \frac{2xt}{x+t} y;$$

man hat aber, wenn a die Abscisse derjenigen Ordinate bedeutet, von welcher ab die Fläche u gerechnet wird:

$$u = \int_a^x y\, dx, \qquad y = \frac{du}{dx},$$

ferner für die Subtangente

$$t = y : \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} : \frac{d^2u}{dx^2};$$

nach Substitution der für y und t angegebenen Werthe und bei gehöriger Anordnung erhält die Gleichung 4) die folgende Form:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \frac{2\mu}{u}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = 0,$$

welche mit der Gleichung 1) übereinstimmt, wenn man sich u für y geschrieben denkt. Nach Formel 3) wird nun

$$\int \frac{du}{u^{2\mu}} = C_0\, lx + C_1,$$

wo die Fälle $\mu = \frac{1}{2}$ und $\mu \gtrless \frac{1}{2}$ zu unterscheiden sind. Der erste Fall giebt

$$lu = C_0\, lx + C_1, \quad u = e^{C_1} x^{C_0};$$

ferner durch Differenziation und Aenderung der Constanten

$$y = Kx^k,$$

also Parabeln. Im zweiten Falle wird

$$u = [(1-2\mu)(C_0 lx + C_1)]^{\frac{1}{1-2\mu}},$$

mithin ist die Gleichung der Curve von der Form

$$y = \frac{1}{x}(Alx + B)^{\frac{2\mu}{1-2\mu}}.$$

Die Constanten bestimmen sich durch die Bedingungen, dass u mit a gleichzeitig verschwindet und dass die Curve durch einen gegebenen Punkt $x_0 y_0$ gehen soll. Nimmt man z. B. $\mu = \frac{1}{4}$, $A = b^2$, $B = -b^2 la$, so sind die Werthe von y, t und u:

$$y = \frac{b^2}{x}\, l\left(\frac{x}{a}\right), \quad u = \tfrac{1}{2} b^2 \left[l\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2,$$

$$t = \frac{xl\left(\frac{x}{a}\right)}{1 - l\left(\frac{x}{a}\right)},$$

und diese befriedigen in der That die Gleichung 4) für $\mu = \frac{1}{4}$; die Fläche u ist hier von der Stelle $x = a$ aus gerechnet, an welcher die Curve vom Negativen zum Positiven übergeht.

Gehört eine nichtlineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung weder zu der vorigen Form noch zu den in den §§. 105 und 106 betrachteten Fällen, so muss man zur Integration durch Reihen oder durch bestimmte Integrale seine Zuflucht nehmen, wie in §. 111 gezeigt werden soll.

§. 110.

Differenzialgleichungen höherer Ordnungen.

Wenn es schon für die Differenzialgleichungen erster und zweiter Ordnung keine allgemeine Integrationsmethode giebt, so wird es nicht befremden, dass die Differenzialgleichungen höherer Ordnungen nur selten in geschlossener Form integrirt werden können. In der That sind es nur die linearen Differenzialgleichungen, über deren Integration etwas Allgemeineres und zwar das Folgende bekannt ist.

I. Wir betrachten zunächst die Differenzialgleichung:

$$1)\quad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0,$$

worin $a_1, a_2, \ldots a_n$ constante Coefficienten bezeichnen mögen. Setzt man $y = e^{\lambda x}$, indem unter λ eine noch unbestimmte Constante begriffen wird, so verwandelt sich die Differenzialgleichung in die algebraische Gleichung:

$$2)\qquad \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

deren n Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ heissen mögen. Jeder von den Ausdrücken

$$e^{\lambda_1 x},\quad e^{\lambda_2 x},\quad e^{\lambda_3 x},\quad \ldots e^{\lambda_n x}$$

bildet ein partikuläres Integral der Gleichung 1), das allgemeine Integral derselben ist:

$$3)\qquad y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x},$$

und man wird sich leicht davon überzeugen, wenn man den vorstehenden Werth in die Differenzialgleichung 1) substituirt und beachtet, dass $C_1, C_2, \ldots C_n$ willkürliche Constanten sind.

Die Formel 3) bedarf einer Modifikation, wenn mehrere Wurzeln der algebraischen Gleichung 3) einander gleich oder wenn sie imaginär sind. Wären z. B. die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gleich, so setze man vorerst $\lambda_2 = \lambda_1 + \delta$, $\lambda_3 = \lambda_1 + \varepsilon$ und entwickele die Exponenzialgrössen, in denen δ und ε vorkommen; dies giebt:

$$\begin{aligned} y = (C_1 + C_2 + C_3)\, e^{\lambda_1 x} &+ (C_2\delta + C_3\varepsilon)\, x e^{\lambda_1 x} \\ &+ \tfrac{1}{2}(C_2\delta^2 + C_3\varepsilon^2)\, x^2 e^{\lambda_1 x} + \text{etc.} \\ + C_4 e^{\lambda_4 x} + C_5 e^{\lambda_5 x} &+ \ldots + C_n e^{\lambda_n x}; \end{aligned}$$

unter dem „etc." sind hier alle die Glieder verstanden, welche die dritten und höheren Potenzen von δ und ε enthalten. Setzt man $C_1 + C_2 + C_3 = C$, $C_2\delta + C_3\varepsilon = C'$, endlich $\frac{1}{2}(C_2\delta^2 + C_3\varepsilon^2) = C''$, und lässt schliesslich δ und ε in Null übergehen, so wird:

$$y = (C + C'x + C''x^2)\, e^{\lambda_1 x} + C_4 e^{\lambda_4 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

Man übersieht leicht den Fortgang dieses Verfahrens bei einer grösseren Anzahl gleicher Wurzeln. Sind überhaupt k gleiche Wurzeln

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \ldots = \lambda_k$$

in der Gleichung 2) vorhanden, so erhält das allgemeine Integral die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} 4)\qquad y = (C + C'x + C''x^2 + \ldots + C^{(k-1)}x^{k-1})\, e^{\lambda_1 x} \\ + C_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + C_{k+2} e^{\lambda_{k+2} x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}. \end{aligned}$$

Bei imaginären Wurzeln tritt nur in so fern eine Umänderung ein, als jede der entsprechenden Exponenzialgrössen in einen reellen und imaginären Theil zerfällt; gleichwohl wird dadurch y nicht nothwendig imaginär, da es freisteht, auch den willkürlichen Constanten complexe Werthe zu ertheilen, wie es bereits in §. 107 geschehen ist.

II. Das Verfahren, nach welchem das allgemeine Integral der Differenzialgleichung 1) aus ihren partikulären Integralen zusammengesetzt wurde, bleibt dasselbe für die allgemeinere Differenzialgleichung:

5) $$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = 0;$$

sind nämlich $y_1, y_2, \ldots y_n$ ihre n verschiedenen partikulären Integrale, so ist das allgemeine Integral:

6) $$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.$$

III. Betrachten wir noch die Differenzialgleichung:

7) $$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots \\ \ldots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = X,$$

und zwar unter der Voraussetzung, dass man sie in dem speziellen Falle $X = 0$ integriren könne. Nennen wir $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ die partikulären Integrale der spezialisirten und mit Nro. 5) übereinstimmenden Differenzialgleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n y = 0,$$

so lässt sich vermuthen, dass das Integral der allgemeineren 7) von ähnlicher Form wie Nro. 6) sein werde, und wir nehmen deshalb:

8) $$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_n y_n,$$

wo $u_1, u_2, \ldots u_n$ noch unbekannte Funktionen von x bezeichnen. Diese Gleichung differenziren wir $(n-1)$mal, setzen aber den jedesmaligen zweiten Theil des Differenzialquotienten der Null gleich; diese leichte Rechnung giebt:

$$\frac{dy}{dx} = u_1 \frac{dy_1}{dx} + u_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots + u_n \frac{dy_n}{dx},$$

9) $$y_1 \frac{du_1}{dx} + y_2 \frac{du_2}{dx} + \ldots + y_n \frac{du_n}{dx} = 0;$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = u_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + u_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} + \ldots + u_n \frac{d^2 y_n}{dx^2},$$

10) $$\frac{dy_1}{dx}\frac{du_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{dy_n}{dx}\frac{du_n}{dx} = 0$$

u. s. w.;

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = u_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + u_2 \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \ldots + u_n \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}},$$

$$11) \qquad \frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} \frac{du_1}{dx} + \frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}} \frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}} \frac{du_n}{dx} = 0;$$

endlich bei nochmaliger Differenziation:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u_1 \frac{d^n y_1}{dx^n} + u_2 \frac{d^n y_2}{dx^n} + \ldots + u_n \frac{d^n y_n}{dx^n}$$

$$+ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \frac{du_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} \frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \frac{du_n}{dx},$$

wo der zweite Theil nicht gleich Null gesetzt wird, weil noch die Differenzialgleichung 7) zu erfüllen ist. Nach Substitution der Werthe von y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... $\frac{d^n y}{dx^n}$ und mit Beachtung des Umstandes, dass jede der Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ der Gleichung 5) genügt, verwandelt sich die Differenzialgleichung 7) in:

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \frac{du_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} \frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \frac{du_n}{dx} = X.$$

Mit den Gleichungen 9), 10), 11) etc. zusammen hat man jetzt zwischen den n Unbekannten

$$\frac{du_1}{dx}, \frac{du_2}{dx}, \frac{du_3}{dx}, \ldots \frac{du_n}{dx}$$

die folgenden n Beziehungen:

$$\begin{aligned}
y_1 \frac{du_1}{dx} + y_2 \frac{du_2}{dx} + \ldots + y_n \frac{du_n}{dx} &= 0 \\
\frac{dy_1}{dx} \frac{du_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{dy_n}{dx} \frac{du_n}{dx} &= 0 \\
\frac{d^2y_1}{dx^2} \frac{du_1}{dx} + \frac{d^2y_2}{dx^2} \frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{d^2y_n}{dx^2} \frac{du_n}{dx} &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} \frac{du_1}{dx} + \frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}} \frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}} \frac{du_n}{dx} &= 0 \\
\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \frac{du_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} \frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \frac{du_n}{dx} &= X,
\end{aligned}$$

welche rücksichtlich jener Unbekannten vom ersten Grade sind. Man kann demnach $\frac{du_1}{dx}$, $\frac{du_2}{dx}$, ... $\frac{du_n}{dx}$ jederzeit bestimmen und erhält sie als Funktionen von x, etwa

$$\frac{du_1}{dx} = \chi_1, \quad \frac{du_2}{dx} = \chi_2, \quad \dots \quad \frac{du_n}{dx} = \chi_n;$$

daraus folgen $u_1, u_2, \dots u_n$ selbst und zuletzt ist nach Formel 8):

$$y = y_1\left[\int \chi_1\,dx + C_1\right] + y_2\left[\int \chi_2\,dx + C_2\right] + \dots \dots + y_n\left[\int \chi_n\,dx + C_n\right]$$

das allgemeine Integral der Differenzialgleichung 7).

§. 111.

Integration durch Reihen und bestimmte Integrale.

Wie bei den Differenzialgleichungen erster Ordnung, so greift man auch bei den Differenzialgleichungen höherer Ordnungen in allen den Fällen zur Integration durch Reihen, wo die bisher angegebenen Mittel ihre Dienste versagen. Das Verfahren an sich bleibt dasselbe wie früher, ist auch schon in §. 108 angewendet worden und würde keiner besonderen Erwähnung weiter bedürfen, wenn nicht der Umstand hinzuträte, dass es nicht selten glückt, die entwickelte Reihe durch bestimmte Integrale zu summiren. Man erlangt in diesem Falle den grossen Vortheil, die unbekannte Funktion in geschlossener Form darzustellen und im Voraus die Fälle übersehen zu können, in denen die Integration auf gewöhnlichem Wege gelungen sein würde. Ein ausgezeichnetes Beispiel dieses Verfahrens bietet

die Riccati'sche Differenzialgleichung, welche, obgleich von der ersten Ordnung:

1) $$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^\mu$$

für beliebige μ nicht unmittelbar integrabel ist. Sie lässt sich übrigens auf eine in mancher Beziehung einfachere Differenzialgleichung zweiter Ordnung bringen, indem man setzt:

2) $$y = \frac{1}{az}\frac{dz}{dx},$$

wo z eine neue Unbekannte bezeichnet; es wird nämlich:

3) $$\frac{d^2 z}{d x^2} = a b\, x^{\mu} z = c^2 x^{\mu} z,$$

wenn c^2 zur Abkürzung für ab dient. Wären die partikulären Integrale z_1 und z_2 der linearen Differenzialgleichung 3) bekannt, so würde

4) $$z = C_1 z_1 + C_2 z_2$$

das allgemeinere Integral derselben sein und man hätte

5) $$y = -\frac{1}{a} \frac{C_1 z_1' + C_2 z_2'}{C_1 z_1 + C_2 z_2} = -\frac{1}{a} \frac{z_1' + C z_2'}{z_1 + C z_2}$$

als allgemeines Integral der Riccati'schen Gleichung.

Um nun die Differenzialgleichung 3) zu integriren, setzen wir

6) $$z = A x^p + A_1 x^{p_1} + A_2 x^{p_2} + \ldots\ldots,$$

indem wir sowohl die Coefficienten als die Exponenten vor der Hand unbestimmt lassen; aus der Gleichung 3) wird jetzt die folgende:

$$A p (p-1) x^{p-2} + A_1 p_1 (p_1 - 1) x^{p_1 - 2} + A_2 p_2 (p_2 - 1) x^{p_2 - 2} + \ldots$$
$$= c^2 x^{\mu} \{ A x^p + A_1 x^{p_1} + A_2 x^{p_2} + \ldots\ldots \},$$

welche besteht, wenn das erste Glied linker Hand verschwindet und im Uebrigen die Coefficienten und Exponenten beiderseits gleich sind. Demnach hat man folgende Gleichungen:

$$p\,(p-1) = 0,$$
$$p_n - 2 = \mu + p_{n-1}, \qquad A_n p_n (p_n - 1) = c^2 A_{n-1},$$

in denen der Reihe nach $n = 1, 2, 3$ etc. zu setzen ist. Die erste Gleichung kann auf zweierlei Weise erfüllt werden, durch $p = 0$ und durch $p = 1$; die erste Annahme giebt $p_1 = \mu + 2$, $p_2 = 2\mu + 4$, $p_3 = 3\mu + 6$ etc., woraus sich nachher A_1, A_2, A_3 etc. bestimmen; man erhält überhaupt:

$$z = A + \frac{A c^2 x^{\mu+2}}{(\mu+1)(\mu+2)} + \frac{A c^4 x^{2\mu+4}}{(\mu+1)(\mu+2) \cdot (2\mu+3)(2\mu+4)}$$
$$+ \frac{A c^6 x^{3\mu+6}}{(\mu+1)(\mu+2) \cdot (2\mu+3)(2\mu+4) \cdot (3\mu+5)(3\mu+6)} + \ldots$$

und im zweiten Falle $p = 1$:

$$z = A x + \frac{A c^2 x^{\mu+3}}{(\mu+2)(\mu+3)} + \frac{A c^4 x^{2\mu+5}}{(\mu+2)(\mu+3) \cdot (2\mu+4)(2\mu+5)}$$
$$+ \frac{A c^6 x^{3\mu+7}}{(\mu+2)(\mu+3) \cdot (2\mu+4)(2\mu+5) \cdot (3\mu+6)(3\mu+7)} + \ldots$$

Beide Ausdrücke für z sind partikuläre Integrale mit der einen willkürlichen Constante A. Giebt man ihr in der zweiten Gleichung einen anderen Werth als in der ersten, so ist das allgemeine Integral:

$$7)\quad z = A\left\{1 + \frac{c^2 x^{\mu+2}}{(\mu+1)(\mu+2)} + \frac{c^4 x^{2\mu+4}}{(\mu+1)(\mu+2).(2\mu+3)(2\mu+4)} + \dots\right\}$$
$$+ Bx\left\{1 + \frac{c^2 x^{\mu+2}}{(\mu+2)(\mu+3)} + \frac{c^4 x^{2\mu+4}}{(\mu+2)(\mu+3).(2\mu+4)(2\mu+5)} + \dots\right\}.$$

Die Summen der beiden vorstehenden Reihen lassen sich leicht auf folgendem Wege finden. Es ist identisch:

$$\int_0^1 (1-t^2)^{s-\frac{3}{2}} \left(e^{2rt} + e^{-2rt}\right) dt$$
$$= 2\int_0^1 (1-t^2)^{s-\frac{3}{2}} \left\{1 + \frac{2^2 r^2 t^2}{1.2} + \frac{2^4 r^4 t^4}{1.2.3.4} + \dots\right\} dt,$$

und wenn zur Integration der einzelnen Glieder rechterseits die Formel

$$\int_0^1 (1-t^2)^{p-1}\, t^{q-1}\, dt = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(\frac{1}{2}q)}{2\,\Gamma(p+\frac{1}{2}q)}$$

verwandelt wird, so wird aus der Reihe die folgende:

$$\Gamma(s-\tfrac{1}{2})\left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} + \frac{2^2 r^2}{1.2}\,\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(s+1)} + \frac{2^4 r^4}{1.2..4}\,\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(s+2)} + \dots\right].$$

Hier kann man noch die Werthe von $\Gamma(\frac{1}{2})$, $\Gamma(\frac{3}{2})$, $\Gamma(\frac{5}{2})$ etc. angeben und $\Gamma(s+1)$, $\Gamma(s+2)$ etc. durch $\Gamma(s)$ ausdrücken; dies giebt zusammen:

$$\frac{\Gamma(s)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-t^2)^{s-\frac{3}{2}}\left(e^{2rt} + e^{-2rt}\right) dt$$
$$= 1 + \frac{r^2}{1.s} + \frac{r^4}{1.2.s(s+1)} + \frac{r^6}{1.2.3.s(s+1)(s+2)} + \dots$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$8)\qquad 2r = \frac{c\,x^{\frac{1}{2}\mu+1}}{\frac{1}{2}\mu+1} = \xi,$$

wo ξ zur Abkürzung dienen möge, ferner einmal

$$s = \frac{\mu+1}{\mu+2},\quad \text{dann } s = \frac{\mu+3}{\mu+2},$$

so erhält man im ersten Falle rechter Hand die in Nro. 7) mit A multiplizirte Reihe und linker Hand als Summe derselben:

32*

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{\mu+2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\mu}{2\mu+4}\right)}\int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{\mu+4}{2\mu+4}} (e^{\xi t}+e^{-\xi t})\,dt,$$

im zweiten Falle verwandelt sich die obige Reihe in die mit Bx multiplizirte Reihe der Gleichung 7) und ihre Summe ist:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+3}{\mu+2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\mu+4}{2\mu+4}\right)}\int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{\mu}{2\mu+4}} (e^{\xi t}+e^{-\xi t})\,dt.$$

Nach Substitution dieser Summen, wobei man die vor den Integralzeichen stehenden Faktoren mit den Constanten A und B zu neuen Constanten C_1, C_2 verschmelzen kann, wird aus Nro. 7):

$$9)\qquad z = C_1\int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{\mu+4}{2\mu+4}} (e^{\xi t}+e^{-\xi t})\,dt$$
$$+ C_2 x\int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{\mu}{2\mu+4}} (e^{\xi t}+e^{-\xi t})\,dt.$$

Ein Blick auf diese Formeln zeigt, dass für solche μ, durch welche einer der Exponenten von $1-t^2$ zu einer ganzen positiven Zahl wird, die eine oder andere der bestimmten Integrationen ausführbar ist, und zwar die erste, wenn:

$$-\frac{\mu+4}{2\mu+4} = n-1, \quad \text{also } \mu = -\frac{4n}{2n-1},$$

die zweite, wenn:

$$-\frac{\mu}{2\mu+4} = n, \qquad \text{mithin } \mu = -\frac{4n}{2n+1}.$$

Setzt man im ersten Falle:

$$10)\qquad \int_0^1 (1-t^2)^{n-1} (e^{\xi t}+e^{-\xi t})\,dt = Z,$$

und im zweiten

$$11)\qquad x\int_0^1 (1-t^2)^{n} (e^{\xi t}+e^{-\xi t})\,dt = Z,$$

so ist Z jedesmal ein partikuläres Integral der Differenzialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - c^2 x^\mu z = 0,$$

und das vollständige Integral lässt sich mittelst der Formel 3) des §. 108 finden, wenn man z für y, Z für Y und $X_1 = 0$ nimmt. Wir gelangen so zu dem Resultate, dass für die unter der Form

$$12)\qquad \mu = -\frac{4n}{2n \mp 1}$$

stehenden μ das vollständige Integral der Differenzialgleichung 3) entwickelbar und zwar folgendes ist:

$$13)\qquad z = Z\left\{C_1 + C_2\int\frac{dz}{Z^2}\right\},$$

wobei Z der Formel 10) oder der Formel 11) entnommen wird, jenachdem in Nro. 12) das obere oder untere Vorzeichen gilt.

Es muss übrigens bemerkt werden, dass die Formel 9) zwar für alle positiven μ, nicht aber für jedes negative μ gilt. Ihre Herleitung beruhte nämlich auf Eigenschaften der Gammafunktionen, die für negative Werthe der Argumente (oben p und q) im Allgemeinen nicht mehr bestehen. Daher müssen in der vor Nro. 8) verzeichneten Summenformel die Grössen s und $s - \frac{1}{2}$ positiv sein und vermöge der nachherigen Substitutionen folgt jetzt, dass in Nro. 9) das erste Glied ein brauchbares partikuläres Integral ist, wenn μ zwischen -2 und $-\infty$ liegt, dass ferner das zweite Glied als partikuläres Integral dienen kann, wenn μ zwischen 0 und -2 enthalten ist, und dass für $-4 > \mu > -\infty$ die Formel wieder allgemein gilt. Bezeichnen wir die in Nro. 9) vorkommenden bestimmten Integrale kurz mit J_1 und J_2, so ist

allgemein: $z = C_1 J_1 + C_2 J_2 x$, für $\infty > \mu > 0$,
partikulär: $z = C_2 J_2 x$, „ $0 > \mu > -2$,
partikulär: $z = C_1 J_1$ „ $-2 > \mu > -4$,
allgemein: $z = C_1 J_1 + C_2 J_2 x$, „ $-4 > \mu > -\infty$.

Es bleiben jetzt noch die Fälle $\mu = 0$, $\mu = -2$ und $\mu = -4$ übrig, in denen die Formel 9) ihre Brauchbarkeit verliert. Man hat nun für $\mu = 0$

$$14)\qquad \frac{d^2 z}{dx^2} = c^2 z,$$

mithin nach §. 107:

$$15)\qquad z = C_1 e^{cx} + C_2 e^{-cx}.$$

Für $\mu = -2$ ist die Differenzialgleichung

$$16)\qquad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{c^2 z}{x^2},$$

und sie geht mittelst der Substitution $z = x^\lambda$, wo λ noch unbestimmt bleibt, in die Gleichung

$$\lambda(\lambda - 1) = c^2$$

über, aus der sich zwei Werthe von λ, nämlich:

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\{1 + \sqrt{4c^2+1}\},\ \lambda_2 = \tfrac{1}{2}\{1 - \sqrt{4c^2+1}\}$$

finden, das allgemeine Integral der Differenzialgleichung 16) ist daher:

17) $$z = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2}.$$

Wäre endlich $\mu = -4$, die Differenzialgleichung folglich:

18) $$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{c^2 z}{x^4},$$

so substituiren wir:

$$z = x e^{\frac{k}{x}},$$

wo k eine noch unbestimmte Grösse bezeichnet; dies giebt:

$$\frac{dz}{dx} = \left(1 - \frac{k}{x}\right) e^{\frac{k}{x}},\quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{k^2}{x^3} e^{\frac{k}{x}},$$

mithin aus Nro. 18) $k^2 = c^2$ oder $k = \pm c$; das allgemeine Integral ist demnach:

19) $$z = x\left(C_1 e^{\frac{c}{x}} + C_2 e^{-\frac{c}{x}}\right).$$

Nach diesen Erörterungen kennt man unter allen Umständen das Integral der linearen Differenzialgleichung 3), und es bedarf dasselbe nur in dem Falle einer kleinen Umformung, wo c^2 negativ, also c imaginär ist; diese Umwandlung hat aber nach Cap. IX. nicht die mindeste Schwierigkeit.

§. 112.

Fortsetzung und Schluss.

Das im vorigen Paragraphen auseinandergesetzte Verfahren bot sich zwar insofern von selbst dar, als der Gedanke, eine unendliche Reihe durch ein bestimmtes Integral zu summiren, nicht fern liegt, aber die Ausführung dieser Summation hängt davon ab, dass man ein bestimmtes Integral kennt, welches das allgemeine Glied der Reihe darstellt; in dieser letzteren Beziehung ist man immer nur an einen glücklichen Griff gewiesen. Um diese Unsicherheit einigermassen zu beseitigen, und gleichzeitig den Umweg über die unendliche Reihe zu ersparen, kann man gleich von vornherein versuchen, ob nicht ein bestimmtes Integral, welches die unabhängige Variabele (x) als Constante enthält, der Differenzialgleichung genüge. Wie dies möglich ist, wollen wir an der Differenzialgleichung:

$$1)\qquad (a_n + b_n x)\frac{d^n y}{dx^n} + (a_{n-1} + b_{n-1}x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots$$
$$\dots + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0 x)y = 0$$

zeigen, worin a_0, $a_1, \dots a_n$, b_0, $b_1, \dots b_n$ gegebene Constanten bedeuten sollen.

Geleitet durch die Formeln des vorigen Paragraphen versuchen wir, ob der Ausdruck:

$$y = \int_\alpha^\beta e^{xu}\, V\, du$$

die Gleichung 1) befriedigen kann, wenn V eine Funktion von u allein, α und β schicklich gewählte und von x unabhängige Integrationsgrenzen für u bezeichnen. Die Differenziation der Gleichung 2) giebt:

$$\frac{dy}{dx} = \int_\alpha^\beta u e^{xu}\, V\, du, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \int_\alpha^\beta u^2 e^{xu}\, V du, \text{ u. s. w.},$$

und wir haben nun die Werthe von y, y', y'' etc. in die Gleichung 1) zu substituiren. Dabei lassen sich die in Beziehung auf u constanten Faktoren $a_0 + b_0 x$, $a_1 + b_1 x$ etc. unter die Integralzeichen stellen und dann alle Integrale zu einem einzigen zusammenziehen; das Resultat ist:

$$\int_\alpha^\beta \left[U_0 + U_1 x\right] e^{xu}\, V\, du = 0,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$U_0 = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n,$$
$$U_1 = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \dots + b_n u^n.$$

Um nun der vorhergehenden Gleichung zu genügen, schreiben wir sie in der Form:

$$2)\qquad \int_\alpha^\beta U_0 e^{xu}\, V\, du + x\int_\alpha^\beta U_1 e^{xu}\, V du,$$

und wenden auf das zweite Integral die theilweise Integration an; unbestimmt integrirt ist

$$x\int U_1\, V e^{xu} du = U_1\, V e^{xu} - \int \frac{d(U_1 V)}{du} e^{xu} du,$$

mithin durch Einführung der Grenzen $u = \beta$, $u = \alpha$:

$$x\int\limits_{\alpha}^{\beta} U_1\, V e^{xu}\, du = \Big[U_1\, V e^{xu}\Big]_{\alpha}^{\beta} - \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{d(U_1\, V)}{du}\, e^{xu}\, du,$$

wobei unter dem ersten Gliede rechter Hand der Rest verstanden wird, welcher bleibt, wenn man in dem Ausdrucke $U_1\, V e^{xu}$ erst $u = \beta$, dann $u = \alpha$ setzt und beide so erhaltene Spezialwerthe subtrahirt. Aus der Gleichung 2) wird jetzt die folgende:

$$\Big[U_1\, e^{xu}\, V\Big]_{\alpha}^{\beta} + \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big\{U_0\, V - \frac{d(U_1\, V)}{du}\Big\}\, e^{xu}\, du = 0,$$

und diese ist für jedes x erfüllt, wenn gleichzeitig die beiden Relationen:

$$3)\qquad U_0\, V - \frac{d(U_1\, V)}{du} = 0, \qquad \Big[U_1\, e^{xu}\, V\Big]_{\alpha}^{\beta} = 0$$

stattfinden. Aus der ersten Gleichung, die eine gewöhnliche Differenzialgleichung mit der Unbekannten V ist, ergiebt sich bei Ausführung der Differenziation und Trennung der Variabelen:

$$\frac{dV}{V} = \frac{U_0}{U_1}\, du - \frac{dU_1}{U_1},$$

mithin durch Integration:

$$l\, V = \int \frac{U_0}{U_1}\, du - l\, U_1 + Const.;$$

zur Abkürzung bezeichnen wir den Werth des Integrales rechter Hand mit $\varphi(u)$, d. h.:

$$4)\qquad \varphi(u) = \int \frac{a_0 + a_1 u + \ldots + a_n u^n}{b_0 + b_1 u + \ldots + b_n u^n}\, du,$$

setzen $Const. = l\, C$ und haben so:

$$5)\qquad V = \frac{C}{U_1}\, e^{\varphi(u)}.$$

Nachdem V seine Bestimmung gefunden hat, wenden wir uns an die zweite Bedingung in Nro. 3), sie lautet nunmehr:

$$6)\qquad \Big[e^{xu + \varphi(u)}\Big]_{\alpha}^{\beta} = 0.$$

Um sie zu erfüllen, braucht man nur diejenigen Werthe von u zu ermitteln, wodurch der eingeklammerte Ausdruck denselben Werth, etwa K, erhält oder mit anderen Worten die Gleichung:

$$e^{xu+\varphi(u)} = K$$

aufzulösen; heissen $u_1, u_2, \ldots u_m$ die Wurzeln derselben, so ist:

$$\left[e^{xu+\varphi(u)}\right]_{u_1}^{u_2} = \left[e^{xu+\varphi(u)}\right]_{u_2}^{u_3} = \ldots = K - K = 0,$$

folglich die Bedingung 6) befriedigt, indem man der Reihe nach $\alpha = u_1, u_2, \ldots u_{m-1}$, $\beta = u_2, u_3, \ldots u_m$ setzt. Vermöge der für y angenommenen Form und nach erfolgter Bestimmung der Werthe von α, β und V kennen wir nun folgende $m - 1$ partikuläre Integrale der Gleichung 1):

$$7) \qquad y_1 = C_1 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{U_1} e^{xu+\varphi(u)}, \quad y_2 = C_2 \int_{u_2}^{u_3} \frac{du}{U_1} e^{xu+\varphi(u)},$$

$$\ldots\ldots y_{m-1} = C_{m-1} \int_{u_{m-1}}^{u_m} \frac{du}{U_1} e^{xu+\varphi(u)},$$

und wegen der linearen Form der Differenzialgleichung genügt ihr auch die Summe:

$$8) \qquad y_m = C_1 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{U_1} e^{xu+\varphi(u)} + C_2 \int_{u_2}^{u_3} \frac{du}{U_1} e^{xu+\varphi(u)} + \ldots$$

$$\ldots + C_{m-1} \int_{u_{m-1}}^{u_m} \frac{du}{U_1} e^{xu+\varphi(u)}.$$

Wäre $m = n + 1$, so würde y_{n+1} das allgemeine Integral $= y$ sein; ausserdem ist auch y_m nur ein partikuläres Integral.

Man kann sich rückwärts leicht überzeugen, dass der in Nro. 8) verzeichnete Ausdruck in der That der Gleichung 1) genügt; es bedarf hierzu nur gewöhnlicher Substitution und der vorhin benutzten theilweisen Integration; man erhält statt der Gleichung 1) die folgende:

$$9) \quad C_1 \left[e^{xu+\varphi(u)}\right]_{u_1}^{u_2} + C_2 \left[e^{xu+\varphi(u)}\right]_{u_4}^{u_3} + \ldots + C_{m-1} \left[e^{xu+\varphi(u)}\right]_{u_{m-1}}^{u_m} = 0,$$

deren Glieder, zufolge der für $u_1, u_2, \ldots u_m$ getroffenen Bestimmungsweise, einzeln verschwinden. Die obige Gleichung liesse sich aber auch dadurch erfüllen, dass man den $u_1, u_2, \ldots u_m$ andere und zwar solche Werthe ertheilte, bei denen die Ausdrücke:

$$\left[e^{xu+\varphi(u)}\right]_{u_1}^{u_2}, \quad \left[e^{xu+\varphi(u)}\right]_{u_2}^{u_3}, \ldots.$$

die Formen:

$$B_1 f(x)\,, \quad B_2 f(x)\,, \quad B_3 f(x)\,, \ldots.$$

annehmen, wo B_1, B_2, ... irgend welche Constanten bezeichnen; es bliebe dann noch die Bedingung:

10) $$B_1 C_1 + B_2 C_2 + \ldots + B_{m-1} C_{m-1} = 0$$

übrig, vermöge deren nur C_1, C_2, ... C_{m-2} beliebig gewählt werden können, C_{m-1} aber durch die Gleichung selbst bestimmt wird.

Beispiel 1. Die gegebene Differenzialgleichung sei:

11) $$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\,\alpha\,\frac{dy}{dx} - \beta^2 xy = 0,$$

so ist nach Formel 4):

$$\varphi(u) = \int \frac{2\alpha u}{u^2 - \beta^2} = \alpha\, l(u^2 - \beta^2),$$

$$e^{xu+\varphi(u)} = (u^2 - \beta^2)^\alpha\, e^{xu}.$$

Unter der Voraussetzung eines positiven α erhält der letztere Ausdruck einen und denselben Werth und zwar den Werth Null für:

$$u = +\beta, \quad u = -\beta, \, u = \mp\infty,$$

wobei das obere Zeichen einem positiven, das untere einem negativen x entspricht. Man hat daher für positive x:

$$y = C_1 \int_{-\beta}^{\beta} (u^2 - \beta^2)^{\alpha-1}\, e^{xu}\, du + C_2 \int_{-\infty}^{-\beta} (u^2 - \beta^2)^{\alpha-1}\, e^{xu}\, du,$$

oder auch, wenn man im zweiten Integrale $-u$ an die Stelle von u treten lässt:

$$y = C_1 \int_{-\beta}^{\beta} (u^2 - \beta^2)^{\alpha-1}\, e^{xu}\, du + C_2 \int_{\beta}^{\infty} (u^2 - \beta^2)^{\alpha-1}\, e^{-xu}\, du,$$

und für negative x:

$$y = C_1 \int_{-\beta}^{\beta} (u^2 - \beta^2)^{\alpha-1}\, e^{xu}\, du + C_2 \int_{\beta}^{\infty} (u^2 - \beta^2)^{\alpha-1}\, e^{xu}\, du.$$

Beide Formen lassen sich in eine zusammenziehen, wenn man unter dem zweiten Integralzeichen $\mp x$ schreibt und das obere Zeichen für positive, das untere für negative x benutzt. Setzt man noch $u = \beta t$, so ist jetzt das vollständige Integral:

12) $$y = A\int_{-1}^{1}(t^2-1)^{\alpha-1}\, e^{\beta x t}\, dt + B\int_{1}^{\infty}(t^2-1)^{\alpha-1}\, e^{\mp\beta x t}\, dt.$$

Ausführbar auf gewöhnlichem Wege werden beide Integrationen, α eine ganze positive Zahl ist.

Beispiel 2. Die Differenzialgleichung sei ähnlich der vorigen:

13) $$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\alpha\frac{dy}{dx} + \beta^2 x y = 0,$$

so hat man nur $\beta\sqrt{-1} = \beta i$ an die Stelle des früheren β treten zu lassen; die vor Nro. 12) stehenden Formeln geben dann:

$$y = C_1\int_{-\beta i}^{\beta i}(u^2+\beta^2)^{\alpha-1}\, e^{xu}\, du + C_2\int_{\beta i}^{\infty}(u^2+\beta^2)^{\alpha-1}\, e^{\mp xu}\, du;$$

mittelst der Substitution $u = \beta t i$ wird aus dem ersten Integrale:

$$A i\int_{-1}^{1}(t^2-1)^{\alpha-1}\left\{\cos\beta x t + i\sin\beta x t\right\} dt$$

$$= 2Ai\int_{0}^{1}(t^2-1)^{\alpha-1}\cos\beta x t\, dt,$$

weil der zweite Theil des Integrales verschwindet; ferner hat man:

$$C_2\int_{\beta i}^{\infty}(u^2+\beta^2)^{\alpha-1}\, e^{\mp xu}\, du$$

$$= C_2\int_{0}^{\infty}(u^2+\beta^2)^{\alpha-1}\, e^{\mp xu}\, du - C_2\int_{0}^{\beta i}(u^2+\beta^2)^{\alpha-1}\, e^{\mp xu}\, du,$$

wo im ersten Integrale $u = \beta t$, im zweiten $u = \beta i t$ gesetzt werden möge. Dies giebt als Werth des Integrales:

$$B\int_{0}^{\infty}(t^2+1)^{\alpha-1}\, e^{\mp\beta t}{}^{x t}\, dt - Bi\int_{0}^{1}(t^2-1)^{\alpha-1}(\cos\beta x t \mp i\sin\beta x t) dt,$$

und mit dem vorigen zusammen:

$$y = \int_{0}^{1}(t^2-1)^{\alpha-1}\,[(2A-B)\, i\cos\beta x t \mp B\sin\beta x t]\, dt$$

$$+ B\int_{0}^{\infty}(t^2+1)^{\alpha-1}\, e^{\mp\beta x t}\, d$$

oder endlich, wenn man $(2A - B)i = C_1$, $\mp B = C_2$ setzt:

$$14)\qquad y = \int_0^1 (t^2 - 1)^{\alpha-1} (C_1 \cos\beta x t + C_2 \sin\beta x t)\, dt$$

$$\mp C_2 \int_0^\infty (t^2 + 1)^{\alpha-1} e^{\mp\beta x t}\, dt.$$

Die Differenzialgleichungen 11) und 13) stehen übrigens in genauem Zusammenhange mit der im vorigen Paragraphen behandelten Differenzialgleichung:

$$15)\qquad \frac{d^2 z}{dx^2} - c^2 x^\mu z = 0.$$

Betrachtet man nämlich nicht x, sondern den Ausdruck:

$$16)\qquad x_1 = \frac{x^{\frac{1}{2}\mu+1}}{\frac{1}{2}\mu+1}$$

als unabhängige Variabele, so treten folgende Substitutionen ein:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dx} = \frac{dz}{dx_1} \cdot x^{\frac{1}{2}\mu},$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{dz}{dx_1} \cdot \tfrac{1}{2}\mu\, x^{\frac{1}{2}\mu-1} + \frac{d\left(\frac{dz}{dx_1}\right)}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dx} \cdot x^{\frac{1}{2}\mu}$$

$$= \frac{dz}{dx_1} \cdot \tfrac{1}{2}\mu\, x^{\frac{1}{2}\mu-1} + \frac{d^2 z}{dx_1^2} \cdot x^\mu.$$

Andererseits ist nach Nro. 16):

$$x = \left\{(\tfrac{1}{2}\mu + 1)\, x_1\right\}^{\frac{2}{\mu+2}},$$

mithin:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{dz}{dx_1} \cdot \tfrac{1}{2}\mu \left\{(\tfrac{1}{2}\mu + 1) x_1\right\}^{\frac{\mu-2}{\mu+2}} + \frac{d^2 z}{dx_1^2} \left\{(\tfrac{1}{2}\mu + 1)\, x_1\right\}^{\frac{2\mu}{\mu+2}}.$$

Mittelst dieser Werthe von x und $\frac{d^2 z}{dx^2}$ geht die Differenzialgleichung 15) in die nachstehende über:

$$\left\{(\tfrac{1}{2}\mu + 1)\, x_1\right\}^{\frac{2\mu}{\mu+2}} \frac{d^2 z}{dx_1^2} + \tfrac{1}{2}\mu \left\{(\tfrac{1}{2}\mu + 1) x_1\right\}^{\frac{\mu-2}{\mu+2}} \frac{dz}{dx_1}$$

$$- c^2 \left\{(\tfrac{1}{2}\mu + 1) x_1\right\}^{\frac{2\mu}{\mu+2}} z = 0,$$

oder nach gehöriger Hebung:

$$(\tfrac{1}{2}\mu + 1)\, x_1 \frac{d^2 z}{dx_1^2} + \tfrac{1}{2}\mu \frac{dz}{dx_1} - c^2(\tfrac{1}{2}\mu + 1)\, x_1 z = 0,$$

d. i.

17) $$x_1 \frac{d^2 z}{dx_1^2} + \frac{\mu}{\mu + 2} \frac{dz}{dx_1} - c^2 x_1 z = 0.$$

Diese Gleichung stimmt mit Nro. 11) überein und lässt sich nach Nro. 12) integriren, indem man x_1 für x, z für y, c für β und

$$\alpha = \frac{\mu}{2\mu + 4}$$

setzt, wobei μ entweder positiv oder zwischen -2 und $-\infty$ enthalten sein muss, damit die Voraussetzung eines positiven α erfüllt werde; nach geschehener Integration ist für x_1 sein Werth aus der Gleichung 16) wieder einzuführen.

Beispiel 3. Die gegebene Differenzialgleichung sei:

18) $$\frac{d^n y}{dx^n} - bxy = 0,$$

und b positiv. Hier ist nach Formel 4) wegen $a_0 = a_1 \ldots = a_{n-1} = 0$, $a_n = 1$, $b_1 = b_2 \ldots = b_n = 0$:

$$\varphi(u) = -\frac{u^{n+1}}{b(n+1)}.$$

Der Ausdruck $e^{xu + \varphi(u)}$ erhält einen und denselben Werth und zwar den Werth Null, wenn $xu + \varphi(u)$ irgendwie negativ unendlich wird, denken wir uns u^{n+1} als bestehend aus $(+1) . u^{n+1}$, so ist namentlich klar, dass:

$$u = \sqrt[n+1]{+1} \, . \, \infty$$

gesetzt werden darf; bezeichnen wir mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_{n+1}$ die $n+1$ Werthe von $\sqrt[n+1]{+1}$, d. h. die $n+1$ Wurzeln der Gleichung:

19) $$\varrho^{n+1} - 1 = 0,$$

so kennen wir $n + 1$ Werthe von u, für welche $e^{xu + \varphi(u)}$ jedesmal der Null gleich wird; jene Werthe sind nämlich $\varrho_1 \infty$, $\varrho_2 \infty$, $\ldots$ $\varrho_{n+1} \infty$. Demnach lautet das allgemeine Integral der Differenzialgleichung 18) nach Formel 8) gebildet:

$$y = B_1 \int\limits_{\varrho_1 \infty}^{\varrho_2 \infty} e^{xu - cu^{n+1}} du + B_2 \int\limits_{\varrho_2 \infty}^{\varrho_3 \infty} e^{xu - cu^{n+1}} du + \ldots$$

$$\ldots + B_n \int\limits_{\varrho_n \infty}^{\varrho_{n+1} \infty} e^{xu - cu^{n+1}} du,$$

wobei $C_1 = B_1 b$, $C_2 = B_2 b$, etc. und zur Abkürzung $\frac{1}{b(n+1)} = c$ gesetzt worden ist. Um eine bequemere Form zu erhalten, zerlegen wir jedes Integral nach dem Schema:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(u)\, du = \int\limits_{0}^{\beta} f(u)\, du - \int\limits_{0}^{\alpha} f(u)\, du,$$

und vereinigen die gleichen Integrale; dies giebt:

$$y = -B_1 \int\limits_{0}^{\varrho_1 \infty} e^{xu - cu^{n+1}} du + (B_1 - B_2) \int\limits_{0}^{\varrho_2 \infty} e^{xu - cu^{n+1}} du + \ldots$$

$$\ldots + (B_{n-1} - B_n) \int\limits_{0}^{\varrho_n \infty} e^{xu - cu^{n+1}} du + B_n \int\limits_{0}^{\varrho_{n+1} \infty} e^{xu - cu^{n+1}} du,$$

oder auch:

$$y = A_1 \int\limits_{0}^{\varrho_1 \infty} e^{xu - cu^{n+1}} du + A_2 \int\limits_{0}^{\varrho_2 \infty} e^{xu - cu^{n+1}} du + \ldots$$

$$\ldots + A_n \int\limits_{0}^{\varrho_n \infty} e^{xu - cu^{n+1}} du + A_{n+1} \int\limits_{0}^{\varrho_{n+1} \infty} e^{xu - cu^{n+1}} du,$$

wobei die $n+1$ Constanten $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$ der Bedingung:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n+1} = 0$$

unterworfen sind. Setzt man endlich in den einzelnen Gliedern dieser Reihe:

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 \varrho_1, \quad & A_2 &= C_2 \varrho_2, \ldots & A_{n+1} &= C_{n+1} \varrho_{n+1}, \\ u &= \varrho_1 t, \quad & u &= \varrho_2 t, \ldots & u &= \varrho_{n+1} t, \end{aligned}$$

so ergiebt sich schliesslich:

20) $$y = \int_0^\infty \left\{ C_1 e^{\varrho_1 xt} + C_2 e^{\varrho_2 xt} + \ldots + C_{n+1} e^{\varrho_{n+1} xt} \right\} e^{-ct^{n+1}} dt$$

$$\left[\textit{Condit:} \ \frac{C_1}{\varrho_1} + \frac{C_2}{\varrho_2} + \ldots + \frac{C_{n+1}}{\varrho_{n+1}} = 0 \right]$$

als allgemeines Integral der Differenzialgleichung 18) oder der von ihr nicht verschiedenen:

21) $$\frac{d^n y}{dx^n} - \frac{xy}{(n+1)c} = 0 \quad , \qquad c > 0.$$

Beispiel 4. Eine völlig ähnliche Behandlung gestattet die Differenzialgleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + bxy = 0, \quad b > 0.$$

Man hat nämlich:

$$\varphi(u) = + \frac{u^{n+1}}{b(n+1)},$$

und um den Ausdruck $e^{xu+\varphi(u)}$ zum Verschwinden zu bringen, braucht man nur:

$$u = \sqrt[n+1]{-1} \, . \, \infty$$

zu setzen, wodurch $xu + \varphi(u) = -\infty$ wird. Sind nun $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_{n+1}$ die $n+1$ Wurzeln der Gleichung:

22) $$\varrho^{n+1} + 1 = 0,$$

so verschwindet $e^{xu+\varphi(u)}$ für $u = \varrho_1 \infty, \varrho_2 \infty, \ldots \varrho_{n+1} \infty$; von hier ab bleibt die Rechnung wörtlich dieselbe wie vorhin und die Formel 20) giebt daher auch das Integral der Differenzialgleichung:

23) $$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{xy}{(n+1)c} = 0 \; , \qquad c > 0,$$

wenn man den Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n+1}$ die ebenerwähnte neue Bedeutung unterlegt.

Cap. XXI.

Differenzialgleichungen mit mehreren Variabelen.

§. 113.

Integration der simultanen Gleichungen erster Ordnung.

Wenn zwischen $n+1$ Variabelen $x, y, z, \dots s, t$, unter denen t die unabhängige Veränderliche sein möge, n Gleichungen von der Form:

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(x, y, z, \dots t), \quad \dfrac{dy}{dt} = f_2(x, y, z \dots t) \\ \qquad\qquad \dfrac{dz}{dt} = f_3(x, y, z, \dots t) \text{ etc.} \end{cases}$$

bestehen sollen, so müssen $x, y, z, \dots s$, als Funktionen von t gedacht, daraus entwickelbar sein, und es würde darauf ankommen, eine neue Gleichung zu bilden, welche nur die unabhängige Variabele t und eine der abhängigen Variabelen, etwa x, enthielte. Man gelangt hierzu auf folgendem Wege. Aus der ersten Gleichung $\frac{dx}{dt} = f_1$ ergiebt sich durch Differenziation:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial t}.$$

Die angedeuteten partiellen Differenziationen in Beziehung auf $x, y, \dots s, t$ sind ohne Weiteres ausführbar, weil die Form der Funktion f_1 bekannt ist, für die Differenzialquotienten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \dots \frac{ds}{dt}$ kann man ihre Werthe aus den Gleichungen 1) einsetzen und man erhält so ein Resultat von der Form:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_2(x, y, z, \ldots s, t).$$

Wiederholt man dasselbe Verfahren, indem man die vorstehende Gleichung differenzirt und die Gleichungen 1) benutzt, so ist das Ergebniss von der Gestalt:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \varphi_3(x, y, z, \ldots s, t).$$

Indem man auf diese Weise bis zum n^{ten} Differenzialquotienten fortgeht, hat man die n Gleichungen:

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(x, y, \ldots s, t)\,; \quad \dfrac{d^2x}{dt^2} = \varphi_2(x, y, \ldots s, t); \ldots \\ \dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = \varphi_{n-1}(x, y, \ldots s, t)\,; \quad \dfrac{d^nx}{dt^n} = \varphi_n(x, y, \ldots s, t). \end{cases}$$

Sehen wir für den Augenblick die linken Seiten dieser n Gleichungen als bekannt an, so würden die $n - 1$ ersten Gleichungen dienen können, um die $n - 1$ Unbekannten $y, z, \ldots s$ durch die übrigen vorhandenen Grössen auszudrücken; diese algebraische Operation gäbe Gleichungen von folgender Form:

$$3)\quad \begin{cases} y = F_1\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{d^2x}{dt^2}, \ldots \dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right), \\ z = F_2\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{d^2x}{dt^2}, \ldots \dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right), \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ s = F_{n-1}\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{d^2x}{dt^2}, \ldots \dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right). \end{cases}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in die letzte der Gleichungen 2) entsteht eine neue Gleichung von der Gestalt:

$$4)\quad \frac{d^nx}{dt^n} = \psi\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right),$$

d. h. eine Differenzialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen x und t. Aus dieser bestimmt sich x als Funktion von t, dadurch werden zugleich $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$ etc. bekannt, und die Gleichungen 3) führen nachher zur Kenntniss der übrigen abhängigen Variabelen $y, z \ldots s$.

Als Beispiel möge die Integration der drei simultanen Gleichungen:

5) $\frac{dx}{dt} = \alpha(y+z),\quad \frac{dy}{dt} = \beta(x+z),\quad \frac{dz}{dt} = \gamma(x+y)$

vorgenommen werden. Man erhält aus der ersten Gleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha\left(\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}\right),$$

und nach Substitution der Werthe von $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$:

6) $$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha(\beta+\gamma)x + \alpha\gamma y + \alpha\beta z;$$

die zweite Differenziation und nochmalige Substitution giebt:

7) $$\frac{d^3x}{dt^3} = 2\alpha\beta\gamma x + \alpha(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)(y+z).$$

Aus der Gleichung 6) und der ersten Gleichung in 5) ergeben sich y und z, nämlich:

9) $$y = \frac{1}{\alpha(\gamma-\beta)}\left\{\frac{d^2x}{dt^2} - \beta\frac{dx}{dt} - \alpha(\beta+\gamma)x\right\},$$

10) $$z = \frac{1}{\alpha(\beta-\gamma)}\left\{\frac{d^2x}{dt^2} - \gamma\frac{dx}{dt} - \alpha(\beta+\gamma)x\right\}.$$

Diese Werthe kann man in Nro. 7) substituiren, oder kürzer, man setzt in Nro. 7) $\frac{dx}{dt}$ für $\alpha(y+z)$ und hat so:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 2\alpha\beta\gamma x + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\frac{dx}{dt}.$$

Diese lineare Differenzialgleichung dritter Ordnung hat nach §. 110, I. zum vollständigen Integral:

11) $$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t},$$

wo λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln der cubischen Gleichung:

12) $$\lambda^3 = (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\lambda + 2\alpha\beta\gamma$$

sind. Die Formeln 9) und 10) liefern y und z, wenn der Werth von x eingesetzt wird.

Der gegebenen Entwickelung zufolge kommt die Integration eines Systemes von n simultanen Differenzialgleichungen erster Ordnung im Allgemeinen auf die Integration einer Differenzialgleichung n^{ter} Ordnung zurück; indessen kann dieser Satz insofern eine Ausnahme erleiden, als sich bei der Aufstellung der Gleichungen 2) nicht selten schon früher (d. h. ehe man die letzte derselben entwickelt hat) Gelegenheit zur Bildung einer Gleichung zwischen x und t darbietet; diese Differenzialgleichung ist dann von niedrigerer als n^{ter} Ordnung. Um nachher alle übrigen Variabelen y, z, .. s

zu finden, bedarf es noch der Integration einiger Hülfsgleichungen, welche sich von selbst ergeben, wenn man alle durch x, $\frac{dx}{dt}$ etc. bekannt gewordenen Grössen in die ursprünglichen Gleichungen einsetzt.

Als Beispiel mögen die Gleichungen:

13) $$\frac{dx}{dt} = y + z, \quad \frac{dy}{dt} = x + z, \quad \frac{dz}{dt} = x + y$$

dienen, welche den speziellen Fall $\alpha = \beta = \gamma = 1$ der vorigen Aufgabe bilden. Die cubische Gleichung 12) wird $\lambda^3 = 3\lambda + 2$ und besitzt die Wurzeln $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, also zwei gleiche Wurzeln. Das Integral der für x aufgestellten Differenzialgleichung ist jetzt:

$$x = Ce^{2t} + C'e^{-t} + C''te^{-t},$$

und wenn man diesen Werth in die Formeln 9) und 10) einführt, so stösst man auf die Unbequemlichkeit, dass $\beta - \gamma = 0$ und $y = \frac{0}{0}$ wird. Dieser Uebelstand liesse sich zwar beseitigen, ist aber ein Zeichen, dass man einen Umweg gemacht hat. Aus den Gleichungen 13) folgt nämlich analog Nro. 6):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z,$$

und hier bietet sich schon Gelegenheit zur Bildung einer Gleichung zwischen t und x allein, sie ist:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + \frac{dx}{dt},$$

woraus als vollständiges Integral:

14) $$x = Ce^{2t} + C_1e^{-t}$$

hervorgeht. Zieht man jetzt die erste Gleichung in Nro. 13) von der zweiten ab, so fällt z weg und es bleibt die lineare Differenzialgleichung:

$$\frac{dy}{dt} + y = \frac{dx}{dt} + x = 3Ce^{2t};$$

sie giebt:

15) $$y = Ce^{2t} + C_2e^{-t}.$$

Auf ganz gleiche Weise folgt durch Subtraktion der ersten Gleichung in 13) von der dritten und nachherige Integration:

16) $$z = Ce^{2t} + C_3e^{-t}.$$

Die Werthe von x, y, z enthalten zusammen vier Constanten, mithin eine zuviel; substituirt man aber die für x, y, z gefundenen Ausdrücke in eine der Gleichungen 13), so ergiebt sich die Bedingung:

17) $$C_1 + C_2 + C_3 = 0,$$

wodurch die normale Zahl der Constanten wieder herbeigeführt wird.

§. 114.

Simultane Differenzialgleichungen höherer Ordnungen.

Das im vorigen Paragraphen auseinandergesetzte Verfahren erstreckt sich mit gleicher Leichtigkeit auch auf den Fall, wo die gegebenen simultanen Differenzialgleichungen verschiedene höhere Differenzialquotienten der abhängigen Variabelen x, y, z, ... s enthalten. Setzt man nämlich:

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx'}{dt} = x'', \quad \frac{d^3x}{dt^3} = \frac{dx''}{dt} = x''', \ldots .$$

$$\frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy'}{dt} = y'', \quad \frac{d^3y}{dt^3} = \frac{dy''}{dt} = y''', \ldots .$$

u. s. w.

und sieht x', x'', x''', ... y', y'', y''', u. s. w. als neue Variabele an, so hat man wieder Gleichungen erster Ordnung, aber mit einer grösseren Anzahl von Variabelen. Die zwei simultanen Differenzialgleichungen z. B.:

18) $$\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} = 2x, \quad \frac{dy}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} = 2y$$

lassen sich durch folgende vier Gleichungen ersetzen:

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dy}{dt} = y',$$

$$\frac{dy'}{dt} = 2x - x', \quad \frac{dx'}{dt} = 2y - y',$$

welche von der ersten Ordnung sind, dagegen die vier abhängigen Variabelen x, y, x', y' enthalten. Um die erwähnte Methode anzuwenden, differenziren wir die letzte Gleichung und haben:

19) $$\frac{d^2x'}{dt^2} = 2y' - \frac{dy'}{dt} = 2y' - (2x - x').$$

Aus dieser und der vorhergehenden Gleichung würden sich y und y' entwickeln lassen, namentlich wäre:

$$2\frac{dx'}{dt} + \frac{d^2x'}{dt^2} = 4y - 2x + x',$$

oder vermöge der Bedeutung von x':

$$y = \tfrac{1}{4}\left\{2x - \frac{dx}{dt} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^3x}{dt^3}\right\}. \tag{20}$$

Die nochmalige Differenziation der Gleichung 19) giebt:

$$\frac{d^3x'}{dt^3} = 2\frac{dy'}{dt} - 2x' + \frac{dx'}{dt} = 2(2x - x') - 2x' + \frac{dx'}{dt}.$$

Hier kommt bereits kein y mehr vor, mithin dient die vorstehende Gleichung zur Bestimmung von x; man hat nämlich zufolge der Bedeutung von x':

$$\frac{d^4x}{dt^4} - \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} - 4x = 0.$$

Die zur Integration dieser linearen Differenzialgleichung gehörende algebraische Gleichung ist:

$$\lambda^4 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0,$$

oder auch:

$$\lambda^4 - (\lambda - 2)^2 = (\lambda^2 + \lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda + 2) = 0.$$

Die vier Wurzeln derselben sind:

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = +1,\ \lambda_3 = \frac{1 + \sqrt{7}\sqrt{-1}}{2},\ \lambda_4 = \frac{1 - \sqrt{7}\sqrt{-1}}{2}$$

und daraus ergiebt sich für x der Werth:

$$x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{+t} + C_3 e^{\frac{1}{2}t} \cos(\tfrac{1}{2}t\sqrt{7}) + C_4 e^{\frac{1}{2}t} \sin(\tfrac{1}{2}t\sqrt{7});$$

y findet sich nachher mittelst der Formel 20). — Nicht überflüssig ist die Bemerkung, dass die Gleichungen 18) vermöge ihrer symmetrischen Form noch eine zweite Auflösungsart zulassen, bei welcher die Differenzialgleichung vierter Ordnung vermieden wird. Die Summe der Gleichungen 18) ist nämlich:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = 2(x + y),$$

d. h. wenn $x + y = s$ gesetzt wird:

$$\frac{ds}{dt} + \frac{d^2s}{dt^2} = 2s.$$

Hieraus findet sich auf gewöhnlichem Wege:

$$s = Ae^{-2t} + Be^{+t}.$$

Wenn man jetzt in die erste Gleichung von Nro. 18) für y seinen Werth:

$$y = s - x = Ae^{-2t} + Be^{+t} - x$$

einführt, so gelangt man zu der Differenzialgleichung:

$$\frac{dx}{dt} + 4Ae^{-2t} + Be^{+t} - \frac{d^2x}{dt^2} = 2x,$$

die sich mittelst der Variation der Constanten leicht integriren lässt; man erhält so x, dann $y = s - x$.

In diesen Bemerkungen liegt die Hinweisung auf eine Modifikation des allgemeinen Verfahrens, welche in dem Falle eintreten kann, wo die gegebenen Differenzialgleichungen symmetrisch sind in Beziehung auf die abhängigen Variabelen $x, y, z, \ldots$; man erleichtert sich nämlich die Integration, wenn man nicht sogleich auf die Bestimmung von $x, y, z, \ldots$ selbst ausgeht, sondern vorerst eine symmetrische Funktion von $x, y, z, \ldots$ als neue Unbekannte einführt und für diese eine Differenzialgleichung zu gewinnen sucht. Ein bemerkenswerthes und für die Theorie der Centralbewegung wichtiges Beispiel hierzu bietet die Integration der beiden Differenzialgleichungen:

$$21)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{ky}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

Nach dem ursprünglichen Verfahren würde man y der ersten Gleichung zu entnehmen und in die zweite Gleichung einzusetzen haben, um eine Differenzialgleichung vierten Grades zwischen x und t zu bekommen; die Integration der letzteren ist aber umständlich und wir beabsichtigen daher vorerst eine Differenzialgleichung zwischen t und der Hülfsvariabele:

$$22)\qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

zu erhalten. Aus den Gleichungen 21) folgt nun:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

die linke Seite ist ein vollständiger Differenzialquotient, nämlich der von:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt};$$

man hat daher durch Integration die Gleichung:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = A,$$

deren Quadrat des Folgenden wegen in nachstehender Gestalt dargestellt werden möge:

$$23)\quad (x^2+y^2)\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\} - \left\{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right\}^2 = A^2.$$

Andererseits folgt aus den Gleichungen 21):

$$2\frac{d^2x}{dt^2}dx + 2\frac{d^2y}{dt^2}dy = -2k\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

Beide Seiten sind vollständige Differenziale; die linke Seite ist nämlich einerlei mit:

$$d\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\},$$

und die rechte Seite gleich dem Ausdrucke:

$$-\frac{2k}{x^2+y^2}\cdot\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{2k}{r^2}dr = d\left(\frac{2k}{r}\right).$$

Die Integration führt daher zu der Gleichung:

$$\left(\frac{dx^2}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2k}{r} - B.$$

Substituiren wir sie in Nro. 23) und bemerken gleichzeitig, dass dort:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = r\frac{dr}{dt}$$

ist, so geht die Gleichung 23) in die folgende über:

$$r^2\left\{\frac{2k}{r} - B\right\} - \left\{r\frac{dr}{dt}\right\}^2 = A^2,$$

welche nur r und t enthält. Sie ist durch Sonderung der Variabelen integrabel und giebt der Reihe nach:

$$r\frac{dr}{dt} = \sqrt{2kr - Br^2 - A^2},$$

und umgekehrt, wenn t_0 die Integrationsconstante bezeichnet:

$$t - t_0 = \int\frac{r\,dr}{\sqrt{2kr - Br^2 - A^2}}.$$

Eine elegantere Form erhält das Integral mittelst der Bemerkung, dass:

$$2kr - Br^2 - A^2 = B\left\{\left(\frac{k^2}{B^2} - \frac{A^2}{B}\right) - \left(\frac{k}{B} - r\right)^2\right\}$$

ist, wodurch man veranlasst wird, A und B durch neue Constanten a und ε zu ersetzen; für:

$$A^2 = ka(1-\varepsilon^2), \qquad B = \frac{k}{a}$$

wird nämlich:

24) $$t - t_0 = \int\frac{r\,dr}{\sqrt{\frac{k}{a}\left[a^2\varepsilon^2 - (a-r)^2\right]}}.$$

Die Ausführung dieser Integration hat an sich keine Schwierigkeit und würde eine Gleichung von der Form $t - t_0 = f(r)$ geben, die nachher umgekehrt werden muss, weil r als Funktion von t auszudrücken ist. Um zu sehen, worauf es dabei ankommt, führen wir in Nro. 24) eine neue Variabele ψ ein, indem wir:

25) $$r = a(1 - \varepsilon \cos\psi)$$

setzen; dadurch wird:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{a^3}{k}} \int (1 - \varepsilon \cos\psi)\, d\psi = \sqrt{\frac{a^3}{k}} (\psi - \varepsilon \sin\psi).$$

Man hat demnach zuerst die transcendente Gleichung:

26) $$\psi - \varepsilon \sin\psi = (t - t_0)\sqrt{\frac{k}{a^3}}$$

nach ψ aufzulösen*) und findet dann r mittelst der Formel 25). — Es handelt sich jetzt noch darum, x und y selbst zu bestimmen, was auf folgende Weise geschieht. Vermöge der Bedeutung von r sind $\frac{x}{r}$ und $\frac{y}{r}$ echte Brüche, deren Quadratsumme die Einheit ausmacht; es liegt daher nahe, $\frac{x}{r} = \cos\varphi$, mithin $\frac{y}{r} = \sin\varphi$ zu setzen, wo φ eine neue Variabele bezeichnet. Die Substitution der Werthe:

27) $$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

in die Gleichung:

---

*) Diese Auflösung kann entweder in jedem speziellen Falle durch Versuche und nachherige Correktionen geschehen, oder auch mittelst einer unendlichen Reihe bewerkstelligt werden. Da nämlich in der obigen Gleichung oder in der kürzeren:

α) $$\psi - \varepsilon \sin\psi = \vartheta,$$

ψ eine Funktion von ϑ, mithin auch $\psi - \vartheta$ eine Funktion von ϑ ist, so darf man unter der Beschränkung $\pi > \vartheta > 0$:

β) $$\psi - \vartheta = B_1 \sin\vartheta + B_2 \sin 2\vartheta + B_3 \sin 3\vartheta + \ldots.$$

setzen, wo es auf die Bestimmung der Coefficienten B_1, B_2 etc. ankommt. Sie geschieht mittelst der Gleichung α) unter Benutzung der Formel 14) in §. 79; mittelst einer Rechnung, die hier nicht füglich mitgetheilt werden kann, findet sich:

γ) $$B_n = \frac{2}{n} \frac{(\frac{1}{2}n\varepsilon)^n}{1.2..n} \left\{ 1 - \frac{(\frac{1}{2}n\varepsilon)^2}{1.(n+1)} + \frac{(\frac{1}{2}n\varepsilon)^4}{1.2.(n+1)(n+2)} - \frac{(\frac{1}{2}n\varepsilon)^6}{1.2.3.(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots \right\}.$$

Näheres darüber giebt des Verfassers Schriftchen: „Die allgemeine Umkehrung der Funktionen, Halle 1849.“

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=A=\sqrt{ka(1-\varepsilon^2)},$$

verwandelt diese in die folgende:

$$\begin{aligned} r\cos\varphi &\left\{r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}+\sin\varphi\frac{dr}{dt}\right\}\\ &-r\sin\varphi\left\{-r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}+\cos\varphi\frac{dr}{dt}\right\}\\ &=\sqrt{ka\,(1-\varepsilon^2)}, \end{aligned}$$

d. i. sehr einfach

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=\sqrt{ka\,(1-\varepsilon^2)}.$$

Bringt man r^2 und dt auf die rechte Seite, indem man für dt seinen Werth aus der Gleichung 24) einsetzt, so wird:

$$\varphi=a\sqrt{1-\varepsilon^2}\int\frac{dr}{r\sqrt{a^2\varepsilon^2-(a-r)^2}},$$

und durch Substitution des nachherigen Ausdruckes $a\,(1-\varepsilon\cos\psi)$ für r:

$$\varphi=\sqrt{1-\varepsilon^2}\int\frac{d\psi}{1-\varepsilon\cos\psi}.$$

Diese Integration ist nach Formel 12) in §. 61 leicht ausführbar, indem man $a=1$, $b=-\varepsilon$, $x=\psi$ setzt und unterscheidet, ob der absolute Werth von ε kleiner oder grösser als die Einheit oder ihr gleich ist. Im ersten Falle, auf den wir uns hier beschränken, wird:

$$\varphi=2\,Arctan\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\tan\tfrac{1}{2}\psi\right)+\varphi_0,$$

wo φ_0 die Integrationsconstante ist; es folgt daraus:

28) $$\tan\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_0)=\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\tan\tfrac{1}{2}\psi.$$

Die gegebenen Differenzialgleichungen werden also auf die Weise integrirt, dass man durch Auflösung der Gleichung 26) zunächst ψ durch t ausdrückt, hierauf r nach der Formel 25), φ nach Formel 28), endlich x und y mittelst der Gleichungen 27) bestimmt; dabei bleiben a, ε, t_0, φ_0 unbestimmt und sind die vier Integrationsconstanten.

§. 115.

Totale Differenzialgleichungen zwischen mehreren Variabelen.

In allen bisherigen Untersuchungen über Differenzialgleichungen wurde vorausgesetzt, dass nur eine unabhängige Variabele vorhanden sei und dass die sonst noch vorkommenden Variabelen bekannte oder unbekannte und ebendeswegen zu bestimmende Funktionen derselben darstellten. Das Umgekehrte hiervon würde stattfinden, wenn eine der vorhandenen Variabelen als abhängig, die übrigen als unabhängig veränderlich angesehen würden, und es wäre dann die Aufgabe, diejenige Funktion mehrerer Variabelen zu bestimmen, welche einer gegebenen Differenzialgleichung genügt. Dabei sind jedoch zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich die Differenzialgleichung totale oder partielle Differenziale enthält. Wir beschäftigen uns zunächst mit Gleichungen der ersten Art.

Findet zwischen drei Variabelen x, y, z eine Gleichung von der Form

1) $$F(x, y, z) = C$$

statt, aus welcher sich z als Funktion von x und y bestimmen liesse, so ist das totale Differenzial derselben:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz = 0.$$

Die partiellen Differenzialquotienten $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ sind hier wiederum Funktionen von x, y und z, die wir der Reihe nach mit $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$, $\chi(x, y, z)$ bezeichnen; die vorige Gleichung lautet dann:

2) $$\varphi(x,y,z)\,dx + \psi(x,y,z)\,dy + \chi(x,y,z)\,dz = 0,$$

und ist das Schema einer Differenzialgleichung erster Ordnung zwischen drei Variabelen. Sie integriren, heisst von der Gleichung 2) auf die Gleichung 1) zurückgehen und es ist dies geometrisch die Aufsuchung einer Fläche, welcher die in Nro. 2) ausgesprochene Eigenschaft zukommt.

Die Integration der Differenzialgleichung 2) oder der kürzer geschriebenen

3) $$\varphi\,dx + \psi\,dy + \chi\,dz = 0$$

lässt sich auf der Stelle ausführen, wenn die Variabelen gesondert sind, d. h. $\varphi = X$, $\psi = Y$, $\chi = Z$ ist, wo X, Y, Z Funktionen von x, y, z allein bezeichnen; aus

4) $$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

folgt nämlich:

5) $$\int X\,dx + \int Y\,dy + \int Z\,dz = Const.,$$

wo jede Integration so geschieht, als wäre jede der Grössen x, y, z unabhängig veränderlich. In der That bedarf es nur der totalen Differenziation der Gleichung 5), um zur Gleichung 4) zurückzugelangen.

Ist die Sache nicht so einfach wie in dem angegebenen Falle, so bringt man die gegebene Differenzialgleichung zunächst auf die Form

6) $$dz = -\frac{\varphi}{\chi}\,dx - \frac{\psi}{\chi}\,dy;$$

da z eine unbekannte Funktion von x und y ist, so muss der Ausdruck rechter Hand das vollständige Differenzial derselben darstellen und dazu gehört nach §. 100 eine Bedingung, welche auf den vorliegenden Fall angewendet lautet:

$$\frac{\partial\left(-\frac{\varphi}{\chi}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(-\frac{\psi}{\chi}\right)}{\partial x}.$$

Die Ausführung dieser Differenziationen giebt bei Weglassung der gemeinschaftlichen Nenner und unter Berücksichtigung des Umstandes, dass φ, ψ und χ auch z, d. h. implicite nochmals x und y enthalten:

$$\varphi\left(\frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\chi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \chi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$= \psi\left(\frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \chi\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Beachtet man noch, dass die Gleichung 6) mit

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

identisch und folglich

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\varphi}{\chi},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\psi}{\chi}$$

sein muss, so verwandelt sich die obige Bedingung in die folgende:

7) $$\varphi\left(\frac{\partial\chi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \psi\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\chi}{\partial x}\right) + \chi\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0,$$

und nur wenn sie erfüllt ist, kann man in der gegebenen Differenzialgleichung z als Funktion der beiden unabhängigen Variabelen x und y betrachten. Die Nichterfüllung der obigen Determination zeigt dagegen an, dass die Differenzialgleichung keinen analytischen Sinn hat, wenigstens so lange nicht als zwei Variabele unabhängig bleiben; sie erhält erst wieder eine Bedeutung, wenn man y als Funktion von x ansieht, sie reduzirt sich dann auf eine Differenzialgleichung zwischen zwei Variabelen x und z und gehört nicht mehr hierher.

Das Bestehen der Gleichung 7) vorausgesetzt, hat die Integration der Differenzialgleichung

8) $$\varphi\, dx + \psi\, dy + \chi\, dz = 0$$

keine wesentliche Schwierigkeit. Denken wir uns die Integralgleichung $F(x, y, z) = C$ als Gleichung einer Fläche, von der jeder Punkt $x\,y\,z$ die Eigenschaft 8) besitzt, so muss diese Eigenschaft auch allen den Punkten zukommen, welche in einer constanten Entfernung (etwa $z = h$) von der xy Ebene auf jener Fläche liegen, d. h. allen Punkten des Durchschnittes der fraglichen Fläche mit der Ebene, deren Gleichung $z = h$ sein würde. Es wird in diesem Falle $dz = 0$, die Differenzialgleichung reduzirt sich auf

9) $$\varphi\, dx + \psi\, dy = 0,$$

und das hierin vorkommende z gilt, wenn man nicht h dafür schreiben will, als willkürliche Constante. Das Integral der Differenzialgleichung 9) (d. h. die Gleichung jener Durchschnittslinie) führt eine Integrationsconstante bei sich, welche zwar von x und y frei ist, wohl aber jenes als constant betrachtete z enthalten kann; bezeichnen wir sie mit Z, wo z eine Funktion von z allein ist, so können wir dem Integrale der Gleichung 9) folgende Gestalt verleihen:

10) $$f(x, y, z) = Z.$$

Das Differenzial hiervon ist, total genommen:

11) $$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = dZ,$$

und da die rechte Seite nur z enthält, so muss dasselbe linker Hand der Fall sein. Eliminirt man daher eine der Variabelen x und y aus den vorstehenden zwei Gleichungen, so muss die andere Variabele von selbst wegfallen und eine Gleichung zwischen z, Z und dZ übrig bleiben. Das Integral dieser Differenzialgleichung enthält z, Z und eine Constante; bestimmt man Z daraus und substituirt diesen Werth in die Gleichung 10), so hat man das gesuchte Integral.

Die Differenzialgleichung z. B.

12) $$(2xz + z^3)\, dx + 2yz\, dy - 2(x^2 + y^2 + k)\, dz = 0$$

genügt den in Nro. 7) angegebenen Bedingungen; betrachtet man z vorerst als Constante, so wird die Gleichung 12) zur folgenden:

$$(2x+z^2)\,dx + 2y\,dy = 0,$$

worin die Variabelen bereits gesondert sind; ihr Integral ist:

13) $$x^2 + xz^2 + y^2 = Z.$$

Das totale Differenzial dieser Gleichung ist:

$$(2x+z^2)\,dx + 2y\,dy + 2xz\,dz = dZ,$$

und mit Rücksicht auf die ursprüngliche Gleichung 12):

$$2\,\frac{x^2+y^2+k}{z}\,dz + 2xz\,dz = dZ.$$

Schafft man eine der Variabelen x und y, etwa die letztere weg, indem man die Gleichung 13) zu Hülfe nimmt, so fällt auch die andere Variabele heraus und es bleibt

$$2\,\frac{Z+k}{z}\,dz = dZ \quad\text{oder}\quad 2\,\frac{dz}{z} = \frac{dZ}{Z+k},$$

mithin

$$Cz^2 = Z + k, \quad Z = Cz^2 - k,$$

wo C die Integrationsconstante bezeichnet. Das gesuchte Integral der Differenzialgleichung 11) ist folglich:

14) $$x^2 + y^2 + (x - C)z + k = 0.$$

Hier wie in jedem anderen Falle kommt also die Integration einer totalen Differenzialgleichung erster Ordnung zwischen drei Variabelen auf die Integration zweier Differenzialgleichungen zwischen zwei Variabelen zurück. Aehnliche Sätze würden sich für totale Differenzialgleichungen mit mehreren Variabelen aufstellen lassen. Enthält die gegebene Differenzialgleichung verschiedene Potenzen von dx, dy, dz etc., so kann man sie in Beziehung auf eine dieser Variabelen auflösen und unterscheiden, ob das Resultat von irrationaler oder von rationaler Form ist; im ersten Falle besitzt die Differenzialgleichung gar keine Auflösung und hat überhaupt keinen Sinn, im zweiten Falle ist die Differenzialgleichung das Produkt mehrerer Differenzialgleichungen von der Form

$$\varphi\,dx + \psi\,dy + \chi\,dz = 0,$$

und wird integrirt, indem man die Faktoren einzeln als Differenzialgleichungen behandelt. Aus der Gleichung z. B.

$$m\,dx^2 + n\,dy^2 + p\,dz^2 + 2q\,dx\,dy + 2r\,dx\,dz + 2s\,dy\,dz = 0$$

findet man

$$dz = \frac{-r\,dx - s\,dy \pm \sqrt{A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2}}{p},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$r^2 - mp = A, \quad rs - pq = B, \quad s^2 - np = C.$$

Welche Funktion von x und y aber z auch sein möge, so steht dz doch unter der Form:

$$dz = \frac{\partial x}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy,$$

und es ist deshalb der obige Werth von dz so lange eine analytische Unmöglichkeit, als die Wurzelgrösse vorkommt; wird aber

$$A\, dx^2 + 2B\, dx\, dy + C\, dy^2$$

zu einem vollständigen Quadrate, wozu die Bedingung $B^2 = AC$ gehört, so ist dz rational und die ursprüngliche Differenzialgleichung das Produkt zweier linearen Faktoren.

Das im Vorigen auseinandergesetzte Verfahren, um vorerst die Bedingung der Integrabilität und nachher das Integral selbst zu finden, bleibt im Wesentlichen auch bei totalen Differenzialgleichungen höherer Ordnungen dasselbe, veranlasst aber der Natur der Sache nach weitläufigere Rechnungen. Das äusserst seltene Vorkommen derartiger Differenzialgleichungen überhebt uns der Mühe, tiefer auf sie einzugehen.

§. 116.

Partielle Differenzialgleichungen erster Ordnung.

Wenn x und y zwei unabhängige Variabele bedeuten, z eine noch unbekannte Funktion derselben ist, und die partiellen Differenzialquotienten von z durch $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ bezeichnet werden, so kann man die Gleichung

$$1) \qquad F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

als das allgemeine Schema einer partiellen Differenzialgleichung zwischen drei Veränderlichen ansehen, und die Aufgabe würde sein, aus der Gleichung 1) eine primitive Gleichung von der Form $z = f(x, y)$, d. h. ihr Integral zu entwickeln. Denken wir uns, um die Sache unter einen geometrischen Gesichtspunkt zu bringen, x, y, z als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes im Raume, so bedeutet die Gleichung $z = f(x, y)$ eine Fläche, welcher die in Nro. 1) angegebene Eigenschaft zukommen soll, und es bezieht sich diese Eigenschaft auf die Lage der Tangentialebenen oder der Normalen der Fläche, wie aus dem Vorkommen der partiellen Differenzialquotienten unmittelbar erhellt (§. 22). Vermöge dieser Bemerkung kann die Construktion der fraglichen Fläche auf folgende Weise vor sich gehen. Wir geben der einen unabhängigen Variabelen einen willkürlichen Anfangswerth x_0, legen in der Entfernung $x = x_0$ eine Ebene parallel zur Coordinatenebene yz und zeichnen in dieser Parallelebene eine beliebige krumme Linie $z = \psi(y)$, welche wir als Durchschnitt der gesuchten Fläche mit jener Parallelebene betrachten. Für jeden Punkt dieses Durchschnittes sind $x = x_0$, y und z bekannt, ebenso ist es auch $\frac{\partial z}{\partial y}$ vermöge der Gleichung $z = \psi(y)$. Die Gleichung 1) kann jetzt dienen, um $\frac{\partial z}{\partial x}$ zu bestimmen, oder, genauer ausgedrückt, um den Spezialwerth zu finden, welchen $\frac{\partial z}{\partial x}$ für $x = x_0$ annimmt. Da nunmehr x, y, z, $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ innerhalb der ganzen Ausdehnung jenes Parallelschnittes gegeben sind, so lässt sich auch durch jeden Punkt desselben eine Ebene legen, deren Gleichung, in den laufenden Coordinaten ξ, η, ζ ausgedrückt,

$$\zeta - z = \frac{\partial z}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(\eta - y), \quad x = x_0$$

wäre, und es sind diese Ebenen nichts Anderes als die Berührungsebenen, welche die Fläche längs jenes Parallelschnittes an sich trägt. Geben wir dem x einen zweiten Werth $x_1 = x_0 + dx_0$ und legen wiederum eine Parallelebene zu yz, so wird diese von jenem System der Berührungsebenen in einer Curve $z = \psi_1(y)$ geschnitten, welche bei der unendlich geringen Verschiedenheit von x_0 und x_1 als zweiter Parallelschnitt der gesuchten Fläche gelten muss. Von diesem Schnitte ausgehend, können wir die vorige Construktion wiederholen, die continuirliche Folge der zu $z = \psi_1(y)$ gehörenden Tangentialebene bilden, dann zu einem dritten Parallelschnitte in der Entfernung $x_2 = x_1 + dx_1$ übergehen u. s. w. So ist die Fläche ihrer ganzen Ausdehnung nach bestimmt durch die stetige Aufeinanderfolge ihrer Querschnitte parallel zur yz Ebene, sobald nur der erste dieser Querschnitte $z = \psi(y)$, $x = x_0$ gegeben oder willkürlich angenommen wird. Wenn demnach ausser der Differenzialgleichung keine weitere Beziehung zwischen x, y und z vorgelegt ist, so charakterisirt sie eine unendliche Menge von Flächen, deren spezielle Gestalt von den Curven $[z = \psi(y)]$ abhängt, durch welche man sie hindurchgehen lassen will; das Integral ist daher nicht nur jederzeit möglich, sondern auch in sofern unbestimmt, als es eine willkürliche Funktion enthalten muss. Dies bestätigt sich analytisch leicht, wenn man eine partielle Differenzialgleichung bildet. Dreht man z. B. eine beliebige in der Coordinatenebene yz gezeichnete Curve $z = \psi(y)$ um die Achse der z, so entsteht eine Umdrehungsfläche, deren Gleichung ist

$$z = \psi(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

und man findet:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x\psi'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y\psi'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

daraus lässt sich die partielle Differenzialgleichung

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ableiten, welche geometrisch bedeutet, dass alle Normalen einer Rotationsfläche die z Achse durchschneiden.

Auf die vorigen geometrischen Betrachtungen stützt sich unmittelbar die Integration der linearen partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung, deren Schema ist:

2) $$\varphi(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + \psi(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = \chi(x, y, z).$$

Wie nämlich auch die zu Grunde liegende Integralgleichung $F(x, y, z) = 0$ beschaffen sein möge, so würde doch z, als Funktion von x und y betrachtet, derselben entnommen werden können und jedenfalls die Gleichung

3) $$dz = \frac{\partial z}{\partial y}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

stattfinden müssen; durch Substitution des Werthes von $\frac{\partial z}{\partial x}$ aus Nro. 2) erhält sie die Form:

4) $$(\varphi\,dz - \chi\,dx) - (\varphi\,dy - \psi\,dx)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Denkt man sich wie früher x für den Augenblick als constant, so würde diese Gleichung dem in der Entfernung x parallel zur Coordinatenebene yz gelegten Querschnitte zugehören; dieser Querschnitt ist eine beliebige Curve, mithin $\frac{\partial z}{\partial y}$ eine ganz willkürliche Grösse und die Gleichung 4) kann daher nur bestehen, wenn die Gleichungen

5) $$\varphi\,dz - \chi\,dx = 0, \quad \varphi\,dy - \psi\,dx = 0$$

für sich stattfinden. In der That würde, wenn die vorstehenden

Gleichungen nicht erfüllt wären, aus Nro. 4) ein ganz bestimmter Werth von $\frac{\partial z}{\partial y}$ folgen, und dies ist unmöglich, weil durch jeden Punkt xyz eine unendliche Menge von Flächen der verschiedenartigsten Querschnitte gelegt werden kann, welche Flächen sämmtlich der aufgestellten Differenzialgleichung genügen. Aus den Gleichungen 5) folgt von selbst noch eine dritte, nämlich $\psi\, dz - \chi\, dy$, welche man auch durch Elimination von $\frac{\partial z}{\partial y}$ statt von $\frac{\partial z}{\partial x}$ gefunden haben würde. Die Differenzialgleichung 2) zieht also folgende drei Gleichungen nach sich:

$$6)\qquad \begin{cases} \varphi\, dy - \psi\, dx = 0, \\ \varphi\, dz - \chi\, dx = 0, \\ \psi\, dz - \chi\, dy = 0, \end{cases}$$

welche keine partiellen Differenziale enthalten. Hat man aus zwei dieser Gleichungen oder aus zwei Combinationen derselben durch gewöhnliche Integrationen ein paar neue Integralgleichungen abgeleitet, so sind diese von den Formen

$$7)\qquad \Phi(x, y, z) = C, \qquad \Psi(x, y, z) = C_1,$$

worin C und C_1 zwei willkürliche Constanten bezeichnen, und man kann mittelst der Gleichungen 7) x und y durch z ausdrücken. Nachdem dies geschehen, verwandelt sich die noch nicht näher bekannte Integralgleichung $F(x, y, z) = 0$ bei Substitution jener Werthe von x und y in eine neue Gleichung, die nur z, C und C_1 enthält, etwa $\mathfrak{F}(z, C, C_1) = 0$; differenzirt man sie, so folgt $\frac{d\mathfrak{F}(z, C, C_1)}{dz} = 0$, was aber nur möglich ist, wenn die Gleichung $\mathfrak{F}(z, C, C_1) = 0$ kein z mehr enthält. Dass in der That z von selbst aus der Gleichung $\mathfrak{F}(z, C, C_1)$ verschwunden sein muss, erkennt man übrigens auch an dem Umstande, dass sonst entweder z constant wäre, oder C und C_1 spezielle unveränderliche Werthe haben müssten, was Beides mit der Allgemeinheit der ganzen Betrachtung unverträglich ist. Nach dem Verschwinden von z bleibt nur $\mathfrak{F}(C, C_1) = 0$ übrig, woraus folgt, dass C_1 irgend eine nicht näher bestimmbare und ebendeshalb willkürliche Funktion von C sein muss, etwa $C_1 = f(C)$, oder nach Nro. 7):

$$8)\qquad \Psi(x, y, z) = f[\Phi(x, y, z)].$$

Diese Gleichung ist nun das gesuchte Integral.

Beispiel 1. Der partiellen Differenzialgleichung

9) $$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

entsprechen die Hülfsgleichungen

$$a\,dy - b\,dx = 0, \qquad a\,dz = 0,$$

d. i. $$ay - bx = C, \qquad z = C_1;$$

das Integral ist daher $C_1 = f(C)$ oder

10) $$z = f(ay - bx),$$

was man leicht prüfen kann.

Beispiel 2. Die im Anfange dieses Paragraphen erwähnte Differenzialgleichung

11) $$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

giebt, auf gleiche Weise behandelt:

$$y\,dy + x\,dx = 0, \qquad y\,dz = 0,$$
$$y^2 + x^2 = C, \qquad z = C_1;$$

mithin:

12) $$z = f(x^2 + y^2),$$

was mit dem Früheren der Sache nach übereinstimmt.

Beispiel 3. Sei allgemeiner

13) $$X\frac{\partial z}{\partial x} + Y\frac{\partial z}{\partial y} = Z,$$

wobei X, Y, Z Funktionen von x, y, z allein bezeichnen mögen, so sind die Hülfsgleichungen:

$$X dy - Y dx = 0, \qquad X dz - Z dx = 0;$$

in beiden ist die Trennung der Variabelen sehr leicht und giebt:

$$\int\frac{dy}{Y} - \int\frac{dx}{X} = C, \quad \int\frac{dz}{Z} - \int\frac{dx}{X} = C_1,$$

mithin als Integral:

14) $$\int\frac{dz}{Z} - \int\frac{dx}{X} = f\left\{\int\frac{dy}{Y} - \int\frac{dx}{X}\right\}.$$

In dem speziellen Falle

15) $$\frac{a}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{b}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 2(a+b)\,z$$

hat man nach Formel 14):

$$\frac{lz}{2(a+b)} - \frac{x^2}{2a} = f\left\{\frac{y^2}{2b} - \frac{x^2}{2a}\right\};$$

um dieser Gleichung mehr Symmetrie zu verschaffen, geben wir ihr zunächst die Form:

$$alz - (a+b)x^2 = 2a(a+b)f\left\{\frac{ay^2 - bx^2}{2ab}\right\} = F(ay^2 - bx^2),$$

wo F eine neue willkürliche Funktion bezeichnet; denken wir sie uns als bestehend aus $F_1(ay^2 - bx^2) + ay^2 - bx^2$, so wird

$$lz = x^2 + y^2 + \frac{1}{a}F_1(ay^2 - bx^2),$$

und wenn wir endlich z selbst bestimmen:

16) $$z = e^{x^2+y^2} f(ay^2 - bx^2).$$

Auch hier ist $f(ay^2 - bx^2)$ wiederum eine beliebige Funktion von $ay^2 - bx^2$.

Beispiel 4. Die gegebene Differenzialgleichung sei:

17) $$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay;$$

die Hülfsgleichungen lauten dann:

$$(cy - bz)\,dy - (az - cx)\,dx = 0,$$
$$(cy - bz)\,dz - (bx - ay)\,dx = 0,$$
$$(bx - ay)\,dy - (az - cx)\,dz = 0,$$

und sind nicht unmittelbar integrabel, weil in jeder von ihnen drei Variabele vorkommen; multiplizirt man aber die zweite mit a, die dritte mit b, und zieht jene von dieser ab, so bleibt nach Hebung von $bx - ay$:

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0, \text{ mithin } ax + by + cz = C.$$

Um ein zweites Integral zu erhalten, multipliziren wir die zweite Gleichung mit $-x$, die letzte mit y, und nehmen die Summe beider; nach Hebung von $bx - ay$ wird so:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0, \text{ mithin } x^2 + y^2 + z^2 = C_1;$$

das gesuchte Integral ist folglich:

18) $$x^2 + y^2 + z^2 = f(ax + by + cz).$$

Das Verfahren, welches zur Integration der bisherigen partiellen Differenzialgleichungen zwischen drei Variabelen angewendet wurde, passt wörtlich auf den Fall einer grösseren Anzahl von Variabelen. Wäre z. B. die gegebene Differenzialgleichung:

$$\varphi\frac{\partial u}{\partial x} + \psi\frac{\partial u}{\partial y} + \chi\frac{\partial u}{\partial z} = \sigma,$$

worin u als unbekannte Funktion von x, y, z betrachtet wird, φ, ψ,

χ und σ gegebene Funktion von x, y, z, u sind, so würde man diese Gleichung mit

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz$$

zusammenhalten, nämlich $\frac{\partial u}{\partial x}$ eliminiren und nachher die Coefficienten von $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial z}$, sowie die von $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial z}$ freien Glieder der Null gleich setzen müssen. Hierdurch ergeben sich drei Differenzialgleichungen gewöhnlicher Art, deren Integrale $\Phi = C$, $\Phi_1 = C_1$ und $\Phi_2 = C_2$ heissen mögen. Zwischen den Constanten C, C_1, C_2 ist endlich noch eine willkürliche Beziehung $F(C, C_1, C_2) = 0$ oder $C_2 = f(C, C_1)$ aufzustellen, in welche für C, C_1 und C_2 die Werthe Φ, Φ_1, Φ_2 einzuführen sind.

§. 117.

Partielle Differenzialgleichungen höherer Ordnungen.

Das im vorigen Paragraphen auseinandergesetzte Verfahren, welches in der Zurückführung einer partiellen Differenzialgleichung auf ein System gewöhnlicher Differenzialgleichungen besteht, ist zwar mit einigen Modifikationen auch bei partiellen Differenzialgleichungen höherer Ordnungen theoretisch anwendbar, bringt aber häufig in sofern keinen wesentlichen Vortheil, als die Integration des entstandenen Systemes von Differenzialgleichungen nicht selten eben so grosse oder noch grössere Schwierigkeiten darbietet, wie die direkte Integration der ursprünglichen Differenzialgleichung. Auf eine tiefere Untersuchung der Fälle einzugehen, in welchen jene Reduktion in der That von Nutzen sein kann, fehlt hier der Raum, und wir begnügen uns daher mit der Betrachtung einer bestimmten Klasse partieller Differenzialgleichungen höherer Ordnungen; es sind dies die mit constanten Coefficienten versehenen linearen Differenzialgleichungen, welche deswegen eine besondere Aufmerksamkeit verdienen, weil sie bei vielen Problemen der mathematischen Physik eine wichtige Rolle spielen. Das Verfahren zu ihrer Integration besteht immer darin, dass man zunächst ein partikuläres Integral aufsucht und das allgemeine Integral aus einer Reihe partikulärer Integrale zusammensetzt.

I. Bleiben wir vorerst bei der schon besprochenen Differenzialgleichung

$$1) \qquad a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

stehen, so liegt der Versuch nicht fern, ihr durch einen Ausdruck von der Form

$$z = e^{\beta x + \gamma y}$$

zu genügen, wo β und γ vor der Hand noch unbestimmte Coefficienten bedeuten; die Substitution giebt

$$(a\beta + b\gamma)\, e^{\beta x + \gamma y} = 0, \text{ mithin } \gamma = -\frac{a}{b}\beta,$$

wo β völlig willkürlich bleibt. Ein partikuläres Integral der Differenzialgleichung 1) ist also

$$z = e^{\beta x - \frac{a}{b}\beta y} \quad \text{oder} \quad z = e^{\mu(bx - ay)},$$

wenn $\beta = b\mu$ gesetzt wird; etwas allgemeiner wäre

$$z = Ce^{\mu(bx - ay)},$$

welcher Ausdruck ebenfalls der Gleichung 1) genügt. Giebt man den willkürlichen Constanten C und μ verschiedene Werthe und vereinigt die so entstehenden partikulären Integrale, so gelangt man zu dem allgemeinen Integrale:

$$2) \quad z = C_0 e^{\mu_0(bx - ay)} + C_1 e^{\mu_1(bx - ay)} + C_2 e^{\mu_2(bx - ay)} + \ldots$$

Auf den ersten Blick scheint dieser Ausdruck von dem früher gefundenen $z = f(ay - by)$ verschieden zu sein; man überzeugt sich aber von der Uebereinstimmung beider Formen auf folgendem Wege. Sei zur Abkürzung $ay - bx = u$, ferner $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = \sqrt{-1}$, $\mu_2 = 2\sqrt{-1}$, $\mu_3 = 3\sqrt{-1}$ etc., und

$$\mu_n = \frac{n\pi}{\lambda}\sqrt{-1},$$

so erhält z folgende mittelst Summenzeichen abgekürzte Form:

$$z = \sum_0^\infty C_n \cos\frac{n\pi u}{\lambda} - \sqrt{-1}\sum_1^\infty C_n \sin\frac{n\pi u}{\lambda}.$$

Jede Summe genügt für sich allein der Differenzialgleichung; man hat daher als neues Integral:

$$z = \sum_0^\infty A_n \cos\frac{n\pi u}{\lambda} + \sum_1^\infty B_n \sin\frac{n\pi u}{\lambda},$$

d. h. wenn man die Coefficienten A_n und B_n nach den Formeln des §. 81 wählt, $z = \psi(u) = \psi(ay - bx)$, wie früher.

II. Wenden wir auf die Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$3)\quad a_0 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b_0 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + c_0 \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + b_1 \frac{\partial z}{\partial y} + c_1 z = 0$$

dieselbe Substitution an

$$z = e^{\beta x + \gamma y},$$

so ergiebt sich zwischen β und γ die Bedingung:

$$4)\quad a_0 \beta^2 + b_0 \gamma^2 + c_0 \beta \gamma + a_1 \beta + b_1 \gamma + c_1 = 0,$$

vermöge deren sich γ durch β ausdrücken lässt. Dasselbe würde in ähnlicher Weise bei einer linearen Differenzialgleichung höherer Ordnung mit constanten Coefficienten der Fall sein, und wir können daher $\gamma = \varphi(\beta)$ setzen, indem wir uns die algebraische Hülfsgleichung jederzeit in Beziehung auf γ aufgelöst denken. Partikuläre Integrale der ursprünglichen Differenzialgleichung sind demnach alle Ausdrücke von den Formen

$$e^{\beta x + \varphi(\beta) y} \quad \text{oder} \quad C e^{\beta x + \varphi(\beta) y},$$

und folglich ist das allgemeine Integral:

$$5)\quad z = C_0 e^{\beta_0 x + \varphi(\beta_0) y} + C_1 e^{\beta_1 x + \varphi(\beta_1) y} + C_2 e^{\beta_2 x + \varphi(\beta_2) y} + \ldots .$$

Die hier vorkommende Reihe lässt sich in manchen Fällen wie früher durch eine willkürliche Funktion ausdrücken; so entspricht z. B. der Differenzialgleichung

$$6)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

die quadratische Hülfsgleichung $\gamma^2 = a^2 \beta^2$, woraus $\gamma = \pm a \beta$ folgt; man hat daher sowohl

$$z = C_0 e^{\beta_0 (x + ay)} + C_1 e^{\beta_1 (x + ay)} + \ldots = \Phi(x + ay),$$

als auch

$$z = C_0 e^{\beta_0 (x - ay)} + C_1 e^{\beta_1 (x - ay)} + \ldots = \Psi(x - ay).$$

Demnach ist das vollständige Integral:

$$7)\quad z = \Phi(x + ay) + \Psi(x - ay);$$

in der That genügt dieser Ausdruck der Differenzialgleichung 6); dass er aber ihr allgemeinstes Integral ist, erkennt man an dem Vorkommen zweier willkürlicher Funktionen.

Lässt sich die erwähnte Zusammenziehung der Reihen nicht ausführen, so ist es nicht selten von Vortheil, die einzelnen Glieder der Reihe 5) unendlich klein, ihre Anzahl unendlich gross und somit die Reihe zu einem bestimmten Integrale werden zu lassen.

Man denkt sich nämlich die willkürliche Constante C als beliebige Funktion der Constanten β und setzt:

$$\beta_1 = \beta_0 + \delta, \quad \beta_2 = \beta_0 + 2\delta, \quad \beta_3 = \beta_0 + 3\delta, \ldots .$$

$$C_0 = f(\beta_0)\,\delta, \quad C_1 = f(\beta_0 + \delta)\,\delta, \quad C_2 = f(\beta_0 + 2\delta)\,\delta, \ldots .$$

dann ist, wenn n Glieder genommen werden:

$$z = \Sigma\, f(\beta)\, e^{\beta x + \varphi(\beta) y}\, \delta,$$

und zwar bezieht sich das Summenzeichen auf alle die Werthe, welche der hinter demselben stehende Ausdruck für $\beta = \beta_0$, $\beta_0 + \delta$, $\beta_0 + 2\delta, \ldots \beta_0 + (n-1)\delta$ erhält. Nehmen wir $\beta_0 + n\delta$ constant $= \beta_1$, mithin $\delta = \frac{\beta_1 - \beta_0}{n}$, und lassen n ins Unendliche wachsen, so wird $\delta = d\beta$ und

$$8) \qquad z = \int_{\beta_0}^{\beta_1} f(\beta)\, e^{\beta x + \varphi(\beta) y}\, d\beta.$$

Der Gebrauch dieser Formel besteht darin, dass man aus einem partikulären Integrale einer gegebenen linearen partiellen Differenzialgleichung mit constanten Coefficienten und von beliebiger Ordnung sogleich eine unendliche Menge anderer partikulärer Integrale ableiten kann, indem man β_0, β_1 und $f(\beta)$ willkürlich wählt.

Als Beispiel möge die Differenzialgleichung

$$9) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = k\, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

dienen. Die entsprechende algebraische Hülfsgleichung ist $\gamma = k\beta^2 = \varphi(\beta)$, mithin

$$z = e^{\beta x + k\beta^2 y}$$

ein partikuläres Integral von Nro. 9). Ein paar andere partikuläre Integrale finden sich, wenn man β imaginär werden, also z. B. $\beta\sqrt{-}$ an die Stelle von β treten lässt; es wird dann

$$z = (\cos\beta x + \sqrt{-1}\,\sin\beta x)\, e^{-k\beta^2 y},$$

oder wenn man die einzelnen Theile nimmt:

$$10) \qquad z = e^{-k\beta^2 y}\cos\beta x \text{ und } z = e^{-k\beta^2 y}\sin\beta x.$$

Wendet man auf das erste dieser partikulären Integrale die Formel 8) an, so ist auch:

$$11) \qquad z = \int_{\beta_0}^{\beta_1} f(\beta)\, e^{-k\beta^2 y}\cos\beta x\, d\beta,$$

also z. B. für $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = \infty$, $f(\beta) = 1$, und nach Formel 19) in §. 84 ($2b = x$, $t = \beta$, $a^2 = ky$):

$$12)\qquad z = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{ky}}\, e^{-\left(\frac{x^2}{4ky}\right)}.$$

In der That befriedigt dieser Ausdruck die Differenzialgleichung 9), ist aber von den vorher gefundenen partikulären Integralen so verschieden, dass man auf anderem Wege (z. B. durch Versuche) schwerlich dazu gekommen sein würde.

Man ersieht aus dem Vorigen, dass die partikulären Integrale einer partiellen Differenzialgleichung sehr mannigfaltige Formen annehmen können, und dass ebendeswegen die Aufgabe der Integration einer solchen Differenzialgleichung in gewisser Beziehung etwas Unbestimmtes hat. Völlig bestimmt wird die Aufgabe erst dann, wenn Nebenbedingungen hinzutreten, wie sie bei den physikalischen Anwendungen der obigen Differenzialgleichungen in der That vorhanden sind. Es kommt in solchen Fällen darauf an, dem allgemeinen Integrale gerade die Form zu ertheilen, welche sich mit den gegebenen Nebenbedingungen verträgt. Beispiele hierzu enthalten die folgenden Paragraphen.

§. 118.

Fortsetzung.

I. Die gegebene Differenzialgleichung sei:

$$1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

mithin u eine unbekannte Funktion von x und t; man soll sie so bestimmen, dass sie sich für $t = 0$ auf eine vorgeschriebene Funktion von x, etwa $\varphi(x)$, reduzirt *).

*) Das physikalische Problem, welches die Lösung der obigen Aufgabe fordert, ist der Anfang der mathematischen Theorie der Wärme und lautet folgendermassen: man denke sich den unendlichen Raum mit einer wärmeleitenden Substanz angefüllt und so erwärmt, dass in allen Punkten einer auf der Abscissenachse senkrechten Ebene dieselbe Temperatur stattfindet, dass aber diese Temperatur von einer Ebene zur anderen variirt, wobei $v_0 = \varphi(x)$ die Temperatur sein möge, welche die in der Entfernung x senkrecht auf die x Achse gestellte Ebene anfänglich, d. h. zur Zeit Null, erhalten hat. Wird nun der Körper sich selbst überlassen, so findet eine Temperaturenausgleichung statt und am Ende der Zeit t wird in jener Ebene eine Temperatur v herrschen, welche eine Funktion von x und t ist, etwa

Da die obige Differenzialgleichung mit der unter Nro. 9) des vorigen Paragraphen verzeichneten Differenzialgleichung identisch ist, so können wir zufolge von Nro. 10) die Ausdrücke

$$u_1 = e^{-kt\omega^2} \cos x\omega \quad \text{und} \quad u_2 = e^{-kt\omega^2} \sin x\omega$$

$v = F(x, t)$, und von der man im Voraus weiss, dass sie für $t = 0$ wieder in $\varphi(x)$ übergehen muss. Um eine zweite Eigenschaft derselben kennen zu lernen, betrachten wir den Gang der Temperaturenausgleichung näher.

Als Ursachen der verschiedenen Temperaturen eines Körpers gelten die verschiedenen Wärmemengen, die er enthalten kann; rechnen wir letztere den ersten proportional und nennen w das Wärmequantum, welches der Masseneinheit zugeführt werden muss, damit ihre Temperatur von 0° auf v Centesimalgrade steige, so ist $w = Cv$ und dabei C ein nur von der Natur jener Masse abhängiger Coefficient, die sogenannte spezifische Wärme oder die Wärme, durch deren Aufnahme die Temperatur der Masseneinheit um 1° erhöht wird. Soll nicht die Einheit der Masse, sondern die Masse M auf die Temperatur v gebracht werden, so ist M mal mehr Wärme, d. h. $M \,.\, Cv$ erforderlich, mithin das neue Wärmequantum $W = \Theta V \,.\, Cv$, wenn Θ die Dichtigkeit und V das Volumen bedeutet. Denken wir uns den unendlichen Raum zusammengesetzt aus parallelen Cylindern oder Prismen von dem gleichen Querschnitte q, deren Längenrichtungen mit der Richtung der x zusammenfallen, so brauchen wir nur die Wärmebewegung in einem solchen Körper zu betrachten und dann sind die Verhältnisse folgende. Die Temperatur v, welche der in der Entfernung x liegende Querschnitt q am Ende der Zeit t hatte, wird sich während der Zeit dt um dv, oder, besser ausgedrückt, um $\frac{\partial v}{\partial t}\, dt$ ändern; dazu gehört nach dem Vorigen, dass das Volumenelement $q\, dx$ die Wärmemenge $\Theta q\, dx \,.\, C \frac{\partial v}{\partial t}\, dt$ aufgenommen habe, wobei natürlicherweise vorausgesetzt ist, dass in dem ganzen Volumenelemente $q dx$ die nämliche Temperatur v herrsche, wie in seinem vorderen Querschnitte q. — Um einen zweiten Ausdruck für dieselbe Wärmemenge zu finden, betrachten wir zwei getrennte Querschnitte q und $q' = q$ in den Entfernungen x und $x' < x$, mit den Temperaturen v und $v' < v$. Die Temperaturenausgleichung besteht nun darin, dass Wärme von q nach q' (der Richtung der x entgegen) überströmt und zwar um so mehr, je grösser der entsendende Querschnitt q, je grösser die Temperaturdifferenz $v - v'$ und je kleiner der Abstand $x - x'$ ist; demnach lässt sich die während der Zeiteinheit von q nach q' übergehende Wärmemenge durch $Kq \frac{v' - v'}{x - x'}$ ausdrücken, wo der Coefficient K die sogenannte innere Leitungsfähigkeit der Masse bezeichnet. Für $x' = x - dx$, $v' = v - dv$ $= v - \frac{\partial v}{\partial x}\, dx$ geht der vorige Ausdruck in $Kq \frac{\partial v}{\partial x}$ über und giebt die Wärmemenge an, welche während der Zeiteinheit aus dem vorderen Querschnitte des Elementes q in den nächstvorhergehenden, nicht mehr zu die-als partikuläre Integrale ansehen; daraus lässt sich ein drittes Integral bilden, indem man $u_3 = u_1 \cos\omega\vartheta + u_2 \sin\omega\vartheta$ setzt, wo ϑ eine willkürliche Constante bezeichnet. Der nunmehrige Ausdruck

$$2)\qquad u_3 = e^{-kt\omega^2}\cos(\vartheta - x)\,\omega$$

befriedigt zwar die Differenzialgleichung 1), geht aber für $t = 0$ in $\cos(\vartheta - x)\,\omega$ über, während er zu $\varphi(x)$ werden sollte. Aus $\cos(\vartheta - x)\,\omega$ lässt sich jedoch $\varphi(x)$ herleiten, und zwar mittelst des Fourier'schen Satzes:

$$3)\qquad \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\varphi(\vartheta)\cos(\vartheta - x)\,\omega\,d\omega\,d\vartheta,$$

d. h. dadurch, dass man $\cos(\vartheta - x)\,\omega$ mit $\frac{1}{2\pi}\varphi(\vartheta)\,d\omega\,d\vartheta$ multiplizirt und nachher zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ integrirt. Dieselben Operationen geben auf u_3 angewendet:

$$4)\qquad u = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt\omega^2}\cos(\vartheta - x)\,\omega\,.\,\frac{1}{2\pi}\varphi(\vartheta)\,d\omega\,d\vartheta,$$

und dieser Ausdruck erfüllt in der That alle Bedingungen. Da nämlich ϑ und ω von x und t unabhängig sind, so unterscheidet sich das Produkt

$$5)\qquad e^{-kt\omega^2}\cos(\vartheta - x)\,\omega\,.\,\frac{1}{2\pi}\varphi(\vartheta)\,d\omega\,d\vartheta$$

---

sem Elemente gehörenden Querschnitt des Cylinders zurückweicht; in der Zeit dt verliert daher das Volumenelement $q\,dx$ die aus seinem vorderen Querschnitte austretende Wärmemenge $w = Kq\,\frac{\partial v}{\partial x}\,dt$; dagegen nimmt es durch den am Ende (in der Entfernung $x + dx$ befindlichen) Querschnitt q Wärme auf, nämlich $w + \frac{\partial w}{\partial x}\,dx = Kq\,\frac{\partial v}{\partial x}\,dt + Kq\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx\,dt$. Der Unterschied beider Wärmemengen $\frac{\partial w}{\partial x}\,dx = Kq\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx\,dt$ bleibt in dem Volumenelemente und muss der Wärmemenge gleich sein, welche die früher betrachtete Temperaturerhöhung des Elementes zur Folge hatte; demnach ist die Differenzialgleichung der Wärmebewegung

$$\Theta Cq\,\frac{\partial v}{\partial t}\,dx\,dt = Kq\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx\,dt,$$

oder

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

wobei zur Abkürzung $\frac{K}{\Theta C} = k$ gesetzt worden ist. Schreibt man u für v, so hat man die im Texte angegebene Differenzialgleichung.

nur darin von u_3, dass es an constanten Faktoren reicher als u_3 oder von der Form u_3 . *Const.* ist. Es bildet demnach der Ausdruck in 5) gleichfalls ein partikuläres Integral der Gleichung 1), mithin genügt auch eine Summe unendlich vieler Glieder von der Form 5), d. h. das Doppelintegral in 4), der ursprünglichen Differenzialgleichung; ausserdem wird für $t = 0$ die rechte Seite der Gleichung 4) identisch mit dem Doppelintegrale in Nro. 3), folglich $u = \varphi(x)$. Der Werth von u gestaltet sich einfacher, wenn man die Reihenfolge der Integrationen umkehrt und in der nunmehrigen Form:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt\omega^2} \cos(\vartheta - x)\,\omega\, d\omega,$$

die auf ω bezügliche Integration mittelst der Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\omega^2} \cos b\omega\, d\omega = 2\int_{0}^{\infty} e^{-a\omega^2} \cos b\omega\, d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

ausführt; man erhält:

$$6) \qquad u = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\vartheta)\, d\vartheta\, e^{-\frac{(\vartheta - x)^2}{4kt}}.$$

Führt man endlich eine neue Variabele η ein mittelst der Substitution

$$\frac{(\vartheta - x)^2}{4kt} = \eta^2, \text{ d. i. } \vartheta = x + 2\eta\sqrt{kt},$$

so stellt sich u unter die elegantere Form:

$$7) \qquad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} \varphi(x + 2\eta\sqrt{kt})\, d\eta.$$

Auch hier ist die Prüfung sehr leicht; benutzt man für u die erste Form (Nro. 6), so findet sich, dass u der Gleichung 1) genügt; aus der zweiten Form (Nro. 7) geht dagegen hervor, dass für $t = 0$, $u = \varphi(x)$ wird.

II. Die Differenzialgleichung sei wieder die nämliche, die gesuchte Funktion u aber den zwei Bedingungen unterworfen, für $t = 0$ in $\varphi(x)$ überzugehen und für $x = 0$ zu verschwinden, was auch t sein möge *).

---

*) Die obigen Bedingungen entsprechen in der Theorie der Wärme folgendem Falle. Es sei der unendliche Raum nur auf der positiven Seite der x mit Masse erfüllt und erwärmt wie vorhin, an der Stelle $x = 0$ aber begrenzt durch eine Vertikalebene, welche mit einer Wärmequelle so in Verbindung steht, dass jene begrenzende Ebene fortwährend auf der constanten Temperatur c erhalten wird. — Im Texte steht u statt der Temperatur v und sind die beiden Fälle $c = 0$ und $c \gtrless 0$ getrennt behandelt.

Die vorige Auflösung ist jetzt nicht mehr brauchbar, weil für $x = 0$ nicht $u = 0$ wird; gehen wir aber von dem partikulären Integrale:

$$u_2 = e^{-kt\omega^2} \sin x\omega$$

aus, so findet diese Eigenschaft bereits statt und es kommt nur darauf an, für $t = 0$, $u = \varphi(x)$ werden zu lassen. Das obige u giebt in dem genannten Falle $\sin x\omega$ statt $\varphi(x)$; um letzteres zu erhalten, nehmen wir den Satz:

$$\varphi(x) = \int_0^\infty\int_0^\infty \sin x\omega \, \frac{2}{\pi} \, \varphi(\vartheta) \sin \omega\vartheta \, d\omega \, d\vartheta$$

zu Hülfe und setzen:

8) $$u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-kt\omega^2} \sin x\omega \, \varphi(\vartheta) \sin \omega\vartheta \, d\omega \, d\vartheta,$$

was sich wie früher sehr einfach dadurch rechtfertigt, dass das vorstehende Doppelintegral die Summe einer unendlichen Menge partikulärer Integrale von der Form $u_2 . Const.$, mithin selbst eine Auflösung der Differenzialgleichung 1) ist. Kehrt man in Nro. 8) die Anordnung der Integrationen um und zerlegt das doppelte Sinusprodukt in eine Cosinusdifferenz, so wird:

$$u = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^\infty e^{-kt\omega^2} \left\{\cos(\vartheta - x)\omega - \cos(\vartheta + x)\omega\right\} d\omega,$$

und durch Ausführung der auf ω bezüglichen Integration:

9) $$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}}\int_0^\infty \varphi(\vartheta) \left\{e^{-\frac{(\vartheta - x)^2}{4kt}} - e^{-\frac{(\vartheta + x)^2}{4kt}}\right\} d\vartheta,$$

oder auch mittelst einer ähnlichen Transformation wie vorhin:

10) $$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^\infty e^{-\eta^2} \varphi(x + 2\eta\sqrt{kt})\, d\eta$$
$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{+\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^\infty e^{-\eta^2} \varphi(-x + 2\eta\sqrt{kt})\, d\eta.$$

Würde etwas allgemeiner verlangt, dass $u = \varphi(x)$ werde für $t = 0$, dagegen $u = c$ für $x = 0$, so würde man $u - c = U$ nehmen und hätte:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

mit den Nebenbedingungen $U = 0$ für $x = 0$ und $U = \varphi(x) - c$ für $t = 0$; diese Bedingungen sind dieselben, als wenn in der vorigen Aufgabe U für u und $\varphi(x) - c$ für $\varphi(x)$ gesetzt worden wäre; entwickelt man U nach dieser Bemerkung aus Formel 9), so ist nachher für die neue Aufgabe:

$$11) \quad u = c + \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_0^\infty \left\{ \varphi(\vartheta) - c \right\} \left\{ e^{-\frac{(\vartheta - x)^2}{4kt}} - e^{-\frac{(\vartheta + x)^2}{4kt}} \right\} d\vartheta.$$

Sei beispielsweise $\varphi(x) = 0$; es ist dann:

$$u = c - \frac{c}{2\sqrt{\pi k t}} \int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{(\vartheta - x)^2}{4kt}} - e^{-\frac{(\vartheta + x)^2}{4kt}} \right\} d\vartheta,$$

$$= c - \frac{c}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^\infty e^{-\eta^2} d\eta - \int_{+\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^\infty e^{-\eta^2} d\eta \right],$$

welchen Ausdruck man leicht auf folgende Form bringt:

$$12)^{*)} \qquad u = c \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-\eta^2} d\eta \right].$$

III. Die Differenzialgleichung sei wieder dieselbe, die gesuchte Funktion u aber den drei Bedingungen unterworfen für $t = 0$ in $\varphi(x)$ überzugehen und sowohl für $x = 0$ als für $x = \lambda$ zu verschwinden **). Das partikuläre Integral:

---

*) Hieran knüpft sich folgende interessante Folgerung. Sollen zwei in verschiedenen Abständen x_1 und x_2 liegende Punkte in verschiedenen Zeiten t_1 und t_2 dieselbe Temperatur $v = u$ erreichen, so muss in jedem Falle die obere Grenze des Integrales dieselbe, mithin:

$$\frac{x_1}{\sqrt{t_1}} = \frac{x_2}{\sqrt{t_2}}$$

sein; daraus folgt die Proportion:

$$t_1 : t_2 = x_1^2 : x_2^2,$$

und es verhalten sich also jene Zeiten wie die Quadrate der Entfernungen.

**) Die zugehörige physikalische Aufgabe lautet: ein Stab von geringem Querschnitte q und der Länge λ sei ursprünglich auf irgend welche Weise erwärmt und dann in ein Mittel von der constanten Temperatur Null versetzt, während gleichzeitig die beiden Enden des Stabes auf der constanten

$$u_2 = e^{-kt\omega^2} \sin x\omega$$

ist hier wieder insofern brauchbar, als es für $x=0$ den Werth Null erhält; damit es auch für $x = \lambda$ verschwinde, d. h. $\sin\lambda\omega = 0$ werde, muss $\lambda\omega$ ein Vielfaches von π sein, also $\omega = \frac{n\pi}{\lambda}$, wenn n eine beliebige ganze positive Zahl bezeichnet. Aus dem nunmehrigen partikulären Integrale:

$$e^{-k\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{\lambda}$$

kann nun zwar durch Integration die allgemeine Form nicht herge-

---

Temperatur Null erhalten werden; man soll die Temperatur v eines Punktes nach der Zeit t bestimmen. Hat sich wie früher v in der Zeit dt um $\frac{\partial v}{\partial t}\, dt$ geändert, so ist die Wärmezunahme des Elementes $q\,dx$ dem Ausdrucke $\Theta Cq \frac{\partial v}{\partial t}\, dx\, dt$ gleich. Andererseits hat das Element $q\,dx$ durch seine Vorderfläche die Wärme $Kq \frac{\partial u}{\partial x}\, dt$ verloren, durch die Hinterfläche die Wärme $Kq \frac{\partial v}{\partial x}\, dt + Kq \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\, dx\, dt$ aufgenommen, ausserdem aber durch Ausstrahlung in das umgebende Mittel Wärme abgegeben. Heisst H die Wärmemenge, welche die Flächeneinheit der Staboberfläche während der Zeiteinheit in das Mittel entlassen würde, wenn der Stab die constante Temperatur 1 behielte, so ist die Wärme, welche die Oberfläche ω des Elementes $q\,dx$ in der Zeit dt bei der Temperatur v entlässt, dem Ausdrucke $H\omega\, dt\, v$ gleich, oder wenn p die Peripherie des Stabes bezeichnet, $= Hpv\, dx\, dt$. Nach Abzug dieser Wärme bleibt:

$$\Theta Cq \frac{\partial v}{\partial t}\, dx\, dt = Kq \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\, dx\, dt - Hpv\, dx\, dt,$$

oder:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - mv,$$

wo k die frühere Bedeutung hat und $m = \frac{Hp}{\Theta Cq}$ ist. Durch Einführung einer neuen Variabelen u mittelst der Substitution:

$$v = ue^{-mt}$$

vereinfacht sich die obige Differenzialgleichung und wird:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Da ferner v sowohl für $x = 0$, als für $x = \lambda$ verschwinden soll, so muss u dieselbe Eigenschaft besitzen; für $t = 0$ wird $u = v = v_0 = \varphi(x)$.

leitet werden, weil ω keine stetig veränderliche Grösse mehr ist, wohl aber darf man eine unendliche Reihe bilden, deren einzelne Glieder die verschiedenen für $n = 1, 2, 3 \ldots$ entstehenden partikulären Integrale sind. Nehmen wir zur Abkürzung:

$$k\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 = \varkappa,$$

so ist das allgemeine Integral:

$$13) \quad u = C_1 e^{-1^2 \varkappa t} \sin \frac{\pi x}{\lambda} + C_2 e^{-2^2 \varkappa t} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} + C_3 e^{-3^2 \varkappa t} \sin \frac{3\pi x}{\lambda} + \ldots$$

Für $t = 0$ soll u in $\varphi(x)$ übergehen, die bis jetzt noch willkürlichen Constanten C_1, C_2, C_3 etc. müssen daher so bestimmt werden, dass die Gleichung:

$$\varphi(x) = C_1 \sin \frac{\pi x}{\lambda} + C_2 \sin \frac{2\pi x}{\lambda} + C_3 \sin \frac{3\pi x}{\lambda} + \ldots$$

stattfindet. Der Vergleich mit den Formeln 3) und 4) in §. 81 liefert diese Bestimmung augenblicklich; es ist nämlich:

$$14) \qquad C_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda \varphi(\vartheta) \sin \frac{n\pi\vartheta}{\lambda} d\vartheta,$$

und damit die Aufgabe vollständig gelöst*).

---

*) Der vorigen Note zufolge ist die Temperatur v durch die Formel bestimmt:

$$v = e^{-mt} \left\{ C_1 e^{-1^2 \varkappa t} \sin \frac{\pi x}{\lambda} + C_2 e^{-2^2 \varkappa t} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} + \ldots \right\}.$$

Da Exponenzialgrössen mit quadratischen Exponenten an sich schon sehr rasch abnehmen, so kann man für ein einigermassen grosses t die Reihe auf ihr erstes Glied beschränken, also:

$$v = C_1 e^{-(m+\varkappa)t} \sin \frac{\pi x}{\lambda}$$

setzen. Daraus folgt ein interessantes Gesetz. Für drei Punkte in den Entfernungen $\xi - \alpha$, ξ, $\xi + \alpha$ mit den Temperaturen v_1, v_2, v_3 ergiebt sich nämlich:

$$\frac{\frac{1}{2}(v_1 + v_3)}{v_2} = \cos \frac{\pi\alpha}{\lambda};$$

es steht also das arithmetische Mittel der Temperaturen zweier Punkte zu der Temperatur des mittleren Punktes in einem Verhältnisse, welches nur von der gegenseitigen Entfernung dieser Punkte abhängig ist, mithin für verschiedene ξ und gleiche α dasselbe bleibt. Die Erfahrung hat dieses Gesetz bestätigt.

§. 119.
Schluss.

Als letztes Beispiel diene die Bestimmung derjenigen Funktion y zweier Variabelen x und t, welche erstens der partiellen Differenzialgleichung:

$$1)\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \varkappa^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

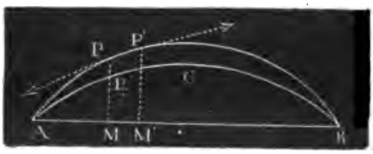
genügt, die zweitens für $t = 0$ in die gegebene Funktion $\varphi(x)$ übergeht, und welche endlich noch die Eigenschaft besitzt, dass ihr partiell nach t genommener Differenzialquotient $\frac{\partial y}{\partial t}$ für $t = 0$ zu einer gleichfalls vorgeschriebenen Funktion $\psi(x)$ wird*).

Vermöge der Identität der obigen Differenzialgleichung mit der unter Nro. 6) in §. 117 betrachteten Gleichung würde y, wenn es nur an die Bedingung 1) gebunden wäre, von der Form:

$$2)\qquad y = \Phi(x + \varkappa t) + \Psi(x - \varkappa t)$$

*) Die Bewegung schwingender Saiten geschieht in Uebereinstimmung mit den obigen Bedingungen, wie man auf folgende Weise sehen kann. Zwischen zwei festen Punkten A und B ist eine Saite ausgespannt, deren Länge $AB = \lambda$ und deren Gewicht p sein möge; durch irgend welche Mittel hat man sie aus ihrer natürlichen geradlinigen Lage heraus in die Form einer durch die Gleichung $y_0 = \varphi(x)$ dargestellten Curve gebracht, jedem ihrer Punkte eine Anfangsgeschwindigkeit ertheilt und sie darauf sich selbst überlassen. Am Ende der Zeit t mögen $AM = x$ und $MP = y$ (Fig. 64) die Coordinaten eines Punktes der Saite bezeichnen, indem sich derselbe von seiner anfänglichen Lage P_0 nach P bewegt hat; ferner sei $Arc\,AP = s$, $MM' = dx$, $PP' = ds = \frac{\partial s}{\partial x}\,dx$, mithin die Masse des Elementes PP' gleich $\frac{p}{g\lambda}\,ds$, wo g die Beschleunigung der Schwere bedeutet. Nach bekannten dynamischen Prinzipien ist die eine Masse M bewegende Kraft $= M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, also im vorliegenden Fall $= \frac{p}{g\lambda}\frac{\partial s}{\partial x}\,dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$; sie muss den Kräften gleich sein, welche aus der Verbindung des Elementes PP' mit den übrigen Theilen der

Fig. 64.



sein, wo Φ und Ψ zwei willkürliche Funktionen bezeichnen; zugleich ist:

3) $$\frac{\partial y}{\partial t} = \varkappa\{\Phi'(x+\varkappa t) - \Psi'(x-\varkappa t)\}.$$

Um die Funktionen Φ und Ψ den weiteren Bedingungen der Aufgabe anzupassen, setzen wir in den Gleichungen 2) und 3) $t=0$, indem wir beachten, dass in diesem Falle y in $\varphi(x)$ und $\frac{\partial y}{\partial t}$ in $\psi(x)$ übergeht; es wird so:

Saite herrühren. Nennen wir Q und $Q_1 = Q + \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx$ die in den Punkten P und P' nach den Richtungen der Tangenten an der Curve wirkenden Spannungen, so wird das Element PP' einerseits von der Vertikalcomponente der Kraft Q herab-, andererseits von der Vertikalcomponente der Spannung Q_1 hinaufgetrieben und es steht folglich PP' unter der Einwirkung der beiden entgegengesetzt wirkenden Kräfte:

$$Q\,\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{und} \quad Q + \frac{\partial\left(Q\,\frac{\partial y}{\partial s}\right)dx}{\partial x}.$$

Die Differenz derselben giebt die bewegende Kraft und es ist daher:

$$\frac{p}{g\lambda}\,\frac{\partial s}{\partial x}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial\left(Q\,\frac{\partial y}{\partial s}\right)}{\partial x}.$$

Um diese Differenzialgleichung zu vereinfachen, nehmen wir an, dass sich die Saite nur wenig von der geradlinigen Form entferne mithin, ∂x für ∂s genommen und Q als constant angesehen werden kann. Dies giebt:

$$\frac{p}{g\lambda}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Q\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \varkappa^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

wobei zur Abkürzung:

$$\varkappa = \sqrt{\frac{Qg\lambda}{p}}$$

gesetzt worden ist. Die entwickelte Differenzialgleichung muss nun so integrirt werden, dass für $t=0$ der ursprüngliche Zustand der Saite zum Vorschein kommt, d. h. y in $y_0 = \varphi(x)$ übergeht, und dass ferner die am Ende der Zeit t vorhandene Geschwindigkeit $\frac{\partial y}{\partial t}$ des Punktes P für $t=0$ zu der Anfangsgeschwindigkeit wird, welche P_0 erhalten hat. Heisst dieselbe v_0 und betrachtet man sie als verschieden für verschiedene Punkte der Saite, so ist v_0 gleich einer gegebenen Funktion $\psi(x)$ der Abscisse. Endlich müssen die Endpunkte A und B der Saite fest bleiben, und daraus folgt, dass für $x=0$ und für $x=\lambda$ immer $y=0$ und $\frac{\partial y}{\partial t}=0$ werden muss, was auch t sein möge.

$$\varphi(x) = \Phi(x) + \Psi(x), \quad \frac{\psi(x)}{\varkappa} = \Phi'(x) - \Psi'(x);$$

aus der zweiten Gleichung folgt durch Multiplikation mit dx und Integration:

$$\frac{1}{\varkappa}\int \psi(x)\,dx = \Phi(x) - \Psi(x),$$

und wenn man diese Gleichung mit der ersten verbindet, so erhält man $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$, nämlich:

$$\Phi(x) = \tfrac{1}{2}\left\{ \varphi(x) + \frac{1}{\varkappa}\int \psi(x)\,dx \right\},$$

$$\Psi(x) = \tfrac{1}{2}\left\{ \varphi(x) - \frac{1}{\varkappa}\int \psi(x)\,dx \right\}.$$

Um die willkürliche Constante der Integration sichtbar zu machen, schreiben wir statt der vorigen Gleichungen die folgenden:

$$\Phi(x) = \tfrac{1}{2}\left\{ \varphi(x) + C + \frac{1}{\varkappa}\int_0^x \psi(\vartheta)\,d\vartheta \right\},$$

$$\Psi(x) = \tfrac{1}{2}\left\{ \varphi(x) - C - \frac{1}{\varkappa}\int_0^x \psi(\vartheta)\,d\vartheta \right\},$$

Lassen wir in der ersten Formel $x + \varkappa t$, in der zweiten $x - \varkappa t$ an die Stelle von x treten, wobei sich C nicht ändert, so ergeben sich $\Phi(x + \varkappa t)$ und $\Psi(x - \varkappa t)$, und das gesuchte Integral ist zufolge von Nro. 2) und nach einer kleinen Reduktion:

$$4) \qquad y = \tfrac{1}{2}[\varphi(x + \varkappa t) + \varphi(x - \varkappa t)] + \frac{1}{2\varkappa}\int_{x-\varkappa t}^{x+\varkappa t} \psi(\vartheta)\,d\vartheta;$$

seine Richtigkeit könnte auch leicht *a posteriori* bestätigt werden.

Wir wollen noch die Modifikation untersuchen, welche die vorstehende Auflösung in dem Falle erleidet, wo man die zwei neuen Bedingungen hinzufügt, dass y sowohl als $\frac{\partial y}{\partial t}$ für jedes t verschwinden sollen, wenn $x = 0$ und wenn $x = \lambda$ ist, während zugleich x auf das Intervall 0 bis λ beschränkt bleiben möge. Damit für $x = 0$ der obengefundene Werth von u verschwinde, muss $\varphi(\varkappa t) + \varphi(-\varkappa t) = 0$, d. h. $\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi)$ sein, ferner:

$$\int_{-\varkappa t}^{\varkappa t} \psi(\vartheta)\,d\vartheta = 0,$$

mithin $\psi(-\xi) = -\psi(\xi)$. Aus der Bedingung, dass für $x = \lambda$

gleichfalls $u = 0$ werde, erhält man auf ähnliche Weise $\varphi(\lambda - \xi) = - \varphi(\lambda + \xi)$ und $\psi(\lambda - \xi) = - \psi(\lambda + \xi)$. Dieselben Bedingungen finden sich wieder, wenn $\frac{\partial y}{\partial t}$ für $x = 0$ und für $x = \lambda$ verschwinden soll. Besitzen nun die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ von Hause aus die entwickelten nöthigen Eigenschaften, so ist die Formel 4) ohne Weiteres brauchbar; findet aber der genannte günstige Umstand nicht statt, so kommt es darauf an, in der Formel 4) statt $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ein paar andere Funktionen $\varphi_1(x)$ und $\psi_1(x)$ zu setzen, welche für $\lambda > x > 0$ mit jenen identisch sind, ausserdem aber jene Eigenschaften besitzen. Die Auflösung bestände dann in folgender Gleichung:

$$5)\qquad y = \tfrac{1}{2}[\varphi_1(x + \varkappa t) + \varphi_1(x - \varkappa t)] + \frac{1}{2\varkappa}\int_{x-\varkappa t}^{x+\varkappa t} \psi_1(\vartheta)\, d\vartheta,$$

und darin muss sein:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(x) = \varphi(x)\\ \psi_1(x) = \psi(x)\end{array}\right\}\text{für } \lambda > x > 0, \qquad \begin{array}{l}\varphi_1(-x) = -\varphi_1(x),\ \varphi_1(\lambda - x) = -\varphi_1(\lambda + x),\\ \psi_1(-x) = -\psi_1(x),\ \psi_1(\lambda - x) = -\psi_1(\lambda + x).\end{array}$$

Den Bedingungen, welchen die Funktionen $\varphi_1(x)$ und $\psi_1(x)$ unterworfen sind, genügen folgende Gleichungen:

$$\varphi_1(x) = A_1 \sin\frac{\pi x}{\lambda} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{\lambda} + A_3 \sin\frac{3\pi x}{\lambda} + \ldots.$$

$$6)\qquad A_n = \frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda \varphi(\vartheta)\sin\frac{n\pi\vartheta}{\lambda}\, d\vartheta,$$

$$\psi_1(x) = B_1 \sin\frac{\pi x}{\lambda} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{\lambda} + B_3 \sin\frac{3\pi x}{\lambda} + \ldots.$$

$$7)\qquad B_n = \frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda \psi(\vartheta)\sin\frac{n\pi\vartheta}{\lambda}\, d\vartheta,$$

wie man mittelst der Formeln 3) und 4) in §. 81 augenblicklich übersieht; man findet vermöge dieser Substitutionen aus Nro. 5):

$$8)\quad y = A_1 \sin\frac{\pi x}{\lambda}\cos\frac{\varkappa\pi t}{\lambda} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\varkappa\pi t}{\lambda} + \ldots$$
$$+ \frac{\lambda}{\varkappa\pi}\left\{\tfrac{1}{1} B_1 \sin\frac{\pi x}{\lambda}\sin\frac{\varkappa\pi t}{\lambda} + \tfrac{1}{2} B_2 \sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\varkappa\pi t}{\lambda} + \ldots\right\}.$$

Dasselbe Resultat kann man auch unmittelbar auf folgendem Wege erhalten. Ein partikuläres Integral der Differenzialgleichung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \varkappa^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

ist nach §. 117, II:

$$e^{\beta(x \pm \varkappa t)};$$

da aber dieser Ausdruck weder für $x = 0$, noch für $x = \lambda$ verschwindet, so lange β einen reellen Werth hat, so nehmen wir $\beta = \mu\sqrt{-1}$ und erhalten zwei partikuläre Integrale, nämlich den reellen Theil $\cos\mu(x \pm \varkappa t)$ und den imaginären Theil $\sin\mu(x \pm \varkappa t)$. Zerlegt man den Cosinus, sowie den Sinus und versucht die einzelnen Bestandtheile, so findet sich, dass auch die Ausdrücke:

$$\sin\mu x \cos\mu\varkappa t \quad \text{und} \quad \sin\mu x \sin\mu\varkappa t$$

partikuläre Integrale der obigen Differenzialgleichung sind, und um ihnen die Eigenschaft zu ertheilen, dass sie sowohl für $x = 0$, als für $x = \lambda$ verschwinden, braucht man nur $\mu = \frac{n\pi}{\lambda}$ zu setzen, wo n ganz und positiv ist. Als weiteres partikuläres Integral kann jetzt der Ausdruck:

$$A_n \sin\frac{n\pi x}{\lambda} \cos\frac{n\varkappa\pi t}{\lambda} + C_n \sin\frac{n\pi x}{\lambda} \sin\frac{n\varkappa\pi t}{\lambda}$$

dienen, und es ist demnach das allgemeine Integral:

$$9) \qquad y = \left(A_1 \cos\frac{\varkappa\pi t}{\lambda} + C_1 \sin\frac{\varkappa\pi t}{\lambda}\right)\sin\frac{\pi x}{\lambda}$$
$$+ \left(A_2 \cos\frac{2\varkappa\pi t}{\lambda} + C_2 \sin\frac{2\varkappa\pi t}{\lambda}\right)\sin\frac{2\pi x}{\lambda}$$
$$+ \left(A_3 \cos\frac{3\varkappa\pi t}{\lambda} + C_3 \sin\frac{3\varkappa\pi t}{\lambda}\right)\sin\frac{3\pi x}{\lambda}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$

woraus noch folgt:

$$10) \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\varkappa\pi}{\lambda}\left(-A_1 \sin\frac{\varkappa\pi t}{\lambda} + C_1 \cos\frac{\varkappa\pi t}{\lambda}\right)\sin\frac{\pi x}{\lambda}$$
$$+ \frac{2\varkappa\pi}{\lambda}\left(-A_2 \sin\frac{2\varkappa\pi t}{\lambda} + C_2 \cos\frac{2\varkappa\pi t}{\lambda}\right)\sin\frac{2\pi x}{\lambda}$$
$$+ \frac{3\varkappa\pi}{\lambda}\left(-A_3 \sin\frac{3\varkappa\pi t}{\lambda} + C_3 \cos\frac{3\varkappa\pi t}{\lambda}\right)\sin\frac{3\pi x}{\lambda}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$

Die Coefficienten A und C müssen jetzt so bestimmt werden, dass y in $\varphi(x)$ und $\frac{\partial y}{\partial t}$ in $\psi(x)$ übergeht, sobald $t = 0$ gesetzt wird; dass mithin folgende Gleichungen stattfinden:

$$\varphi(x) = A_1 \sin\frac{\pi x}{\lambda} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{\lambda} + A_3 \sin\frac{3\pi x}{\lambda} + \ldots,$$

$$\frac{\lambda}{\varkappa\pi}\psi(x) = C_1 \sin\frac{\pi x}{\lambda} + 2C_2 \sin\frac{2\pi x}{\lambda} + 3C_3 \sin\frac{3\pi x}{\lambda} + \ldots.$$

Die Formeln 3) und 4) in §. 81 liefern diese Bestimmung, nämlich:

$$A_n = \frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda \varphi(\vartheta) \sin\frac{n\pi\vartheta}{\lambda}\, d\vartheta,$$

$$n\,C_n = \frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda \frac{\lambda}{\varkappa\pi}\psi(\vartheta) \sin\frac{n\pi\vartheta}{\lambda}\, d\vartheta,$$

oder auch:

$$C_n = \frac{\lambda}{\varkappa\pi}\cdot\frac{1}{n}\,\frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda \psi(\vartheta) \sin\frac{n\pi\vartheta}{\lambda}\, d\vartheta = \frac{\lambda}{\varkappa\pi}\cdot\frac{1}{n}\;B_n,$$

und es ist demnach die in der Gleichung 9) enthaltene Auflösung mit dem unter Nro. 8) verzeichneten Resultale identisch*).

---

*) Giebt man in den Formeln 9) und 10) dem t zwei verschiedene Werthe, von denen der zweite den ersten um $\frac{2\lambda}{\varkappa}$ übertrifft, so ist der Zustand der Saite im zweiten Falle derselbe wie im ersten; der Ausdruck:

$$\frac{2\lambda}{\varkappa} = 2\sqrt{\frac{p\lambda}{gQ}}$$

ist daher die Dauer einer vollständigen Schwingung; sollen n solcher Schwingungen in der Zeiteinheit stattfinden, so folgt als Schwingungszahl:

$$n = \frac{\varkappa}{2\lambda} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{gQ}{p\lambda}},$$

woraus sich die Gesetze über die Schwingungsmengen verschiedener Saiten leicht ableiten lassen. Auf den Formeln 9) und 10) beruht auch die Erklärung der Schwingungsknoten, auf die wir nicht näher eingehen können.

Verbesserungen.

Seite 39 Z. 12 v. u. muss der zweite Nenner ∂y, der dritte ∂z heissen.

„ 42 letzte Zeile statt $-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ lies $+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$.

„ 63 Z. 6 v. o. statt MS und PS lies PS und MS.

„ 86 Z. 3 v. o. ist hinter „sich" einzuschalten: „in manchen Fällen".

„ 111 Z. 7 v. u. statt sein lies sei.

„ 116 Z. 2 v. u. statt $\alpha\beta\gamma\delta$ lies $\alpha\beta$.

„ 165 Z. 4 v. o. statt $\frac{1}{r'}(\cos u' + i \sin u')$ lies $\frac{1}{r'}(\cos u' - i \sin u'.)$

„ 170 Formel 13) statt *cos* lies *sin*.

„ 230 Formel 2) statt $+cx^2$ lies $-cx^2$.

„ 285 Z. 12 v. u. ist hinter δ_n einzuschalten $= b - a$.

„ 307 Z. 13 v. u. statt dz lies dx.

$\therefore \int$ taken from $x = a$ to $x = b$

in the new $\int$ if $x = a$, $y = ah+k$ —

These limits are constants — they have nothing to do with the values x, y — here x is to be taken from a certain no. a —

The truth of this alteration of the limits is best seen by reversing the process — take the

$$\frac{1}{h}\int_{ah+k}^{bh+k} f(y)\,dy \quad \text{— go back to } x, = \frac{y-k}{h}$$

$$y = hx+k$$

$$dy = h\,dx$$

$$f(y) = \phi(hx+k) \quad \therefore \frac{1}{h}\int f(y)\,dy = \int \phi(hx+k)\,dx$$

Now $\int$ starts from y $(= hx+k) = ah+k$

if $hx+k = ah+k$, then $x = a$ — & the new $\int$ must commence with $x = a$ — &c.